الموضوع: المحاضرة التاسعة   التاريخ: ٨ / ٥ / ٢٠١٧

لا تكون العكس تطبيق بالإبدال كان البعد التام ستالي.

P.117/15 لنأخذ الفضاء المتجهي X المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي لها مشتقات من جميع المراتب في كل نقطة من $\mathbb{R}$، ولنعرف $T: X \to X$ بالمساواة $y(t) = Tx(t) = x'(t)$.

① أثبت أنّ $R(T)$ يساوي X بأكمله، ② إلا أن T^{-1} ليس موجوداً.

③ قارن هذا بالمسألة 14 وأعطِ التعليق المناسب.

الحل: المعطيات التي لدينا هي:

x دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}$ ⟸ $x \in X$

$$T: X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto Tx = y = x'(t)$$

① لو أخذنا أي عنصر من X ⟸ النواتج جميعها حتماً من X ⟸ المستقر أيضاً سيكون من X ⟸ المستقر الفعلي $R(T)$ هو X بأكمله

② T^{-1} غير موجود لأنه غير متباين
حيث أن: جميع التوابع الثابتة صورتها صفر وبالتالي يوجد عناصر غير صفرية في النواة.
مثال على ذلك: $5x \xrightarrow{\text{صورتها}} 5$
بأخذ الصورة العكسية $5 \longrightarrow 5x + c$
⟸ غير متباين.

③ البعد هنا ($\dim$ الـ) غير منتهٍ بينما الـ $\dim$ في المسألة 14 منتهٍ

التاريخ / /

الموضوع

P.131\1

الحل موجود في المحاضرة الخامسة الصفحة الرابعة، وهو إثبات للعلاقة:

$$\|T_1T_2\| \le \|T_1\|.\|T_2\|$$

P.131\2

ليكن X و Y فضاءين منظمين، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي $T: X \to Y$ محدوداً هو أن تكون الصورة المباشرة للمجموعات المحدودة في X وفق T محدودة في Y.

أثبت أن التطبيق مستمر وخطي

إما عن طريق نقطة الصفر أو حسب التعريف

الحل: النص يعني:

$$T:(X,\|.\|) \to (Y,\|.\|)$$

T محدود $\Leftrightarrow$ الصورة المباشرة للمجموعات المحدودة في X وفق T محدودة في Y

$(\Leftarrow)$ لتكن M مجموعة محدودة في X ولنثبت أن T_M محدودة في Y

نستخدم هنا أن المجموعة محدودة فرضاً و ... طلب

علينا التركيز على تعريف المجموعة المحدودة في فضاء طبولوجي.

يكون الفضاء محدود إذا كان قطرها محدود

" " إذا وجد كرة مركزها هذه النقطة ونصف قطرها r

بحيث $d(z,0)<r \Leftarrow \forall z \in Z$

فضاء منظم $\|z\|<r$

لنثبت ذلك.

M محدودة $\Leftarrow$ يوجد كرة تحوي M مركزها الصفر.

$$\|x-0\| = \|x\| \le r$$

$$x \in M$$

وبالتالي فإن

$$\|Tx\| \le \|T\|.r = c \text{ ثابت}$$

وبالتالي يكون T_M محدود

الموضوع .... التاريخ / /

($\Leftarrow$) علينا إثبات أنّ T محدودة.

لنثبت ذلك بحالة خاصة بأخذ المجموعة هي الكرة الواحدية المغلقة

$$B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$ محدودة

$\Leftarrow$ صورة $B(0,1)$ وفق T محدودة

$\Leftarrow$

$$\exists c : \|Tx\| \leq c.\|x\| \quad \forall x \in X$$

ليكن:

$$B(0,1) \ni \frac{y}{\|y\|} \Leftarrow y \in X$$

$$\Rightarrow \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \quad c . \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|y\|} \|Ty\| \leq c . \frac{\|y\|}{\|y\|} = c \Rightarrow \|Ty\| \leq c\|y\|$$

$\Leftarrow$ T محدود.

P.131 \ 3

إذا كان $T \neq 0$ مؤثر خطي محدود، بيّن أنه إذا كان x أي عنصر من $D(T)$ يحقق الشرط $\|x\| < 1$ عندئذٍ تصح المتباينة $\|Tx\| < \|T\|$

الحل الشرط $\|x\| < 1$ يعني أنّ النقاط داخل الكرة الواحدية.

$$\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$$
$$< \|T\| . 1$$
$$\|Tx\| < \|T\| \quad \text{محقق.}$$

الموضوع — التاريخ / /

أي تتمتع بالظاهرة التالية

س: 9 | P.131

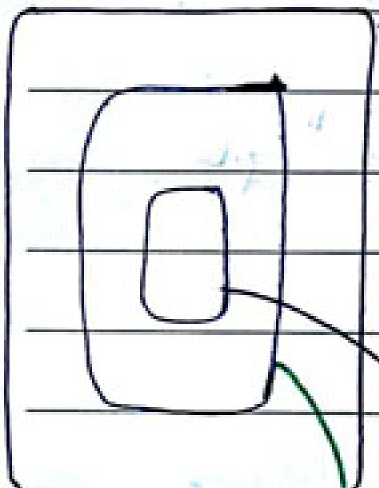
لنفترض أن $T: C[0,1] \to C[0,1]$ مؤثر معرف بالمساواة :

$Tx(t) = y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$ مستقر وليس مستقر فعلي

① حدد كلاً من $R(T)$ و ② $T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$ ثم ③ قرر ما إذا كان T^{-1} "محدوداً".

الحل

① نقصد بـ $R(T)$ المستقر الفعلي وليس المستقر



IR صنف قابل للمكاملة

C صنف الدوال المستمرة

d^2 قابلة للمفاضلة ٢ مرة

d^∞ قابلة للمفاضلة بالعدد الذي نشاء

تولد دالة تكامل وهذا التكامل تابع لحده الأعلى أي مشتقه هو تابع ما تحت التكامل على أنه لتبدل تكامله بحده الأعلى.

مشتقة دالة مستمرة على الأقل مرة واحدة و $R(T)$ هو جزء من المستقر

إذن $R(T)$ هو جزء فعلي قابل للمفاضلة ومشتقه مستمر.

لتوضيح الفرق بين المستقر والمستقر الفعلي: لدينا $F: R \to R$

$x \mapsto y = f(x) = 3$

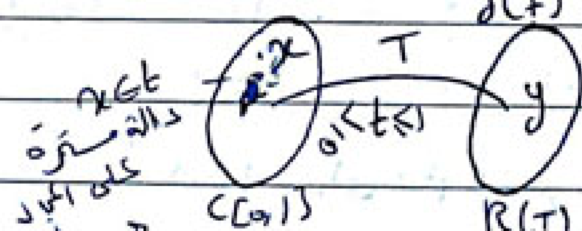
هنا المستقر R لكن المستقر الفعلي هو (3)

② $T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$

قاعدة ربطه

$y(t) \to T^{-1}(y(t)) = x(t)$

لذا علينا الانتباه والتمييز بين المستقر والمستقر الفعلي



$x = x(t)$

$y = y(t)$ حيث $t < 1$

$y(\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt$ قيمة دالة المستقر عند النقطة

سينتج لدينا قيمة وحيدة

T مكاملة $\Leftarrow$ T^{-1} "اشتقاق (تفاضل)"

أي:

$\int_0^t x_1(t)\,dt = \int_0^t x_2(t)\,dt$

التباين أي: $y_1(t) = y_2(t)$ $\Downarrow$ $x_1(t) = x_2(t)$

هذا التابع متباين لأنه محدود وبالتالي لا يوجد ثابت

إذاً T^{-1} تطبيق موجود وقاعدة الربط هي المشتق لأنه تكامل دالة ما بالنسبة لحدها الأعلى مشتقه هو تابع ما تحت التكامل على أن نبدل تكامله بحده الأعلى.

③ عملية الاشتقاق هي عملية خطية $\Leftarrow$ T^{-1} خطي وهو غير محدود "أثبتناه سابقاً".

هام "تمرين وظيفة":

ليكن لدينا T مؤثر الدالة تعريفه $C[0,1]$ بحيث:

$$\forall x \in C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

فإن $Tx(t) = \int_0^t x(s)\,ds = y(t)$

- أثبت أن هذا التطبيق T خطي و أثبت أنه محدود.

"لإثبات المحدودية نثبت الاستمرار حسب التعريف"

- أثبت أن المستقر دالة مستمرة.

"قابل للمفاضلة $\Leftarrow$ حكماً مستمر لكن علينا إثبات الاستمرارية استناداً للتعريف أي:

$y \in [0,1]$ يجب أن تكون y دالة حقيقية مستمرة،

$$\exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \ , \ |y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon$$

ومنها مطلق ولم نضع النظيم لأننا نريد إثبات أنه نقطة من هذا الفضاء لذلك أخذنا $\mathbb{R}$ أو وداخل لأخذ ضمن $C[0,1]$

- أثبت أن y قابلة للمفاضلة مرة واحدة على الأقل.

$$Tx(t) = y(t) = \int_0^t x(s)\,ds$$

أوجد مشتق هذه الدالة حسب تعريف المشتق.

"أي علينا برهان مايلي

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \boxed{\ }$$ موجود

النهاية ستكون $x(t)$

الموضوع: مشتق تابع لحده الأعلى   التاريخ / /

نتيجة: $x(t) = \left(\int_a^t x(s)\,ds\right)'$ أي مشتق تابع ما تحت التكامل على أن للبداية ما تحت التكامل بحده الأعلى.

تمرين ليكن $f : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$

برهن أن f مستمر. " الدالي هنا f متغيره x ".

فكرة الحل: حسب التعريف

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \,;\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

علينا برهان f'

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overset{\text{ازياحات}}{f(x+h)} - f(x)}{h}$$

h هو الانزياح المعطى

- المشتق هو فرق تغير تابع،
- الاشتقاق هو تغير،
- مفهوم الاستمرار: المسافة بين المتحولات صغيرة بالقدر الذي أشاء، " ما بين الصور " " " " .

Marah Masri