المحاضرة العاشرة: *مقدمة في تكامل استيلجس*

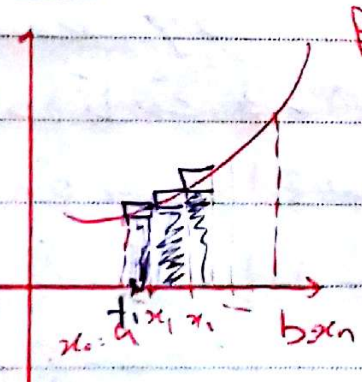
- مراجعة في تكامل ريمان
- تعريف تكامل ريمان.
- مجموع ريمان $(R)\int^b f\,dx$
- ~~تعريف~~
- حساب تكامل ريمان.
- خواص تكامل ريمان.
- شروط وجود تكامل ريمان.

- مقدمة في تكامل استيلجس (تعميم لريمان)
- مجموع استيلجس $(S)\int^b f\,dg$
- تعريف تكامل استيلجس/ملاحظة
- شروط وجود تكامل استيلجس (لوحدها)
- خواص تكامل استيلجس
- حساب تكامل استيلجس
- امثلة وتمرينات.

تكامل ريمان: إذا كانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$ إذا أخذنا P تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $1 \le k \le n$

$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$



//الهدف منها حساب مساحة أو أخفض نقطة وأعطاها مستطيل//

$L(f,P) = f(x_0)(x_1-x_0) + f(x_1)(x_2-x_1)$

العرض   الطول (الارتفاع)   مساحة المستطيلات ، L من low منخفض

$+ \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$

عندما n تقترب من الـ ∞

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\Delta x})$$

// الآن نأخذ المجموع العلوي//

$$U(f,P) = f(x_1)(x_1-x_0) + f(x_2)(x_2-x_1) + \dots + f(x_n)(x_n-x_{n-1})$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$$

// الآن نأخذ نقطة بين x_1, x_2 نسميها t_1 ونعوض $\sum_{k=1}^{n} f(t_1)$ فيكون لدينا //

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k$$

مجموع ريمان

و S محصورة بين L و U.

/ /

• شرط وجود تكامل ريمان: ① - إذا كانت f معرفة ومحدودة على $[a,b]$ ⟺ تكون f قابلة للتكامل إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(U(f,P) - L(f,P) \right) = 0$$

$$L(f,P) \le S(f,P) \le U(f,P)$$

// بالمقارنة نأخذ U //

$\Delta x = \max \Delta x_k$, $1 \le k \le n$

تكون متساوية لما تكون التجزئة منتظمة و n يساوي ∞.

• تعريف تكامل ريمان: إذا كانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$ نقول أن f تكاملية (قابلة للمكاملة) إذا وجد $\exists A \in \mathbb{R}$ بحيث تحقق ما يلي:

// تكامل ريمان هو نهاية المجموع //

$$\lim_{\Delta x \to 0} S(f,P) = A$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = A$$

نرمز فقط بالرمز $(R) \int_a^b f\,dx = A$

تعريف: إذا كانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$ نقول عن f أنها تكاملية على $[a,b]$ إذا تحقق الشرط:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon : P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$

تجزئة   مشتقة من ابسلون

أو باستخدام النظيم.   تجزئة دقيقة تجزئة ابسلون.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \Delta P < \delta_\varepsilon \Rightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$

- جرب بالمثال حسب التعريف (استخدم U)   حسب أن P_ε و P ادت

$$\int_1^3 (x+1)\,dx = 6 \ , \ \int_0^3 x^2\,dx = 9$$

$$\int_1^3 (x^2+1)\,dx = 12$$

الشرط الأول لا يستخدم كثيرا.   بشرح

② الشرط الثاني: إذا كانت f معرفة ومستمرة على $[a,b]$ فإنه f تكاملية على $[a,b]$

// لا نرمز بالصيغة $\int_a^b f\,dx$ ولا نضع أي حدود لم يرسمو التعريف //

خواص: ① $\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

② - $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

اخراج الثابت

③ - $\int_a^b (f \mp g)\,dx = \int_a^b f\,dx \mp \int_a^b g\,dx$

(4)

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

// الفروض هنا أن تكون مستمرة أو
يكون التكامل موجود ، ويمكن بالضرورة إيجاد الدالة الأصلية //

// قام ستيلتجس بجعل التكامل الجديد لا يوجد دوال بفرض أي أن يكون فقط
الـ d دالة نرمز ومنها دالة الجزء الصحيح //

$$\int_a^b f\cdot dg = \int_a^b f\cdot \underline{g'}\,dx$$

وهي ما أدرنا له

بدلاً من كان التكامل في x دائماً موجود

نستطيع التكامل في g

// إذا كانت f, g غير مستمرتان من اليمين واليسار بالنسبة لنقطة فتوجد مشكلة
وهي موجودة إما إذا كانت واحدة مستمرة والثانية لا فيوجد حل لهذه المشكلة /

• مجموع استيلتجس:

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين معرفتين ومحدودتين على $[a,b]$ وكانت P تجزئة
لـ $[a,b]$ ، $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$

نعرف المجموع $S(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta g_k$

مجموع استيلتجس للدالة f بالنسبة لـ g للتجزئة

$t_k\in[x_{k-1},x_k]$

$$\Delta g_k = g(x_k)-g(x_{k-1}) \Rightarrow = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

• تعريف تكامل استيلتجس:

إذا كانت f و g د. ح. م. م على $[a,b]$ وكانت P تجزئة لـ $[a,b]$
نقول إن الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة لـ g إذا وجد $\exists A\in\mathbb{R}$ حيث أن:

$$A=\lim \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta g_k \quad , \Delta x=\max(x_k-x_{k-1})$$

عندما $\Delta x \to 0$ [illegible] $\quad 1\le k\le n$

لكل ε : ($\forall \varepsilon>0,\ \exists P_\varepsilon : P\supset P_\varepsilon$ ناعمة التجزئة

$$|S(P,f,g)-A|<\varepsilon$$

(حسب النظم $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0 ;\ \Delta P<\delta_\varepsilon \Rightarrow |S(P,f,g)-A|<\varepsilon$

نرمز لـ A بـ $(S)\int_a^b f\,dg$.

ملاحظة: ① - إذا كانت $g(x) = x$ فإن التكامل / ريمان

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$. (تكامل / ريمان)

② - إذا $f(x) = 1$ فإن

$$\int_a^b 1 \cdot dy = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta g_k$$

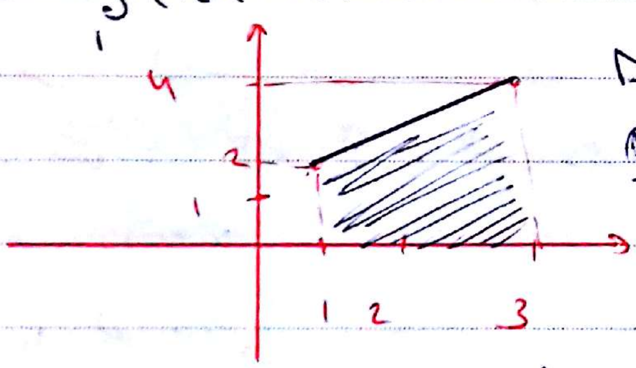
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(g(x_k) - g(x_{k-1}) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(g(x_1) - g(x_0)) + (g(x_2) - g(x_1)) - - \right.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} g(b) - g(a) = g(b) - g(a)$$

// عشان نتكلم عن الخواص بالتالي تكون الشرط موجودة //

أمثلة على تكامل ريمان

$$I = \int_1^3 (x+1)\,dx = 6 \qquad [1, 3] \,,\ f(x) = x + 1.$$



الحل: ناخذ التجزئة المنتظمة $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < - - - < x_n = 3\}$$

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1 + \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) \qquad x_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$- - - \qquad x_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 3$$

$$A = \int_1^3 f \cdot dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

هنا $\Delta x_k = \Delta x$ لأنها منتظمة

بما $\Delta x \to 0$ بالتالي $n \to \infty$ ← مهم

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left\{ f(x_1) + - - - + f(x_n) \right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right) + 1 + 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) + 1 \right.$$
$$\left. + - - - + 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) + 1 \right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[n + n + \frac{2}{n} (1 + 2 + 3 + - - - + n) \right]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left\{ 2n + \frac{2}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ 4 + \frac{2(n)(n+1)}{n^2} \right\} = 4 + 2 = 6$$

المحاضرة الحادية عشر (11): * تكاملات استيلتجس *

1- تعريف تكامل استيلتجس 4- خواص تكامل استيلتجس

2- ملاحظات. 5- حساب تكامل استيلتجس

3- شروط وجود تكامل استيلتجس 6- أمثلة وتطبيقات.

- تعريف التكامل: اذا كانت f و g دالتين معرفتين ومتقيدتين ومحدودتين على $[a,b]$ وإذا كانت P تجزئة لـ $[a,b]$:

$$S(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k$$

حيث:

$$\Delta g_k = g(x_k)-g(x_{k-1}) \quad , x_{k-1}\le t_k \le x_k$$

نقول أن f أنها قابلة للمكاملة بالنسبة لـ g اذا وجد A حيث:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k=\lim_{\Delta x\to 0} S(P,f,g)$$

حيث:

$$\Delta x=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$$

اذا كانت توجد نرمز لـ A

$$A=\int_a^b f\,dg$$

ويسمى تكامل استيلتجس للدالة f على g.

ملاحظة: 1- $g(x)=x$ يتحول تكامل استيلتجس الى تكامل ريمان:

$$(S)\ A=\int_a^b f\,dg=\int_a^b f\,dx\ (R).$$

2- اذا كانت $f(x)=1$ $\Leftarrow$

$$A=\int_a^b dg=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1} g(x_k)-g(x_{k-1})$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_1)-g(a)+g(x_2)-g(x_1)+\cdots+g(b)-g(x_{n-1})\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(b)-g(a)\right]=g(b)-g(a).$$

// رسم تكامل ستيلتجس حسب الاداكانت g قابلة للاشتقاق واعتبرنا انو لدينا دالة اجمد من ترتيب f من مشتقة g مرسوم لها + ستك دالة واحدة //

* شروط وجود تكامل ستيلتجس :

1- اذا كانت الدالة g(x) متزايدة على [a,b] // هذا الشرط مهم جدا لانه تكامل ريمان

فان الشرط اللازم والكافي لوجود تكامل ستيلتجس كانه يقابل g(x) هو x و x

هو ان تحقق الشرط: دالة تزايدية //

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[U(P,f,g) - L(P,f,g) \right] = 0$$

حيث : $U = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \cdot \Delta g(x_k)$ us

$$L = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \cdot \Delta g(x_k)$$

حيث $M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} (f(x))$

$$m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} (f(x))$$

ملاحظة : sup هو اعلى قيمة ممكن ان تأخذها الدالة هو لو لم يصل اليها.

2- اذا كانت g(x) دالة متزايدة على [a,b] وكانت f مستمرة على [a,b] عندئذ تكامل ستيلتجس موجود.

3- g(x) دالة رتيبة على [a,b) وكانت f مستمرة على [a,b] فان تكامل ستيلتجس يكون موجود.

4- اذا كانت g(x) تحقق شرط ليبشتز وكانت f مستمرة على [a,b] فان تكامل ستيلتجس يكون موجود

5- اذا كانت f مستمرة على [a,b] وكانت g'(x) موجودة ومحدودة على [a,b] ومكاملة. فان تكامل ستيلتجس يكون موجودا ويعطى بالعلاقة :

$$(S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f \cdot g' \, dx$$

* خواص تكامل استيلتجس :

1. $\int_a^b 1\,dg = g(b) - g(a)$

2) $\int_a^b \left[f_1(x) \mp f_2(x) \right] dg(x) = \int_a^b f_1(x)\, dg(x) \mp \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$

3) $\int_a^b f(x)\, d\left(g_1(x) \mp g_2(x)\right) = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) \mp \int_a^b f(x) \cdot dg_2(x)$

4) $\int_a^b (\alpha f)\, d(\beta g) = \alpha \cdot \beta \int_a^b f \cdot dg$

5) إذا كان $g(x)$ متزايدة على $[a.b]$ وكان كل من التكاملين: $\int_a^b f \cdot dg$, $\int_a^b h\, dg$ موجودين حيث $f(x) \leq h(x)$ فإن:

$$\int_a^b f\, dg \leq \int_a^b h\, dg.$$

6) إذا كانت $g(x)$ متزايدة على $[a.b]$ وكان $\int_a^b f\, dg$ موجود فإن:

أ) $\int_a^b |f\, dg|$ موجود

ب) $\int_a^b f^2\, dg$ موجود

ج) $\left| \int_a^b f\, dg \right| \leq \int_a^b |f\, dg|$

7) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a.b]$ وكان $\int_a^b f\, dg$ موجود فإن:

$\int_a^c f\, dg$, $\int_c^b f\, dg$ موجودين

حيث $c \in [a.b]$ ويحققان العلاقة:

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^c f\, dg + \int_c^b f\, dg$$

والعكس ليس بالضرورة.

8) إذا كان التكاملان $\int_a^c f \cdot dg$, $\int_c^b f \cdot dg$ موجودين حيث $c \in [a.b]$

وكانت إحدى الدالتين f و g مستمرة عند c والأخرى محدودة في جوار c فعندئذ $\int_a^b f \cdot dg$ موجود ويحقق العلاقة:

$$\int_a^b f \cdot dg = \int_a^c f \cdot dg + \int_c^b f\, dg.$$

_9) ((نظرية التكامل بالتجزئة))

إذا كان أحد التكاملين $\int_a^b f\,dg$ ، $\int_a^b g\,df$ موجوداً فإن الآخر يكون موجود

ويحققان العلاقة:
$$\int_a^b f\,dg+\int_a^b g\,df=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b$$
$$=\left[f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)\right].$$

_10) إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ وكانت g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:
$$\left|\int_a^b f\,dg\right|\le \max_{a\le x\le b}|f(x)|\cdot V_a^b\, g(x)$$

الانفصال

المحاضرة الثانية عشر: * حساب تكامل استيلجس:

// تحولت مشكلة النقاط الشاذة (النقاط الانقطاع) الى قيمة

تكامل // - تكامل استيلجس f ~ g يرتكز للاستمرارية //

• تعريف الدالة الدرجية:

• مبرهنة حساب تكامل استيلجس بالنسبة للدالة الدرجية.

• مبرهنة حساب تكامل استيلجس بالنسبة لـ $g(x)$ حيث $g(x)$ محولة من ريمان.

• تطبيقات.

* تعريف الدالة الدرجية:

اذا كانت $g(x)$ دالة معرفة في المجال المغلق $[a,b]$ وتقبل انقطاعات منتهية من النوع الأول ولتكن $c_1, c_2, \dots, c_n$ حيث $a \le c_1 < c_2 < \dots < c_n \le b$

فاذا كانت $g(x)$ دالة ثابتة في كل مجال مفتوح $]a,c_1[,\ ]c_1,c_2[,\ \dots,\ ]c_n,b[$

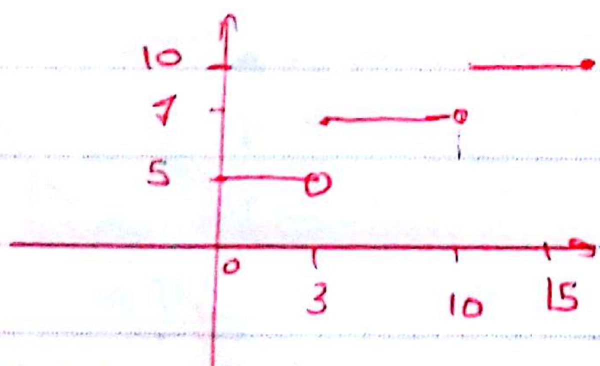
فاننا ندعو $g(x)$ انها دالة درجية.

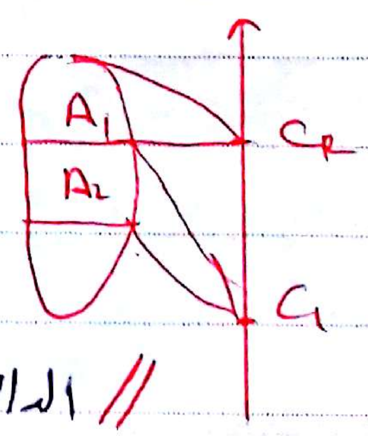
مثال:

$$g(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x < 3 \\ 7 & 3 \le x < 10 \\ 10 & 10 \le x \le 15 \end{cases}$$

$g(x)$ معرفة في $[0,15]$

هناك نقاط الانقطاع $c_1 = 3$, $c_2 = 10$





// الدالة الدرجية هي دالة حيث تكون محدودة غير الدالة محدودة منتهية //

بالمثال هنا 3 نقطة انقطاع من النوع الأول لأنه: $\lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} 7 = 7$

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^-} 5 = 5$

• القفزة عند $x_0 \in]a,b[$: $g(x_0+0) - g(x_0-0)$

• القفزة يمينا عند a : $g(a+0) - g(a)$

• القفزة شمالا عند b : $g(b) - g(b-0)$

مثال لدالة درجية هي الدالة $g(x) = [x]$ (الجزء الصحيح)

/ /

مبرهنة: اذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة في مجال $[a,b]$ وكانت القفزات g_k عند نقاط الانقطاع c_k في حيث $a<c_1<c_2<\dots<c_n<b$ وكانت f معرفة ومحدودة في $[a,b]$ بحيث لا تكون f و g غير مستمرتين معاً عند c_k من اليمين أو من اليسار عندئذ تكامل استيلتجس يعطى بالشكل:

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot g_k$$

وبالحالة العامة إذا كانت a و b نقطتي انقطاع فإن:

$$\int_a^b f\cdot dg = f(a)\{g(a+0)-g(a)\} + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)].$$

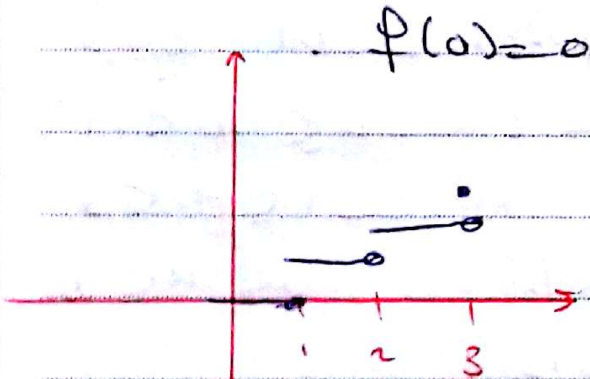
تمرين: احسب تكامل استيلتجس المعطى بالشكل:

الحل:

$$I=(S)\int_0^3 x^2\, d[x]$$

$f(x)=x^2$ معرفة ومحدودة ومستمرة على $[0,3]$ ، $f(0)=0$

$c_1=1 \quad c_2=2 \quad c_3=3$



هنا نقاط البداية والنهاية ليست نقاط انقطاع (a لها نقطة انقطاع) بالتالي:

$$= f(1)g_1 + f(2)g_2 + f(3)g_3 = g_1+4g_2+9g_3$$

$$g_1 = \lim_{x\to 1^+}[x] - \lim_{x\to 1^-}[x] = 1-0 = 1$$

$$g_2 = \lim_{x\to 2^+}[x] - \lim_{x\to 2^-}[x] = 2-1 = 1$$

$$g_3 = g(3) - \lim_{x\to 3^-} g(3-0) = 3-2 = 1$$

لعدم وجود جوار من اليمين.

ملاحظة الدالة

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ 3 & x=3 \end{cases}$$

(دالة الجزء الصحيح) القفزات متساوية تشكل نقاط الانقطاع.

// القفزات موجبة لها طول //

بالتالي التكامل $= 1+4+9 = 14$

/ /

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ قطعياً ذات انقطاعات منتهية من النوع الأول وقابلة للاشتقاق في المجالات الجزئية التالية:

$]a,c_1[,\ ]c_1,c_2[, \dots]c_n,b[$: c_k نقاط الانقطاع

حيث: $a<c_1<\dots<c_n<b$

وكانت $g'(x)$ قابلة للتكامل حسب ريمان على $[a,b]$ عندئذ تكامل استيلتجس يكون موجود ومعطى بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f\,g'\,dx + f(a)\{g(a+0)-g(a)\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\{g(c_k+0)-g(c_k-0)\} + f(b)\{g(b)-g(b-0)\}$$

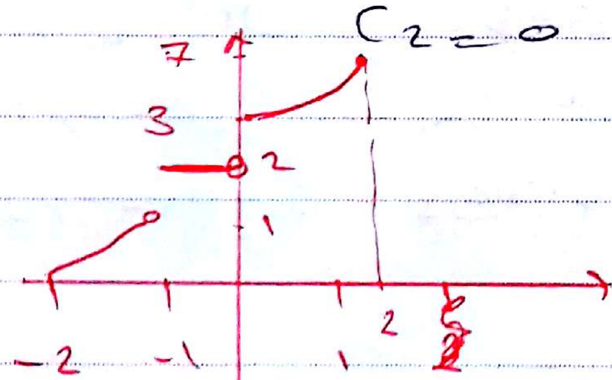
إذا كانت f غير مستمرة أو تملك نقاط انقطاع في جزء التكامل نأخذ ازالتها.

مثال: احسب التكامل: $I=\int_{-2}^{2} x^2\,dg$

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x<-1 \\ 2 & -1\le x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

نرسمه: الدالة ليست درجية.

$c_1=-1 \qquad c_2=0$



$f(x)=x^2$ مستمرة على الجزء a إلى b

نحسب جزئياً g':

$$I=S\int_{-2}^{2} f\,dg=\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_{-1}^{0}0\,dx+\int_{0}^{2}2x^3dx$$

$$+f(-1)\{g(-1+0)-g(-1-0)\}+f(0)\{g(0+0)-g(0-0)\}$$

$$=\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_{-2}^{-1}+0+\left\{\frac{x^4}{2}\right\}_{0}^{2}+(1)(2-1)+(0)(3-2)$$

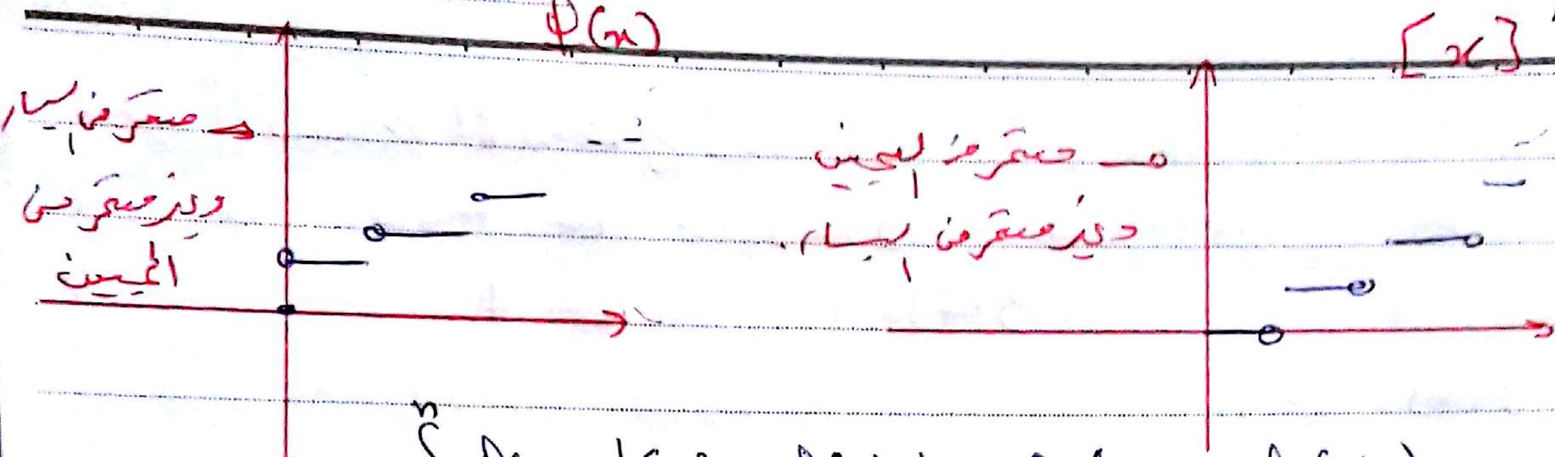
$$=\left(\frac{-1}{3}+\frac{8}{3}\right)+\left(\frac{16}{2}\right)+1=\frac{-1}{3}+8+1=\frac{34}{3}$$

مثال: برهن أن:

$$\int_0^n f(x)\,d[x]=\sum_{k=1}^{n}a_k \ ,\quad f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ a_k & x\in\,]k-1,k]\end{cases}$$

$a_1, a_2 \dots$

$$[x]=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\\ 3 & 3\le x<4\\ \vdots & \vdots \\ & x=n\end{cases}$$



لدينا التراكيب:

$c_1 = 1$

$c_2 = 2$

$c_3 = 3$

$$\int_0^n f(x)\,d[x] = f(1)g_1 + f(2)(g_2) + f(3)(g_3) + \dots + f(n)\,g_n$$

بما أن $g(n) = [x] \Leftarrow g_k = 1$ مستمرة عند كل القفزات.

$$= f(1) + f(2) + \dots + f(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

المحاضرة الثالثة عشر: * تكامل استيلجس *

المفهوم الهندسي لتكامل استيلجس:

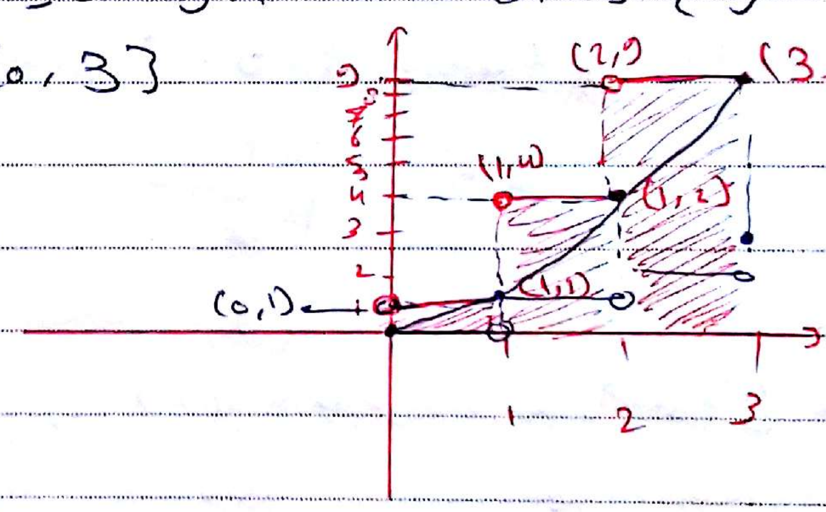
لنفرض أنه لدينا تابع معرف وسيطياً $y = f(t)$ ، $x = g(t)$ حيث $f(t)$ مستمر على $[a,b]$ و $g(t)$ متزايد على $[a,b]$ توضيح ذلك:

$y(t) = t^2$ ، $t \in [0,3]$

$x(t) = [t]$

$c_1 = 1$ $c_2 = 2$ نقاط الانقطاع

$c_3 = 3$



$$I = \int_0^3 x^2\,d[x]$$

$$= (1)^2[g(1+0) - g(1-0)] + (2)^2[g(2+0) - g(2-0)] + (3)^2[g(3) - g(3-0)]$$

$$= 1 + 4 + 9 = 14$$

(من التجزئة)

$$\underbrace{\int_0^3 x^2\,d[x]}_{I} + \int_0^3 [x]\,d(x^2) = \left[x^2 . [x]\right]_0^3$$

$$\Rightarrow \int_0^3 [x]\,d(x^2) = 27 - 14 = 13$$

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 0\,dx^2 + \int_1^2 1\,d(x^2) + \int_2^3 2\,d(x^2)$$

بحالة التكامل بالمشتقة فوراً

$$= \int_1^2 2x\,dx + \int_2^3 4x\,dx = [x^2]_1^2 + 2[x^2]_2^3 = 13$$

لنبدأ بنقاط الانقطاع:

1- عند $t=0 \Leftarrow y(t)=0 \,,\, x(t)=0$

2- $t=1 \Leftarrow y(t)=1$

$g(x)=[x]$

$g(1+0)=1 \qquad (1,1)$

$g(1-0)=0 \qquad (0,1)$

3- $t=2 \Leftarrow y(2)=4$

$g(x)=[x] \qquad g(2+0)=2 \qquad (2,4)$

$g(2-0)=1 \qquad (1,4)$

4 $t=3 \Leftarrow g(3)=9$

$g(x)=[x] \qquad g(3+0)=3 \qquad (3,9)$

$g(3-0)=2 \qquad (2,9)$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & 0<x\le 1 \\ 4 & 1<x\le 2 \\ 9 & 2<x\le 3 \end{cases}$$

//أخذنا شكل قطع مستقيمة بسبب أن g درجية وفرضنا أن النقاط كأنه بخانات موضع تابعة //

أمثلة:

1) $I=\int_0^2 x^2\, d(\ln(x+1)) = \ln 3$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d(\sin x) = \frac{\pi}{2}-1$

3)- $I=\int_{-1}^{1} x\, d(\arctan x) = 0$

4) $\int_{-1}^{3} x\, dg(x) = 6 \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<2 \\ x+3 & 2<x\le 3 \end{cases}$

2- نرسم g(x) لنحدد نقاط الانقطاع //

/ /

5) $I = \int_0^2 x^2 \, dg(x) = -\frac{17}{4}$; $g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 2 & x = \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$

6) $I = \int_0^1 x \, d\left(\ln(x^2+1)\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

* مذكرة الحل لبعض التمارين :

1) $g(x) = \ln(x+1)$, $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ (معرفة على $[0,2]$)

$I = \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} \, dx$ انضيف ونطرح واحد

$= \int_0^2 \left[(x-1) + \frac{1}{x+1} \right] dx$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$ (نستخدم تجزئة)

3) $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1} \, dx = 0$ (الدالة فردية وحدود التكامل متناظرة بالتالي صفر)

Scanned by CamScanner