◄ دكتور المادة: جبران جبران

نظري

◄ المحاضرة الثامنة عنوان المحاضرة: تمارين و تطبيقات

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتمرين
٢ـمبرهنة تربط بين لصاقة مجموعة و متممة داخلها
٣ـتمارين

---

**تمرين** :ليكن $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ أثبت أن :

١- $A^{\circ}$ مجموعة مفتوحة

٢- $A^{\circ}$ أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A$

**الحل**:

١- ليكن $x \in A^{\circ}$، فهذا يكافئ أنه يوجد $B_x \in \tau$ بحيث $x \in B_x \subseteq A$ و بالتالي :

$$x \in B_x \subseteq A^{\circ}$$

و بالتالي :

$$\forall x \in A^{\circ} ; \{x\} \subseteq B_x \subseteq A^{\circ}$$

نأخذ اجتماع أطراف هذا الاحتواء و ذلك لكل $x \in A^{\circ}$ :

$$\underbrace{\bigcup_{x \in A^{\circ}} \{x\}}_{A^{\circ}} \subseteq \bigcup_{x \in A^{\circ}} B_x \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in A^{\circ}} A^{\circ}}_{A^{\circ}}$$

مما سبق نجد أن $A^{\circ} = \bigcup_{x \in A^{\circ}} B_x$ و بما أنها كتبت على شكل اجتماع لمجموعات مفتوحة ( $B_x$ تنتمي لـ $\tau$ ) فهي مجموعة مفتوحة .

٢- حسب الطلب السابق وجدنا أن $A^{\circ}$ مفتوحة و نعلم أن $A^{\circ} \subseteq A$ و لنثبت أنه أكبر مجموعة مفتوحة تحوي $A$ ، أي لنثبت أنه **إذا وجدت مجموعة مفتوحة $B \subseteq A$ فإن $B \subseteq A^{\circ}$** :

لتكن $B \in \tau$ مجموعة مفتوحة محتواة في $A$ :

$$\underbrace{\forall x \in B : x \in B \subseteq A \Rightarrow x \in A^{\circ}}_{\text{حسب تعريف داخل مجموعة}}$$

$$\Longrightarrow B \subseteq A^{\circ}$$

إذاً $A^{\circ}$ أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A$.

**مثال :** لتكن $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع تابع المسافة المألوف ( القيمة المطلقة لفرق لعددين) و المطلوب إيجاد $\mathbb{Q}'$ و $\overline{\mathbb{Q}}$ حيث $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية ( النسبية ).

**الحل :**

- لنلاحظ أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0\,;\ \underbrace{]x-r, x+r[}_{N_d(x,r)\ \text{الجوار}} \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow x \in \mathbb{Q}' \Longrightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}'$$

و مما لا شك فيه أن $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ و بالتالي و بسبب الاحتوائين المتعاكسين السابقين نجد $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

- الآن و حسب نص سابق يمكن أن نكتب $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

إذاً $\mathbb{Q}$ كثيفة في$\mathbb{R}$ ((و هذا ما قد نوهنا عليه في المحاضرة السابقة))

**مثال ( يترك للطالب كتمرين) :**

لتكن $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع تابع المسافة المألوف ( القيمة المطلقة لفرق لعددين) و المطلوب إيجاد $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})'$ و $\overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ حيث $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية ( النسبية ).

**مبرهنة :** ليكن $(X, \tau)$ فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ عندئذٍ:

١- $(A^c)^{\circ} = (\bar{A})^c$

٢- $\overline{(A^c)} = (A^{\circ})^c$

**البرهان :** ١- لنثبت أن $(A^c)^{\circ} = (\bar{A})^c$: نعلم أنه إذا كان :

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B \in \tau, x \in B \implies B \cap A \neq \emptyset$$

و هذا يكافئ أنّ:

$$x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists B \in \tau, x \in B \implies B \cap A = \emptyset$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x \in (\bar{A})^c \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \tau, x \in B \subseteq A^c$$

$$x \in (\bar{A})^c \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A^c)^{\circ}$$

٢-لنثبت أن $\overline{(A^c)} = (A^{\circ})^c$:

نعلم أن :

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B \in \tau, x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset$$

و بالتالي يكون :

$$x \in \overline{A^c} \Leftrightarrow \forall B \in \tau , x \in B \Rightarrow B \cap A^c \neq \emptyset$$

و هذا يكافئ: $\Updownarrow$

$$x \in \overline{A^c} \Leftrightarrow \forall B \in \tau , x \in B \Rightarrow B \not\subseteq A$$

$$\Leftrightarrow x \notin A^{\circ} \Leftrightarrow x \in (A^{\circ})^c$$

**تعريف (خارج مجموعة) :** ليكن $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ نعرف خارج المجموعة $A$ و نرمز له بالرمز $ext(A)$ بأنه مجموعة النقاط التي تقع داخل متممة $A$ أي أن :

$$ext(A) = (A^c)^{\circ} = (\bar{A})^c$$

**مثال :** لتكن $X = \mathbb{R}$ مزودة بتابع المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$ ، أوجد $ext(\{1,3,7\})$ و $ext([a,b[)$

**الحل :**

١- $ext(\{1,3,7\}) = \left(\overline{\{1,3,7\}}\right)^c$

أولاً لنوجد $\overline{\{1,3,7\}}$ (لصاقة المجموعة $\{1,3,7\}$ ) و سنعتمد في ذلك على أن :

$$\overline{\{1,3,7\}} = \{1,3,7\} \cup \{1,3,7\}'$$

و ذلك حسب نص سابق فإن اللصاقة لمجموعة هي عبارة عن اجتماع المجموعة مع تراكمها (تجمعها)

و بالتالي سنوجد تجمع (تراكم) هذه المجموعة :

من أجل $x = 1$ فنجد أنها لا تنتمي إلى تراكم المجموعة أي لا تنتمي إلى $\{1,3,7\}'$ وذلك بسبب ما يلي

إذا كان $x \in \{1,3,7\}'$ فهو يحقق أن :

$$\forall r > 0 \, ; \underbrace{N(x,r)}_{]x-r,x+r[} \cap (\{1,3,7\} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

و هذا غير محقق من أجل $x = 1$ ذلك لأنه يوجد $r = 2 > 0$ بحيث :

$$]x-r,x+r[=]1-2,1+2[=]-1,3[$$

و أن : $]-1,3[ \cap (\{1,3,7\} \setminus \{1\}) = \emptyset$

وجد جوار واحد على الأقل لا يحقق الشرط و بالتالي x=1 ليست نقطة تجمع

و بنفس الأسلوب يمكن التحقق أن كل من 3و 7 ليستا نقاط تجمع ، أي أن $\{1,3,7\}' = \emptyset$ و عليه يكون

$$\overline{\{1,3,7\}} = \{1,3,7\} \cup \{1,3,7\}' = \{1,3,7\} \cup \emptyset = \{1,3,7\}$$

و أخيراً يكون :

$$ext(\{1,3,7\}) = \left(\overline{\{1,3,7\}}\right)^c = \{1,3,7\}^c = \mathbb{R} \setminus \{1,3,7\}$$

٢- $ext([a,b[) = \overline{[a,b[}^c$

إن $\overline{[a,b[} = [a,b[ \cup [a,b[' = [a,b] \cup [a,b] = [a,b]$ و بالتالي :

$$ext([a,b[) = \overline{[a,b[}^c = [a,b]^c = \mathbb{R} \setminus [a,b] = ]-\infty,a[ \cup ]b,\infty[$$

تراكم مجال فهو إغلاقُ ذلك المجال، مثلاً

$$]1,\sqrt{2}[' = [1,\sqrt{2}] \quad , \quad ]e,\pi]' = [e,\pi]$$

تمتازُ الطوبولوجيا فضلاً عن الكثير من المواد بالترابط الوثيق والتعدد بطرائق الحل فعلى سبيل المثال لكي نثبت أنَّ مجموعةً ما $F$ مغلقة نبرهن بأحد الأساليب التالية: ١- $F^c$ مفتوحة. أو ٢- $\overline{F} = F$ أو ٣- $F' \subseteq F$

**انتهت المحاضرة**

| | | |
|---|---|---|
| صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/ | مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics | مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧ |

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي