11-5-2017

نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄المحاضرة السابعة عشر و الثامنة عشر (الأخيرة)

عنوان المحاضرة : حل جملة معادلات تفاضلية خطية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـطرق حل جملة معادلات تفاضلية خطية

٢ـأمثلة عن ذلك

٣ـملحق حل الوظائف السابقة

حل جملة معادلات تفاضلية خطية:

يتم حل جملة معادلات تفاضلية خطية بعدة طرق منها:

١) الحصول على الشكل التناظري لجملة المعادلات الخطية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}\ ,\ \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}$$

فالشكل التناظري لهذه الجملة يعطى بالشكل :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

وبمكاملة كل من معادلتي الجملة نحصل على تكاملهما العام ثم نعزل المتغيرات y,z نحصل على الحل العام للجملة التفاضلية الخطية.

٢) **طريقة الحذف:** تقوم هذه الطريقة على تشكيل معادلة تفاضلية عادية في أحد الدوال المجهولة في الجملة فإذا أمكن مكاملة المعادلة الناتجة نكون قد حصلنا على الحل لهذه الجملة.

٣) طريقة تحويل الثوابت(طريقة لاغرانج).

مثال:

لتكن الجملة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad , \qquad \frac{dz}{dx} = x.\frac{z}{y}$$

اكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام

الحل:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x.z}$$

من (2)و(1) $\Longrightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Longrightarrow x.dx + ydy = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = c_1$

من (2)و(3) $\Longrightarrow \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x.z} \Longrightarrow -dy = \frac{dz}{z} \Longrightarrow -y = \ln z + \ln c_2 \Longrightarrow$

$$c_2 = \frac{e^{-y}}{z}$$

لو طلب منا الحل العام للجملة التفاضلية نعزل y, z أي:

$$x^2 + y^2 = c_1 \Longrightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{e^{-y}}{z} \Longrightarrow z = \frac{e^{-\sqrt{c_1 - x^2}}}{c_2} \xrightarrow{\text{الحل العام}}$$

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \left(\sqrt{\boldsymbol{c_1 - x^2}}, \frac{\boldsymbol{e^{-\sqrt{c_1 - x^2}}}}{\boldsymbol{c_2}}\right)$$

مثال: لتكن الجملة التفاضلية الخطية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

أوجد الحل العام لهذه الجملة.

الحل:

$$\text{من}(1) \Rightarrow -xdx = ydy \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1$$

$$\text{من}(2) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow z = c_2$$

لإيجاد الحل نعزل كل من y, z ومنه:

$$y = \sqrt{c_1 - x^2} \Rightarrow z = c_2$$

لو طلب منا الشكل التناظري نكتب : $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$

مثال: لتكن الجملة التفاضلية الخطية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 1$$

أوجد الحل العام لهذه الجملة.

الحل:

$$\text{من}(1) \Rightarrow y = x + c_1 \qquad \text{من}(2) \Rightarrow z = x + c_2$$

في طلب التكامل العام : $c_1 = y - x \quad , \quad c_2 = z - x$

لو كانت السطوح تمر من النقطة (x_0, y_0, z_0) فإن:

$$c_1 = y_0 - x_0 \quad , \quad c_2 = z_0 - x_0$$

نعوض في الحل العام :

$$y = x + c_1 \Rightarrow \boldsymbol{y = x - x_0 + y_0}$$
$$z = x + c_2 \Rightarrow \boldsymbol{z = x - x_0 + z_0}$$

مثال: أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$\begin{cases} (z-y)^2 . \dfrac{dy}{dx} = z \ldots\ldots\ldots (1) \\ (z-y)^2 . \dfrac{dz}{dx} = y \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

الحل:

$$\text{من}(1) \Rightarrow \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} \ \&\& \ \text{من}(2) \Rightarrow \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dz}{y} \xrightarrow{\text{من } (1),(2)}$$

$$\underbrace{\frac{dx}{(z-y)^2}}_{\boxed{1}} = \underbrace{\frac{dy}{z}}_{\boxed{2}} = \underbrace{\frac{dz}{y}}_{\boxed{3}}$$

$$\text{من النسبتين } (2),(3) \Rightarrow ydy - zdz = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y^2 - z^2 = c_1}$$

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy - dz}{z-y} \Rightarrow \frac{dx}{z-y} = d(y-z) = -d(z-y) \Rightarrow$$

$$dx + (z-y).d(z-y) = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x + \frac{1}{2}(z-y)^2 = c_2}$$

مثال: أوجد حل جملة المعادلتين بطريقة الحذف :

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad , \qquad \frac{dz}{dx} = -y$$

$$\text{من}(1) \Rightarrow y' = z \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} y{=}z' \xrightarrow{\text{من}(2)} y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0 \Rightarrow$$

وهو الحل العام : $\lambda^2+1=0 \to \lambda=\mp i \implies \mathbf{y}=\mathbf{c_1}\cos \boldsymbol{x}+\boldsymbol{c_2}\sin \boldsymbol{x}$

ولكن من (1) لدينا $y'=z$ ومنه:

$$z=y'=(c_1\cos x+c_2\sin x)=-c_1 \sin x+c_2 cosx$$

ومنه الحل هو :

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{c_1}\cos \boldsymbol{x}+\boldsymbol{c_2}\sin \boldsymbol{x}\,,-\boldsymbol{c_1}\sin \boldsymbol{x}+\boldsymbol{c_2}\cos \boldsymbol{x})$$

مثال: أوجد حل جملة المعادلتين التفاضليتين الخطيتين التاليتين بطريقة الحذف:

$$\frac{dy}{dx}=3y-2z\ (1)\qquad , \qquad \frac{dz}{dx}=2y-z\ (2)$$

$$\text{من}(1) \implies y'=3y-2z \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} y=3y'-2z' \xrightarrow{\text{بتعويض}(2)\text{و}(1)}$$

$$y''=3(3y-2z)-2(2y-z) \implies y''=5y-4z \xrightarrow{\text{نتخلص من } z}$$

$$y''\ \text{نعزل } z \text{ ونعوض في}\ \text{من}(1) \implies z=\frac{1}{2}(3y-y')\ \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$y''=5y-2(3y-y') \implies y''=-y+2y' \implies y''-2y'+y=0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية ومنه :

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \xrightarrow{\text{بالحل على}\Delta} \lambda=1\ \text{جذر مضاعف} \implies$$

$$y=c_1e^x+c_2xe^x \xrightarrow{\text{نعوض في } z \text{ وذلك بعد اشتقاق } y} y'=c_1e^x+c_2e^x+c_2xe^x \xrightarrow{\text{نعوض في } 3}$$

$$z=\frac{1}{2}(3y-y')=\frac{1}{2}[3(c_1e^x+c_2xe^x)-(c_1e^x+c_2e^x+c_2xe^x)]$$

$$\implies z=\left(c_1+c_2x-\frac{c_2}{2}\right)e^x$$

مثال: أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} - 1 = -\dfrac{1}{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy - dx = -\dfrac{dx}{z} \cdot \dfrac{1}{y-x} \\ dz = \dfrac{dx}{y-x} \cdot \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \dfrac{dy-dx}{y-x} = -\dfrac{dx}{z(y-x)} \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{z(y-x)} \end{matrix} \xrightarrow{\text{بالجمع}} \frac{dy-dx}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

$$\ln(y-x) + \ln z = \ln c_1 \Rightarrow (y-x)z = c_1 \dots\dots\dots (\#)$$

$$\Rightarrow z = \frac{c_1}{y-x} \xrightarrow{\text{نعوضها في الأولى}}$$

$$dy - dx = -\frac{(y-x)dx}{c_1} \Rightarrow \frac{dy-dx}{y-x} = -\frac{dx}{c_1} \Rightarrow \ln(y-x) = -\frac{x}{c_1} + c_2$$

$$\to (y-x) = c_2 e^{-\frac{x}{c_1}} \Rightarrow (y-x)e^{\frac{x}{c_1}} = c_2$$

$$\xrightarrow{\text{نبدل } c_1 \text{ من}(\#)} (y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}} = c_2 \xrightarrow{\text{الحلول}} z = \frac{c_1}{y-x} \;\&\&\; y = c_2 e^{-\frac{x}{c_1}} + x$$

مثال : أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التاليتين:

$$2dy = dz \;\; (1) \qquad \&\& \qquad \frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = dy \; (2)$$

الحل:

$$\underbrace{\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}}_{\boxed{1}} = \frac{dy}{\underbrace{1}_{\boxed{2}}} = \frac{dz}{\underbrace{2}_{\boxed{3}}}$$

$$\text{من }(3)\text{و}(2) \Rightarrow 2dy = dz \Rightarrow 2y - z = c_1 \Rightarrow z = 2y - c_1$$

$$z - x - y = 2y - c_1 - x - y = y - x - c_1$$

$$(2) - (1) = (3) \Rightarrow \frac{dy - dx}{-\sqrt{z - x - y}} = \frac{dz}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{z=2y-c_1\text{نعوض}} \frac{d(y - x)}{\sqrt{y - x - c_1}} = -\frac{dz}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$2\sqrt{y - x - c_1} = -\frac{1}{2}z + c_2 \Rightarrow \boldsymbol{c_2 = 2\sqrt{y - x - c_1} + \frac{1}{2}z}$$

مثال : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

نحذف أحد الدالتين ومشتقاتها أي نحذف مثلاً $y_2, y_2{}'$ ومنه:

$$\text{من المعادلة الأولى} \Rightarrow y_2 = y_1' - 2y_1 \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} y_2' = y_1'' - 2y_1{}' \xrightarrow{\text{نعوض في الثانية}}$$

$$y_1'' - 2y_1' = y_1 + 2(y_1' - 2y_1) \Rightarrow y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية ومتجانسة ذات أمثال ثابتة نكتب المعادلة المميزة حيث حلها العام يعطى بالشكل : $y = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta\text{بالحل على}} (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

والآن نشتق الحل العام ونوجد y', y'' ونعوض في المعادلة كما درسنا في تفاضلية (1) ومنه:

$$y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^x \;\&\&\; y_2 = y_1' - 2y_1 =$$

$$3c_1e^{3x} + c_2e^x - 2(c_1e^{3x} + c_2e^x) = c_1e^{3x} - c_2e^x$$

فيكون الحل العام للجملة التفاضلية هو:

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^{3x} + c_2e^x \\ y_2 = c_1e^{3x} - c_2e^x \end{cases} \dots\dots\dots (\#)$$

ويحوي الحل على ثابتين كيفيين c_1, c_2 وهو ما يسمى برتبة الجملة.

تمثل المعادلتان $(\#)$ أسرة ذات وسيطين c_1, c_2 من المنحنيات في الفراغ الثلاثي (x, y_1, y_2)

وتسمى المنحنيات التكاملية للجملة.

- نحصل على حل خاص بإعطاء قيم مختلفة للثوابت الكيفية c_1, c_2 ومنه:

$$(c_1, c_2) = (0,1) \Longrightarrow y_1 = e^x \;\&\&\; y_2 = -e^x \xRightarrow{\text{ومنه الحل الخاص}}$$

$$(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) = (\boldsymbol{e^x}, -\boldsymbol{e^x})$$

من الجملة $(\#)$ بعزل الثابتين c_1, c_2 نحصل على :

$$\begin{cases} (y_1 + y_2)e^{-3x} = c_3 \\ (y_1 - y_2)e^{-x} = c_4 \end{cases}$$

يمثلان أسرتين من السطوح التكاملية للجملة المعطاة

انتهت المحاضرة

ملحق حل الوظائف السابقة

حل تمرين في المحاضرة الثالثة :

١)أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(\boldsymbol{x^2-1})\boldsymbol{y''}+\boldsymbol{2x.y'-6y=0}$$

وذلك بجوار النقطة: $\boldsymbol{x=0}$

الحل :

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية من شكل معادلة ليجندر من المرتبة $k=2$

نقسم الطرفين على: (x^2-1)

$$\Rightarrow y''+\underbrace{\frac{2x}{(x^2-1)}}_{p}.y'-\underbrace{\frac{6}{(x^2-1)}}_{q}.y=0$$

إنّ النقطة $\boldsymbol{x_0=0}$ هي نقطة عادية للمعادلة السابقة لأنّ كل من $\boldsymbol{p,q}$ تحليليتان عندها...

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة من الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.(x-x_0)^n\ ,y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.x^n$$

نوجد المشتق الأول والثاني:

$$\Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}n.c_n.x^{n-1}\quad ,\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية الأصلية:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1).c_n.x^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}n.c_n.x^{n-1}-6\sum_{n=0}^{\infty}c_n.x^n=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}n.c_nx^n-6\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

نوحّد القوى: نبدّل كل n بـ: $n+2$ في المتسلسلة الثانية:

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-6\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
$$=0$$

نوحّد الحدود الدنيا:

$$-(2)(1)c_2-(2)(3)c_3x+2c_1x-6c_0-6c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}+2nc_n-6c_n]x^n=0$$

$$\Rightarrow -2c_2-6c_0+(-6c_3-4c_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(2n+n(n-1)-6))c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}]x^n=0$$

بالمطابقة بين الطرفين يكون:

الحد الثابت معدوم:

$$-2c_2-6c_0=0\Rightarrow\ c_2=-3c_0$$

أمثال x معدوم:

$$-6c_3-4c_1=0\Rightarrow\ c_3=-\frac{2}{3}.c_1$$

أمثال x^n معدوم:

$$(2n+n(n-1)-6))c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0$$
$$\Rightarrow (n^2+n-6)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0$$
$$\Rightarrow (n-2)(n+3)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0$$

$$\Rightarrow\ c_{n+2}=\frac{(n-2)(n+3)c_n}{(n+2)(n+1)}\quad ;n\geq 2$$

وهي العلاقة التكرارية، نحسب منها الثوابت c_4 , c_5:

$$n=2\ \Rightarrow c_4=\frac{(0)(5)c_2}{(4)(3)}\Rightarrow c_4=0$$

$$n=3\ \Rightarrow c_5=\frac{(1)(6)c_3}{(5)(4)}=\frac{(1)(6)\left(-\frac{2}{3}c_1\right)}{(5)(4)}\Rightarrow c_5=\frac{-c_1}{5}$$

$$n=4\ \Rightarrow c_6=\frac{(2)(7)c_4}{(6)(5)}=\frac{(2)(7)(0)}{(6)(5)}\Rightarrow c_6=0$$

وهكذا نلاحظ أنّ الثوابت $c_4, c_6, c_8, \ldots$ معدومة.

نعوّض في شكل الحلِّ العام:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

$$y = c_0 + c_1 x - 3c_0 x^2 - \frac{2}{3}c_1 x^3 - \frac{1}{5}c_1 x^5$$

ولمعرفة الحلين الخاصين نكتب الحل العام بالشكل التالي (بإخراج c_0, c_1 عامل مشترك):

$$\Rightarrow y = \underbrace{(1 - 3x^2)}_{\text{حل خاص أول}} c_0 + \underbrace{\left(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right)}_{\text{حل خاص ثاني}} c_1$$

◄حل تمارين المحاضرة ١٣

$$y.\mathfrak{z}.p - x.\mathfrak{z}.q = e^{\mathfrak{z}}$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى، (معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\frac{dx}{\underbrace{y.\mathfrak{z}}_{(1)}} = \frac{dy}{\underbrace{-x.\mathfrak{z}}_{(2)}} = \frac{d\mathfrak{z}}{\underbrace{e^{\mathfrak{z}}}_{(3)}}$$

بأخذ $(1) = (2)$ نجد:

$$\frac{dx}{y.\mathfrak{z}} = \frac{dy}{-x.\mathfrak{z}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Rightarrow -x.dx = y.dy \Rightarrow x.dx + y.dy = 0$$

بالمكاملة يكون:

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1'$$
$$\Rightarrow c_1 = x^2 + y^2 = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(1) = (3)$ نجد:

$$\frac{dx}{y.\mathfrak{z}} = \frac{d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{\mathfrak{z}.d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}}$$

من عبارة c_1 نجد أنَّ:

$$c_1 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; y^2 = c_1 - x^2 \;\Rightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2}$$

بالتعويض يكون:

$$\frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \frac{\mathfrak{z}.d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}} \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \underbrace{\int \mathfrak{z}.e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}}_{I}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = I \ldots (*)$$

حيث لدينا:

$$I = \int \underbrace{\mathfrak{z}}_{u}.\underbrace{e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}}_{dv}$$

نكامل I بالتجزئة:

$$u = \mathfrak{z} \qquad \Rightarrow \; du = d\mathfrak{z}$$
$$dv = e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z} \Rightarrow \; v = -e^{-\mathfrak{z}}$$
$$I = u.v - \int v\,.du = \mathfrak{z}(-e^{-\mathfrak{z}}) + \int e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}$$
$$\Rightarrow I = -e^{-\mathfrak{z}}.\mathfrak{z} - e^{-\mathfrak{z}} + c_2 \;\Rightarrow\; I = -(\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}} + c_2$$

نعوض في $(*)$:

$$\Rightarrow \arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = -(\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}} + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} + (\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}}$$

نعود فنعوض قيمة c_1:

$$\Rightarrow c_2 = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}} = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \Rightarrow \; F(c_1, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F\left(x^2+y^2\,, \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}}\right) = 0$$

$$(y-z)^2 . p + x.z.q = xy$$

الحل: نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئيّة خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{(y-z)^2}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{x.z}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{x.y}}_{(3)}$$

بأخذ $(2) = (3)$ نجد:

$$\frac{dy}{x.z} = \frac{dz}{x.y} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y.dy = z.dz$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c_1' \Rightarrow c_1' = \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$$

$$\Rightarrow c_1 = y^2 - z^2 = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(1) = (2) - (3)$ نجد:

$$\frac{dy - dz}{x(z-y)} = \frac{dx}{(y-z)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-d(y-z)}{x(y-z)} = \frac{dx}{(y-z)^2} \Rightarrow -(y-z).d(y-z) = x.dx$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\frac{(y-z)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_2'$$

$$\Rightarrow (y-z)^2 + x^2 = c_2 = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \Rightarrow F(c_1 , c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F(y^2 - z^2 , (y-z)^2 + x^2) = 0$$

$p.\sin^2 x + q.\tan z = \cos^2 z$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\frac{dx}{\underbrace{\sin^2 x}_{(1)}} = \frac{dy}{\underbrace{\tan z}_{(2)}} = \frac{dz}{\underbrace{\cos^2 z}_{(3)}}$$

بأخذ $(3) = (2)$ نجد:

$$\frac{dy}{\tan z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{\tan z . dz}{\cos^2 z} = \frac{\frac{\sin z}{\cos z} . dz}{\cos^2 z} = \frac{\sin z}{\cos^3 z} . dz = \sin z . \cos^{-3} z . dz$$

$$\Rightarrow \int dy = -\int (-\sin z). \cos^{-3} z . dz$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{(-2)} \cos^{-2} z + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = y - \frac{1}{2} \cos^{-2} z = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(3) = (1)$ نجد:

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$-\cot x = \tan z + c_2'$$

$$\Rightarrow c_2' = -\cot x - \tan z \quad ; c_2' = -c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \tan z + \cot x = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو :

$$F(u,v)=0 \;\Rightarrow\; F(c_1\,,c_2)=0$$

$$\Rightarrow F\left(y-\frac{1}{2}\cos^{-2}z\;,\tan z+\cot x\right)=0$$

$$(y+z).p+(x+z).q=x-y$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{(y+z)}}_{(1)}=\underbrace{\frac{dy}{(x+z)}}_{(2)}=\underbrace{\frac{dz}{(x-y)}}_{(3)}$$

بأخذ $(1)-(2)=(3)$ نجد:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dz}{x-y}\;\Rightarrow -\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{x-y}\;\Rightarrow -d(x-y)=dz$$

$$\Rightarrow d(x-y)+dz=0$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow c_1=x-y+z=u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(1)-(2)=(1)+(3)$ نجد:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx+dz}{x+z}\;\Rightarrow -\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dx+dz}{x+z}\;\Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y}+\frac{d(x+z)}{x+z}=0$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\ln(x-y)+\ln(x+z)=\ln c_2$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+z)=c_2=v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو :

$$F(x-y+z\,,(x-y)(x+z))=0$$

$$2\left(y-x\right)+2p\left(y+z\right)-2q\left(x+z\right)=0$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى، (معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{y+z}}_{(1)}=\underbrace{\frac{dy}{-(x+z)}}_{(2)}=\underbrace{\frac{dz}{x-y}}_{(3)}$$

بأخذ $(1)+(2)+(3)$ نجد:

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z-(x+z)+x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$
$$\Rightarrow dx+dy+dz=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=c_1$$

وهو التكامل الأولي الأول.

والآن بأخذ $(1)+(3)=(2)+(3)$

$$\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{dy+dz}{-z-y}$$
$$\Rightarrow \frac{d(x+z)}{z+x}=\frac{-d(y+z)}{y+z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$ln(x+z)=-ln\, y+z+ln\, c_2$$
$$\Rightarrow ln(x+z)=ln\left(\frac{c_2}{y+z}\right)=ln\, c_2$$
$$\Rightarrow x+z=\frac{c_2}{y+z}$$
$$\Rightarrow c_2=(x+z)(y+z)$$

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو :

$$\Rightarrow \quad F(c_1\,,c_2)=0$$
$$\Rightarrow F(x+y+z\,),(x+z)(y+z))=0$$

$x^2.p + y^2.q = (x+y)z$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى، (معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{y^2}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{(x+y)z}}_{(3)}$$

بأخذ $(1) = (2)$ نجد:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(3) = (2) - (1)$ نجد:

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$
$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)} = \frac{dz}{z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\ln(x-y) = \ln z + \ln c_2$$
$$\Rightarrow \ln(x-y) - \ln z = \ln c_2 \Rightarrow \ln\left(\frac{x-y}{z}\right) = \ln c_2$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{x-y}{z} = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$\boldsymbol{F(u,v)=0 \;\Rightarrow\; F(c_1\,, c_2)=0}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\,,\frac{x-y}{3}\right)=0}$$

تصويب خطأ وارد في المحاضرة ١٦ – الصفحة الثانية هنالك خطأ بالترميز و سنورد التصحيح ضمن إطارات كما يلي :

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=-\frac{dp}{4p(z+px)} \Longrightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{dp}{2p} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln x=-\frac{1}{2}\ln p+\ln\alpha \rightarrow$$

$$\ln x=\ln\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} p=\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{q}{x^2}\,(\alpha^2=\boxed{a}\ \text{باعتبار أن})$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow p=\frac{\boxed{a}}{x^2}}$$

والآن نعوض p في المعادلة (1) ومنه :

$$\left(z+\frac{\boxed{a}}{x^2}x\right)^2-q=0 \Longrightarrow q=\left(z+\frac{\boxed{a}}{x^2}x\right)^2=\left(z+\frac{\boxed{a}}{x}\right)^2$$

نعوض في المعادلة الكلية والتي من الشكل:

$$dz=pdx+qdy \;\Longrightarrow dz=\frac{\boxed{a}}{x^2}dx+\left(z+\frac{\boxed{a}}{x^2}x\right)^2 dy \;\Longrightarrow$$

$$dy=\frac{dz-\frac{a}{x^2}dx}{\left(z+\frac{\boxed{a}}{x^2}x\right)^2}$$

نريد علاقة تجمع بين البسط والمقام ولذلك فاضلنا البسط بحيث:

$$dy = \frac{d\left(z+\frac{a}{x}\right)}{\left(z+\frac{a}{x}\right)^2}$$ البسط عبارة عن مشتق المقام

بالمكاملة نجد :

$$y+b = -\frac{1}{z+\frac{a}{x}} \Rightarrow z+\frac{a}{x} = -\frac{1}{(y+b)} \Rightarrow z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+b} = 0$$ الحل التام

انتهى المقرر... نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم المحتوى العلمي لهذا المقرر بجودة عالية و بشرح كافٍ ☺

و ندعو لكل زملائنا بالتوفيق و النجاح و نتمنى لكم امتحاناً موفقاً و مثمراً ☺

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه