Subject: Date: / /

الحل: $S = 5.8\ cm$, $\bar{X} = 83\ cm$, $n = 15 < 30$

المجتمع طبيعي و μ و σ^2 مجهولان و $n < 30$ ولدينا

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$, $n-1 = 14$

ومن جدول التوزيع الاحتمالي t ستيودنت لدينا

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} = t_{0.975}^{(14)} = 2.145$$

ويكون مجال الثقة 95% في هذه الحالة من الشكل

$$\mu \in \left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Rightarrow \mu \in [79.788 , 86.212]$$

(2 $$n \geq \left(\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} S}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{(2.145)(5.8)}{2}\right)^2 = 38.7$$

$$\Rightarrow n \geq 39$$

ملاحظة: كلما ازداد حجم العينة أصبح تقدير أفضل لـ σ و μ وكلما اقتربت t من Z_α

انتهت المحاضرة التاسعة عشرة

محاضرة تاسعة عملي

تمرين: نأخذ عينة عشوائية ذات الحجم n من مجتمع له الكثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta+1)\, x^{\theta} ; & 0 < x < 1 \\ 0 ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد مقدر للوسيط θ باستخدام طريقة العزوم

الحل: بما أنه لدينا وسيط واحد θ فإننا نبحث عن حلول المعادلة $M_1 = m_1$

حيث M_1 هو العزم الأول للعينة وبالتالي $M_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \bar{X}$

و m_1 هو عزم المتحول العشوائي X الذي كثافته $f_X(x)$

Subject: Date: / /

$$m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\,dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,dx$$

$$= (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}\,dx = \frac{(\theta+1)}{\theta+2}\left[x^{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

وبمساواة العزوم المتناظرة مع نظيرتها يكون

$$m_1 = M_1 \Rightarrow \frac{\theta+1}{\theta+2} = \overline{X} \Rightarrow \theta+1 = \overline{X}(\theta+2)$$

$$\Rightarrow \theta - \overline{X}\theta = 2\overline{X} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$$

2) أوجد مقدر الوسيط θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى .

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta) = f_X(x_1, \theta) \cdot f_X(x_2, \theta) \cdots f_X(x_n, \theta)$$

$$= (\theta+1)x_1^{\theta} \cdot (\theta+1)x_2^{\theta} \cdots (\theta+1)x_n^{\theta}$$

$$\Rightarrow L(\theta) = (\theta+1)\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta}$$

وبما أن الدالة $K(\theta) = \log(L(\theta))$ تبلغ نهايتها العظمى عند النقطة نفسها التي تبلغ عندها الدالة $L(\theta)$ نهايتها العظمى وبهدف تسهيل الحساب فإننا نبحث عن $\hat{\theta}$ التي تحقق حل جملة المعادلات

$$\frac{dK(\theta)}{d\theta} = 0 \quad , \quad \frac{d^2K(\theta)}{d\theta^2} < 0$$

$$K(\theta) = \log L(\theta) = n\log(\theta+1) + \theta\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-n}{\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} - 1 \Rightarrow \frac{d^2K(\theta)}{d\theta^2} = \frac{-n}{(\theta+1)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} - 1$$

Subject: Date : / /

تمرين : من مجتمع طبيعي أول $N(3,4)$ نأخذ عينة عشوائية $n_1=4$
ومن مجتمع طبيعي ثاني $N(2,4)$ نأخذ العينة العشوائية $n_2=4$

1) ما احتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية ؟

الحل : بما أن X يتبع التوزيع الطبيعي $N(3,4)$ عندئذ حسب مبرهنة النهاية المركزية $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Leftarrow \bar{X} \sim (3,1)$ ومنه أيضاً $\bar{Y} \sim (2,1)$ وبالتالي أن أي تركيب خطي من المتحولات العشوائية الطبيعية هو متحول عشوائي طبيعي

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_{\bar{x}-\bar{y}}, \sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}})$$

$$\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_x - \mu_y = 3-2 = 1$$

$$\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}} = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = 1+1 = 2 \Rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N(1,2)$$

الاحتمال المطلوب $P(\bar{X} > \bar{Y}) = P(\bar{X}-\bar{Y} > 0)$

$$= P\left(\frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - \mu_{\bar{x}-\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} > \frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > -0.71)$$

$$= 1 - P(Z < -0.71) = 1 - [1 - P(Z < 0.71)]$$

$$= P(Z < 0.71) = 0.7611$$

2) ما هو احتمال أن يكون الفرق بين المتوسطين أقل من 0.5

الحل : $P(|\bar{X}-\bar{Y}| < 0.5) = P(-0.5 < \bar{X}-\bar{Y} < +0.5)$

$$P\left(\frac{-0.5-1}{\sqrt{2}} < Z < \frac{0.5-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= P(-1.06 < Z < -0.35)$$

$$= P(Z < -0.35) - P(Z < -1.06)$$

$$= 1 - P(Z < 0.35) - 1 + P(Z < 1.06)$$

$P(Z<1.06)-P(Z<0.35)$

$=0.8554-0.6368=0.2186$

انتهت المحاضرة التاسعة عملي

محاضرة العاشرة عملي والأخيرة بالنسبة للعملي

تمرين: ليكن X متغير عشوائي يتوزع توزيع أسي بالوسيط $\lambda=2$ استخدم متباينة تشيبيشيف للحصول على حد راجح للاحتمال $P[|X-E(X)|\geq 1]$

وقارن ذلك مع القيمة الفعلية للاحتمال

الحل:

$P(|X-\mu|\geq \varepsilon)\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

بما أن X يتبع توزيع أسي فإن $V(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$

متباينة تشيبيشيف تقول

$\forall \varepsilon>0: P[|X-E(X)|\geq \varepsilon]\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

وبالمقارنة مع المضمون نجد أن $1=\varepsilon$ وبالتالي

$P[|X-E(X)|\geq \varepsilon]=P(|X-\frac{1}{2}|\geq 1)\leq 0.25$

أي أن أعلى قيمة لهذا الاحتمال لن تتجاوز 0.25 وحساب القيمة الفعلية للاحتمال السابق

$P[|X-\frac{1}{2}|\geq 1]=1-P[|X-\frac{1}{2}|<1]$

$1-P(-1<X-\frac{1}{2}<+1)=1-P(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})$

$=1-P(X<\frac{3}{2})+\boxed{P(X<-\frac{1}{2})} \Rightarrow 1-P(X<\frac{1}{2})$ في الأسي لا نكتب

$X\sim exp(\lambda=2)$

$f_X(x)=P(X=x), F_X(x)=P(X<x)$

$\therefore F_X(x)=1-e^{-\lambda x}=1-e^{-2x}$

$=1-[1-e^{-2(\frac{3}{2})}-1+e^{-2(\frac{-1}{2})}]$

لأنها سالبة

$=1-[1-e^{-2(\frac{2}{3})}-0]=0.0498$

مع المقارنة مع الحد الراجح نجد أن المتباينة محققة

AL MARJI

7/1

Subject: Date: / /

تمرين: مالك سيارة يريد أن يعرف متوسط الأسبوعي للمسافة التي يقطعها مقيسة بالكيلومتر وقد سجل المسافات المقطوعة في 49 أسبوع متتالي ووجد أن متوسطها 230 كيلومتر في الأسبوع بانحراف معياري 80 كيلومتر، أوجد 96% مجال ثقة بالمتوسط ما يقطعه في الأسبوع

ملاحظة: $\bar{X}$ متوسط عينة أما μ متوسط مجتمع

σ تباين مجتمع أما S تباين عينة

الحل: $n = 49 > 30 \Leftarrow \bar{X} = 230$ ، $S = 80$ في هذه الحالة

تباين المجتمع (المسافة المقطوعة) مجهولة وكون $n = 49 > 30$ فإن تباين

$S^2 = (80)^2$ يكون مقدراً جيداً لتباين المجتمع σ^2 وبالتالي يمكننا

تمثيل مجال الثقة التقريبي لمتوسط المجتمع μ وبدقة $(1-\alpha)100 = 96$

$$P\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$1 - \alpha = 0.96 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.98} = 2.05$$

$$\Rightarrow \left[230 - 2.05\left(\frac{80}{\sqrt{49}}\right) , 230 + 2.05\left(\frac{80}{\sqrt{49}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow (206 < \mu < 253.4) = 0.96$$

تمرين: في ستة اختبارات تجميع والتركيب الآلية معينة استغرق وقت التجميع والتركيب 13 ، 14 ، 16 ، 13 ، 11 ، 12 دقيقة، فرض أن زمن التجميع والتركيب يتبع التوزيع الطبيعي، ضع فترة ثقة لمتوسط زمن الحقيقي بثقة 99%

الحل: بما أن متحول الزمن حقيقي لتجميع وتركيب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين مجهولين فإن مجال الثقة الحقيقي لمتوسط حقيقي بثقة $(1-\alpha)100$

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Subject: Date: / /

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{6} [11+12+13+14+13+16] = 13.167$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - n\bar{X}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{5} [1055 - 6(13.167)^2] = 2.967$$

$$\Rightarrow S = 1.722$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} = t_{0.995}^{(5)} = 4.03$$

وبالتالي يكون مجال الثقة 99% لمتوسط زمن التجميع والتركيب

$$\left[13.167 - 4.03 \left(\frac{1.722}{\sqrt{6}}\right), 13.167 + 4.03 \left(\frac{1.722}{\sqrt{6}}\right) \right]$$

$$P(10.165 \le \mu \le 15.835) = 0.99$$

انتهت المحاضرة السابقة علي

محاضرة عشرون :

مجال الثقة للفرق بين متوسطين متغيرين عشوائيين طبيعيين تباينهما معلوم

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ حيث μ_1 و μ_2 مجهولان و σ_1^2 و σ_2^2 معلومان ولكن $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ متوسطا عينتين عشوائيتين لـ X_1 و X_2 من الحجم n_1 و n_2 على الترتيب وبالتالي نجد من مبرهنة سابقة

$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ و $\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ وبالتالي سيكون

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبالتالي يمكن إيجاد مجال الثقة $100(1-\alpha)\%$ من الثقة للفرق

$\mu_1 - \mu_2$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

ملاحظة: عندما لا يكون المتغيرين X_1 و X_2 التوزيع الطبيعي ويكون $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ بفضل مبرهنة النهاية المركزية يبقى مجال الثقة