تابع قابل للاشتقاق

التابع الممثل بسلسلة قوى:

ليكن $\sum a_n (z-z_0)^n$ * سلسلة قوى عقدية وليكن r نصف قطر تقاربها حيث $0 < r \le \infty$ استثنينا حالة التقارب عند النقطة فقط (عندما $r=0$) عندئذ نسمي التابع المعرف على $D(z_0, r)$ بالمساواة $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ التابع الممثل بسلسلة القوى * $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ تكون متقاربة عندما نعطي z قيمة من قرص التقارب

مثال: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ معرفة على $D(0,1)$ وهو قرص التقارب للسلسلة حيث أنها هندسية أساسها z وتكون متقاربة عندما $|z| < 1$ ومجموعها $S_n = \frac{1}{1-z}$

سؤال: هل $g(z) = \frac{1}{1-z}$ مساوٍ لـ f ؟

لا ، لأن منطلق g هو $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ أما منطلق f هو $D(0,1)$ ومنه $f \ne g$ على الرغم من أن التابعين لهما نفس قاعدة الربط

جميع التوابع بينها قاعدة الربط بين المنطلق

مثال: إن $\ln x$ معرف على $]0, +\infty[$ لكن مشتقه $\frac{1}{x}$ معرف على $\mathbb{R}^*$

إذا سؤالنا عن مجموعة تعريف متسلسلة

أي تنتمي إلى قرص التقارب ولكن بدون محيط القرص (لا يتم التقارب على محيط القرص)

مبرهنة: إن التابع الممثل بسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ تابع قابل للاشتقاق (تحليلي) على قرص التقارب المتسلسلة (في الحالة العادية قابلية الاشتقاق لا يؤدي إلى التحليلية إلا إذا كانت مجموعة مفتوحة لكن قابلية الاشتقاق تكافئ التحليلي التحليلي عند نقطة أي أنه قابل للاشتقاق عند كل نقطة من جوار تلك النقطة)

وإن مشتقه f' هو التابع الممثل بالمتسلسلة المشتقة لـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ أي
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$
وإن نصف قطر التقارب للمتسلسلة المشتقة هو نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة الأصلية (أي لهما نفس قرص التقارب)

مثال: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تحليلي على $D(0,1)$ وإن
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$
$$\forall z \in D(0,1)$$

نتيجة: إذا كان f ممثل بسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ فإن f قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات وإن
$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$
$\forall n \geq 0$ **ملاحظة:** نصطلح أن $f^{(0)} = f$

Subject: Date: / /

سنثبت فيما بعد أن التابع العقدي قابل للاشتقاق مرة واحدة على مجموعة مفتوحة يكون قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات وهذا ما يميزه عن التابع الحقيقي الذي إذا كان قابل للاشتقاق مرة على مجموعة مفتوحة فقد لا يكون قابل للاشتقاق مرة ثانية وأكثر من ذلك قد يكون مشتقه غير تحليلي على مجموعة مفتوحة

نتيجة: إن متسلسلة القوى الممثلة للتابع وحيدة، وما يثبت ذلك العلاقة $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ *

يتم الإثبات من خلال فرض وجود متسلسلتي قوى لتابع ما

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

وحسب العلاقة * $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=b_n$

ومنه المتسلسلتين متطابقتين ومنه متسلسلة القوى الممثلة للتابع وحيدة ∎

التابع الأسي العقدي:

نعلم أن $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق على $\mathbb{C}$ (سهل إثبات ذلك حسب دالمبير أو كوشي)

نسمي التابع الممثل بهذه المتسلسلة بالتابع الأسي العقدي ونرمز له $Exp(z)$ أو e^z

$$e^z:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\ ;\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

سؤال دورة 2013: عرف التابع الأسي:

يجب إثبات أن نصف قطر التقارب هو ∞

كثير الحدود هو مجموع منتهي من القوى لا يحوي لا تابع أسي ولا مثلثي

خواص التابع الأسي العقدي:

① e^z تحليلي على $\mathbb{C}$ وإن

$$(e^z)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

لا نكتب $n=0$ لأنه لا يمكن كتابة $(0-1)!$

لأن $(-1)!$ غير معرفة نستبدل كل $n-1$ بـ n

$$\Rightarrow (e^z)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$$

مشابه لمشتق التابع الحقيقي

ملاحظة: ليكن $e^{g(z)}$ مجموعة تحليلية هنا التابع هي مجموعة تحليلية لـ $g(z)$ وإن

$$(e^{g(z)})'=g'(z)\,e^{g(z)}$$

وتشبه صيغة التركيب في العقدي

$f(z)=e^z$ و $g(z)$ $\Rightarrow g\circ f=e^{g(z)}$

مثال: $(e^{\frac{1}{z}})'=(\frac{1}{z})'e^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}$

② إن e^z هو الممدد التحليلي لـ e^x إلى $\mathbb{C}$

وذلك لأن $e^z|_{\mathbb{R}}=e^x$ لأنه تحليلي على $\mathbb{C}$

* المقصور: هو تابع معرف على مجموعة وأخذنا مجموعة جزئية ونعرف عليها نفس التابع نسمي تابع جديد مقصور التابع الأصلي

أما الممدد هو عكس المقصور

الممدد: هو تابع معرف على مجموعة ما نوسع تلك مجموعة ونعرف عليها نفس التابع نسمي التابع الجديد الممدد

مثال: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ معرف على $\mathbb{R}^*$ والممدد

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & : x\neq 0\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

معرف على $\mathbb{R}$ ومستمر وتحليلي

انتهت المحاضرة الأولى

محاضرة ثانية

التابع الأسي المعقد:

خواص:

(3) $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

تم اثبات هذه الخاصة في العقدي (1)

ومطلوب اثباتها في العقدي (2)

(4) الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للتابع e^z

ولكن $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=1+iy-\frac{y^2}{2}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\dots$$

(لأن السلسلة متقاربة يمكننا تبديل عدد غير منتهي من الحدود)

في العقدي (1) استخدمنا الرمز $cis\,\theta$ لـ $e^{i\theta}$ دون برهان منشأ الآن هل $e^{i\theta}$ تساوي $cis\,\theta$

$$\sin\theta=x-\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$\cos\theta=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$e^{-ix}=1-ix+\frac{x^2}{2!}-\dots$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots\right)$$

$$=\cos y+i\sin y$$

$$\Rightarrow e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$e^z=\underbrace{e^x\cos y}_{\text{قسم حقيقي}}+i\underbrace{e^x\sin y}_{\text{قسم تخيلي}}$$

تمرين: اثبت أن e^z تحليلي باستخدام معادلتي كوشي ريمن وأوجد مشتقة باستخدام الجزئين الحقيقي والتخيلي لـ e^z

لنحل الدكتور هذا التمرين:

شرط الأول أن الجزء الحقيقي والتخيلي قابلان للاشتقاق التام أما الشرط الثاني أن u و v يحققان معادلتي كوشي ريمن وهما $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ والصيغة المشتقة هي $f'=u_x+iv_x$

(5) من الخاصة السابقة

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\Rightarrow |e^z|=e^x$

وذلك لأن $|e^{i\theta}|=1$ الآن θ

$\arg e^z=y$ و y هي قياس زاوية

لم نكتب $y+2\pi k$ لأن $y\in\mathbb{R}$ وليس $y\in[0,2\pi]$ وعلى ما سبق نجد

$$|e^{g(z)}|=e^{\mathrm{Re}\,g(z)}$$

$$\arg e^{g(z)}=\mathrm{Im}\,g(z)$$

(6) التابع الأسي الحقيقي هو تابع متباين ومتزايد تماماً

نعلم أن المطرد تماماً هو متباين أي متزايد تماماً هو متباين ومتناقص تماماً هو متباين

لكن التابع الأسي العقدي هو تابع دوري ودوره الأساسي $2\pi i$ (أصغر دور موجب نسميه الدور) مثل $\cos\theta$ دوره 2π

$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+i2\pi} = \cancel{e^x(\cos y + i\sin y)}$

$e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi))$

$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z \ \forall z\in\mathbb{C}$

ملاحظة هامة:

أي تابع أسي عقدي ليس متباين وذلك لأنه دوري وبالتالي ليس تقابل وليس له تابع عكسي

حل معادلة أسية

$e^z = a ; a\in\mathbb{C}$

نميز حالتين (1) $a=0$ المعادلة مستحيلة

لأن $0<e^x \ \forall x \Rightarrow 0<|e^z|$

(2) $a\neq 0$: $e^z = a \Leftrightarrow e^x e^{iy} = |a| e^{i\operatorname{Arg} a}$

$\Leftrightarrow e^x = |a| \vee y = \operatorname{Arg} a + 2\pi k$

وهو معرف لأن $a\neq 0$ $\Rightarrow x = \ln|a|$

$\Rightarrow z = \ln|a| + i(\operatorname{Arg} a + 2\pi k)$

وهي مجموعة الحلول $; k\in\mathbb{Z}$

يوجد عدد غير منتهي من الحلول

ملاحظة: $e^z = e^{z_0} \Rightarrow$

$z = z_0 + 2\pi i k$

أمثلة:

$e^z = -1$

إن $e^x = -1$ مستحيلة في $\mathbb{R}$

$\Rightarrow e^z = e^{i\pi}$

$z = i\pi + 2\pi i k = i\pi(1+2k)$

مثال 2: عين مجموعة تحليلية التابع

$f(z) = \frac{1}{e^{2z}-1-i}$ ليس كثير حدود وإنما نسبة تابعين

إن مجموعة تحليلية التابع هي مجموعة تحليلية البسط تقاطع مجموعة تحليلية المقام

إن البسط تحليلي على $\mathbb{C}$ ومنه مجموعة هي

$\mathbb{C}\setminus\{z : e^{2z}-1-i=0\}$

$e^{2z}-1-i=0 \Rightarrow e^{2z}=1+i$

$\Rightarrow e^{2x+i2y} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow e^{2x}=\sqrt{2} \Rightarrow 2x = \ln\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}\ln 2$

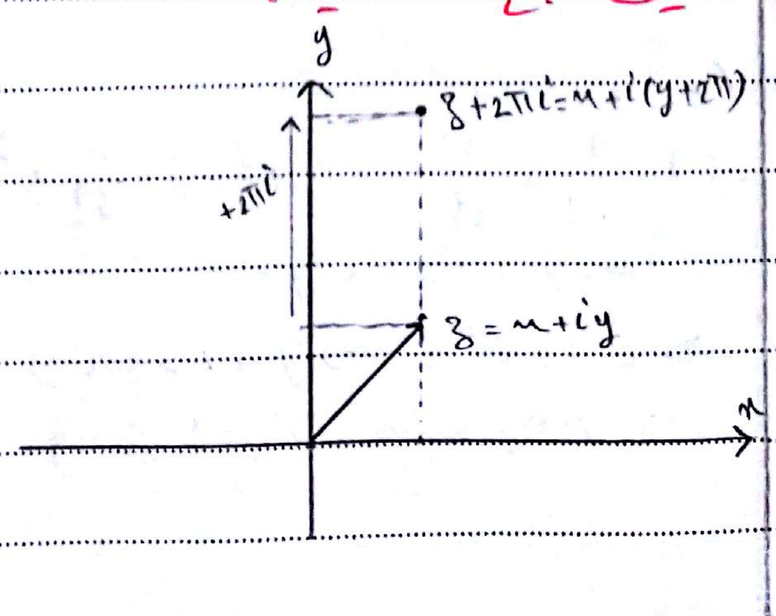
$2y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ لا نأخذ i لأن هنا تابع حقيقي

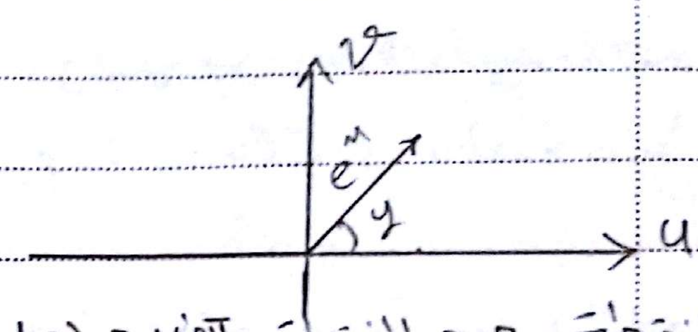
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{8} + \pi k ; k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة تحليلية التابع هي

$\mathbb{C}\setminus\{z = \frac{1}{4}\ln 2 + i(\frac{\pi}{8}+\pi k) ; k\in\mathbb{Z}\}$

تمثيل تابع الأسي:



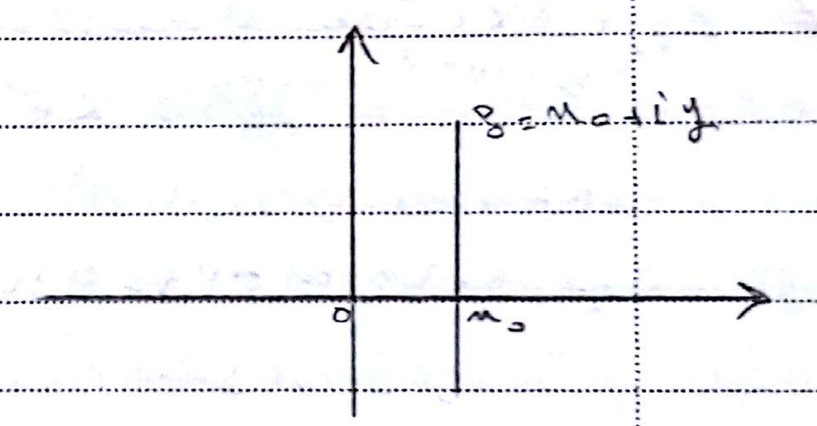


إن النقطة z و النقطة $z+2i\pi$ لهما نفس النقطة الممثلة على المستوي العقدي

ما هي صورة المستوي العقدي وفق $w = e^z = e^x . e^{iy}$

التمثيل لأي تابع عقدي مطلوب ..

ليكن $z = x_0 + iy$



عندما y تتحرك على المجال $]-\infty, +\infty[$ فإن المستقيم سوف يمسح المستوي $\mathbb{C}$

وبالتالي فإن صورة المستقيم ستمسح المستوي

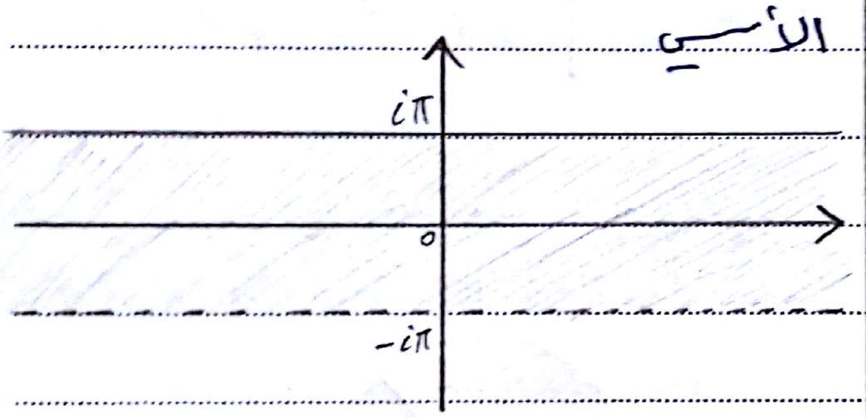
لتعيين صور المستقيم

ملاحظة: إذا كان عندي نقطتين على المستقيم و البعد بينهما مضاعف لـ 2π فإن النقطتين لهما نفس التمثيل

لو أخذت صورة قطعة مستقيمة محمولة على $d(x_0)$ طولها 2π بدون أحد طرفيها أكون بذلك عينت جميع نقاطها

المستقيم سنكتفي بطرف واحد لأن صورة الطرفين هي النقطة ذاتها

القطعة المستقيمة التي تمسح شريطاً أفقياً المعرفة صورة مستوي كاملاً لأن أعطي صورة شريط أفقي عرضه 2π دون أحد حافتيه وهو الشريط الرئيسي أو شريط الدور الرئيسي للتابع الأسي



طويلة أي نقطة من القطعة المستقيمة هي e^{x_0} لأن نقاط القطعة المستقيمة تقع على محيط دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها e^x.

انتهت المحاضرة الثانية.

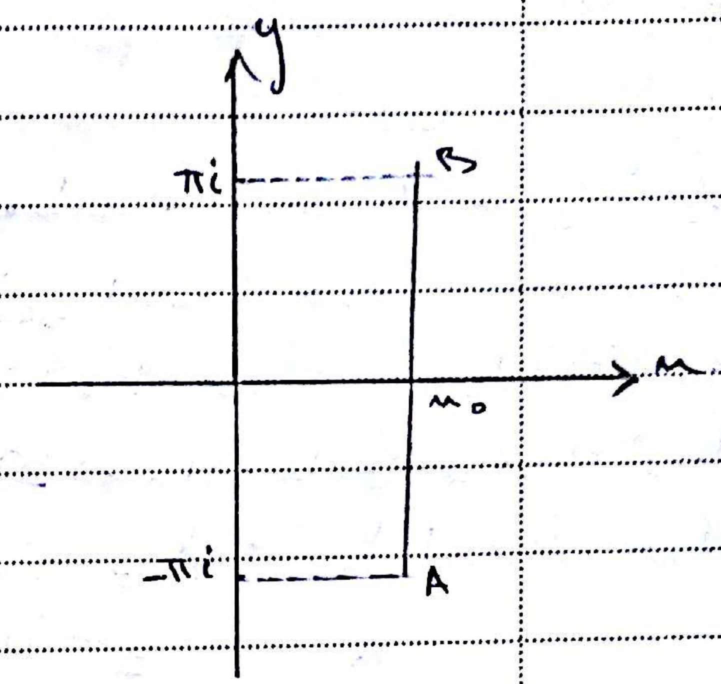
المحاضرة الثالثة:

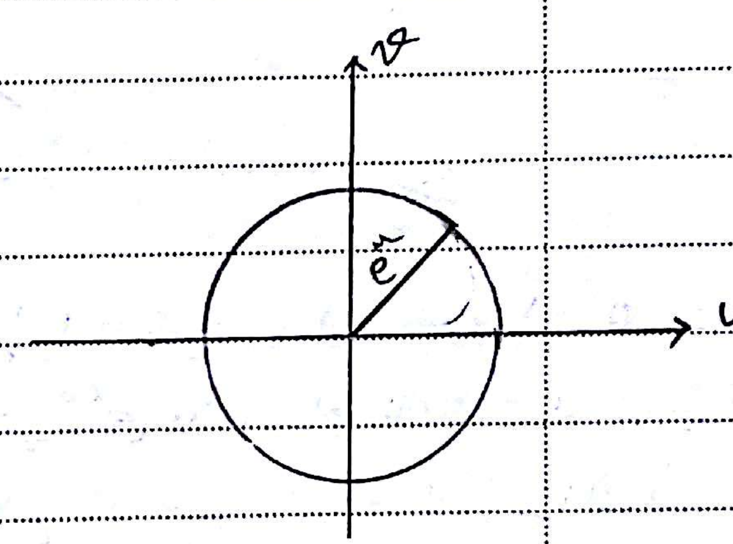
تمثيل التابع العقدي الأسي e^z

تمرين: عين صورة القطعة المستقيمة التي معادلتها في المستوي العقدي $Z = x_0 + iy$ حيث x_0 ثابت حقيقي كيفي و $y \in]-\pi, +\pi]$

الحل:

Subject: Date: / /





المطلوب صورة نقطة مستقيمة
نأخذ نقطة كيفية من القطعة المعطاة
عندئذ $Z \in]A,B]$ ، $Z = x_0 + iy$
$|e^Z| = e^{x_0}$, $y \in]-\pi,+\pi]$
إذ يبعد e^z عن المبدأ e^{x_0} وبالتالي فإن
e^z تقع على دائرة مركزها المبدأ O
نصف قطرها e^{x_0} : $C(0,e^{x_0})$
لكن لدينا حالة احتمالات
$\arg(e^Z) = y$

لأن y تقع بين $]-\pi,\pi]$ فإن e^z تمسح
الدائرة $C(0,e^{x_0})$ مرة واحدة فقط

تمرين: عين صورة المستقيم الشاقولي
في المستوي العقدي الذي معادلته
$L = Z = x_0 + iy \;;\; y \in]-\infty,+\infty[$
الحل: سنأخذ نقطة اختيارية من المستقيم
$Z = x_0 + iy$ عندئذ يوجد $Z_B = x_0 + Bi$
$; B \in]-\pi,+\pi]$
من النقطة المستقيمة $Z = Z_B + 2\pi k i$
$e^z = e^{z_B + 2\pi k i} = e^{z_B}$ $k \in \mathbb{Z}$
لأن e^z تابع دوري دوره $2\pi i$
وبالتالي e^z ; $y \in]-\infty,+\infty[$ لها نفس الصورة
تتبع e^z حيث $y \in]-\pi,\pi]$

نتيجة: لمعرفة صورة القطعة المستقيمة
$[A,B]$ المحمولة على D_{x_0} كافي لمعرفة صور
جميع نقاط المستقيم
وبالاستفادة من النتيجة السابقة
صورة المستقيم D_{x_0} هي الدائرة $C(0,e^{x_0})$
مسحوبة عدد غير منتهي من المرات

تمرين: ما هي صورة المستوي C وفق e^z
بالملاحظة أن $C = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}} D_{x_0}$

المستوي هو اجتماع لكافة المستقيمات
الشاقولية وبالتالي فإن صورة المستوي
C هي اجتماع صور D_{m_0}
$\bigcup_{m_0\in\mathbb{R}} C(o, e^{m_0})$
إذا سعى e^{m_0} إلى ∞ فإن الصورة ستكون
دائرة مركزها المبدأ نصف قطرها e^{m_0}
وبالتالي صورة $\mathbb{C}$ وفق e^{z} هي $\mathbb{C}^*$

ملاحظة هامة:
معرفة صورة مستوي يكفي معرفة صورة
مستقيم شاقولي
أما لمعرفة صورة مستقيم يكفي معرفة صورة
قطعة مستقيمة منه طولها 2π دون
أحد طرفيه وبالتالي إذا عرفنا صورة
شريط أفقي عرضه 2π دون أحد
حافتيه نكون قد عرفنا صورة مستوي
بأكمله

صورة شريط:
إن صورة شريط أفقي عرضه 2π دون
إحدى حافتيه سوف تغطي $\mathbb{C}^*$ مرة
واحدة فقط وليكن هو S_π
$S_\pi = \{Z\in\mathbb{C} ; Z = m_0 + iy : m_0\in\mathbb{R} \wedge y\in]-\pi, +\pi]\}$
إذا كانت $m_0 = 0$ أي القطعة AB
محولة على oy وصورة هذه القطعة
المستقيمة في هذه الحالة هي $C(0,1)$
دائرة الواحدة مغطاة مرة واحدة
ثم نأخذ قطعة مستقيمة على يمين المحور
oy أي $m_0>0$ فإن $e^{m_0}>1$ وصورة
[AB] دائرة تحوي بداخلها دائرة الواحدة
$C(o, e^{m_0})$ إذا جعلنا x تسعى إلى ∞ فإن
القطعة المستقيمة تسعى بالاتجاه ∞ في شريط
وبالتالي e^{m_0} تسعى إلى ∞ وبالتالي e^{z}
تابع حتى نصوره خارج دائرة الواحدة
أما إذا أخذنا $m_0<0$ فإن $e^{m_0}<1$ وصورة
ستكون موجودة داخل دائرة الواحدة
مغطاة مرة واحدة ومنه فإن صورة
كامل الشريط هو $\mathbb{C}^*$ حيث يسار
محور الأعداد التخيلية (عيناته) داخل دائرة الواحدة ويمين
محور العينات هو خارج دائرة الواحدة
والمحور هو دائرة الواحدة مغطاة مرة
واحدة

مثال: $S = y =]-\pi,\pi]$, $x =]-3,3]$
إذا جعلنا القطعة المستقيمة تسعى باتجاه
$-\infty$ في الشريط فإن e^{m_0} ستسعى إلى الصفر
بالنتيجة فإن الصورة الجانب الأيسر من
الشريط الواقع على يسار oy هو داخل
دائرة الواحدة باستثناء المبدأ محذوف

Subject: Date: / /

مرة واحدة

وبالتالي صورة كامل الشريط هي $\mathbb{C}^*$

ممسوحة مرة واحدة

مثال: صورة المربع

$x =]-3,3]$ و $y = [-\pi,\pi]$

هي حلقة

تستطيل صور الركن صورته المتممة

الأولى دائرة، و القطعة الثابتة دائرة و

إذا أضفنا الحلقات الذي تحت سوف

نحذف الصور و الكلمة كل حلقة

باستثناء الحلقة التي على طول $x = a$

انتهت المحاضرة الثالثة

تمرين: عين صورة المستقيم وفق التابع

e^z ; $z = x + iy_0$

; $x \in]-\infty, +\infty[$

$\arg z = y_0$

محاضرة رابعة

التابع اللوغاريتمي العقدي

نقول عن عدد العقدي w أنه لوغاريتم

لعدد عقدي غير معدوم z إذا $e^w = z$

أي $w = \ln z$

لماذا استثنينا الصفر؟

لأن في المحاضرة السابقة أوضحنا أنه لا يوجد

w يحقق $e^w = 0$

• إذا $e^w = z$ عدد غير منتهٍ من الحلول

وبالتالي يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول

لـ $w = \log z$

• إذا كانت w لوغاريتماً لـ z فإن

$w + 2\pi i k$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) هي لوغاريتمات

لـ z $\quad e^{w+2\pi i k} = e^w = z$

• إذا كانت $z = re^{i\theta}$ (هي θ

قياسات زاوية z و $r = |z|$)

$\Rightarrow \log z = w \Leftrightarrow u + iv$

$w = \log \Rightarrow e^w = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} = re^{i\theta}$

$\Rightarrow e^u = r \wedge v = \theta + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$

$w = \log z = \ln r + i(\theta + 2\pi k) ; k \in \mathbb{Z}$

$w = \log z = \ln r + i(\arg z)$

ومنه لكل k يقابله قيمة للوغاريتم

إذا كانت $\theta = \mathrm{Arg}\, z$ (قيمة الرئيسية

لزاوية z) فإن قيمة اللوغاريتم لـ z

الموافقة لـ $k = 0$ هي

$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

نسمي هذه القيمة بالقيمة الرئيسية لقيمة

$\log z$ ونرمز لها بـ $\mathrm{Log}\, z$

مثال: ما هي قيم $\log(1+i)$

الحل: $|1+i| = \sqrt{2}$

$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$; $k \in \mathbb{Z}$

$\log(1+i) = \begin{cases} Log\, z = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} ; & k=0 \\ \log z = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi) ; & k=1 \\ \log = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} - 2\pi) ; & k=-1 \\ \vdots \end{cases}$

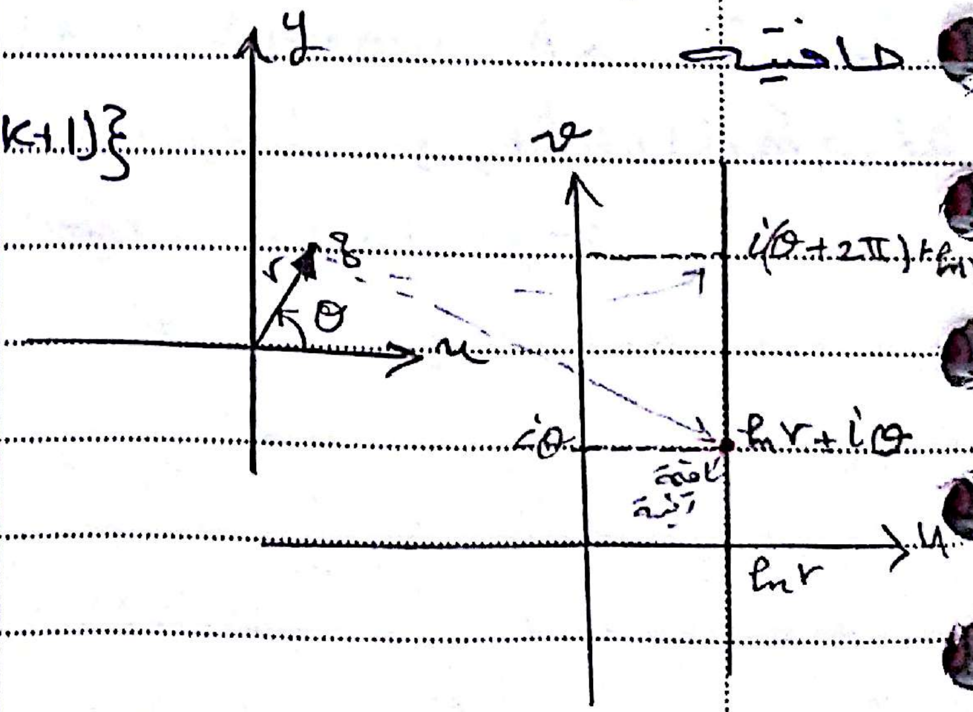
ملاحظة: أين تقع لوغاريتمات العدد z

نلاحظ أن الطويلة لا تتغير (الجزء الحقيقي) دون يتغير هو الجزء التخيلي، إن جميع قيم لوغاريتم z تقع على مستقيم شاقولي

$u = \ln|z| = \ln r$

كما أن الفرق (وليس البعد) بين أي قيمتين من $\log z$ سيكون مساوياً لعدد صحيح $2\pi i$ وبالتالي البعد بين أي قيمتين على الأقل هو 2π

نتيجة: لـ $\log z$ قيمة وحيدة في أي شريط أفقي عرضه 2π دون أحد حافتيه



تعريف: نسمي العلاقة التي تربط كل عدد عقدي غير معدوم z بلوغاريتماته نسمي ($\log z$) تابعاً لوغاريتمياً عقدياً ونرمز له بـ log أي:

$\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto w = \log z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$

حيث θ هي أحد قياسات زاوية z

ملاحظة: إن log ليس تابع وحيد القيمة وإنما تابع متعدد القيم بل هو لا نهائي القيم

كما أن هذا التابع سيكون وحيد القيمة في أي شريط أفقي عرضه 2π دون إحدى حافتيه

فروع التابع اللوغاريتمي العقدي

ليكن α عدد حقيقي كيفي و k عدد صحيح كيفي ولنأخذ المجموعة

$S_{\alpha k} = \{ w \in \mathbb{C} ; \alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \alpha + 2\pi(k+1) \}$

هو شريط أفقي بدون حافتيه (مفتوح) وذلك لتعريف توابع التحليلية عرضه 2π

وإن $S_{\alpha k}$ مجموعة غير محدودة

ملاحظة: α ثابتة أي أن لا قيمة واحدة لا تتغير إنما α مثبتة أي أن لها قيمة في لحظة ما (تثبيت آني)

• إن تابع اللوغاريتمي سيكون وحيد القيمة في كل شريط $S_{\alpha k}$

$$f_{\alpha k}: \mathbb{C}^* \longrightarrow S_{\alpha k} \cup \{Im\,\omega = \alpha + 2\pi(k+1)\}$$

$$f_{\alpha k}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k) \; ; \quad \alpha < \theta \le \alpha + 2\pi$$

إن تابع $f_{\alpha k}$ وحيد القيمة (وله نفس قاعدة الربط التابع اللوغاريتمي)

انتهت المحاضرة الرابعة

المحاضرة الخامسة :

فروع التابع اللوغاريتمي العقدي :

لأجل α حقيقي كيفي و k صحيح كيفي تابعاً من الشكل

$$f_{\alpha k}: \mathbb{C}^* \longrightarrow S_{\alpha k} \cup \{\omega, I\omega = \alpha + 2\pi(k+1)\}$$

$$f_{\alpha k}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$$

حيث $\alpha < \theta = \arg z \le \alpha + 2\pi$

$= \ln|z| + i\varphi \; ; \; \alpha + 2\pi k < \varphi \le 2\pi(k+1)$

لنأخذ جـ لنصف المستقيم DL_α

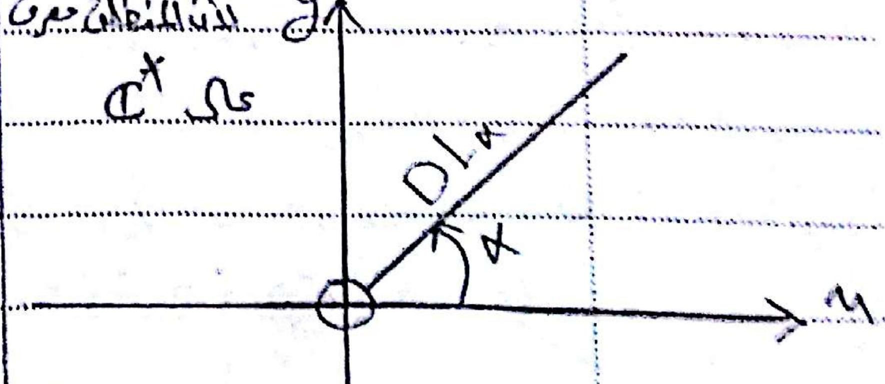
$\arg z = \alpha$

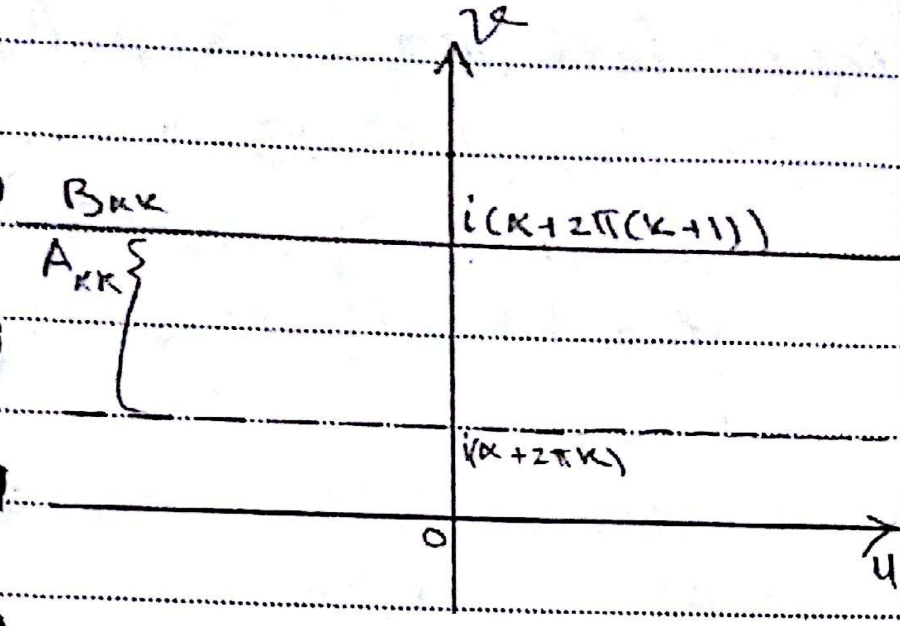
$f_{\alpha k}(DL_\alpha) = B_{\alpha k}$

حيث $B_{\alpha k}$ هي حافة العليا للشريط

الأشعة المنطلق من

في $\mathbb{C}^*$





صورة نصف المستقيم هي الحافة العليا

صورة أي نقطة من المستوي ستكون ضمن الشريط

بشكل عام فإن تابع $f_{\alpha k}$ سيكون تابعاً

$$f_{\alpha k}: \mathbb{C}^* \longrightarrow A_{\alpha k}$$

$$f_\alpha(z) = \ln|z| + i\varphi$$

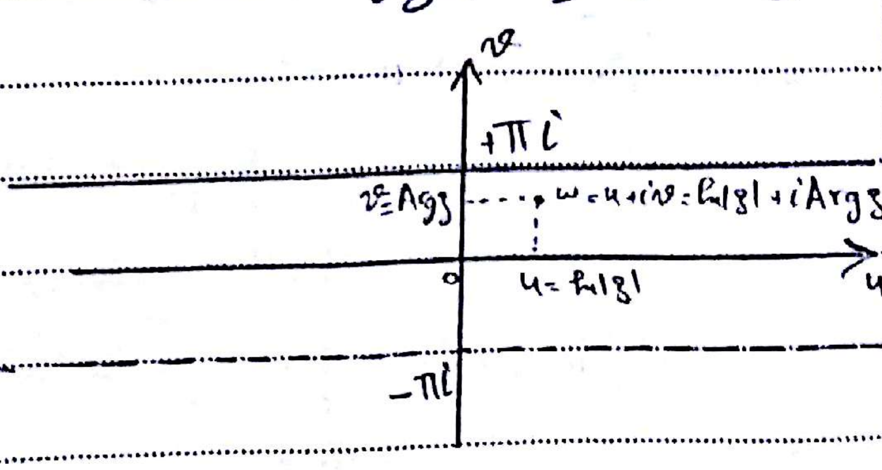
$; \; \alpha < \varphi = \arg z \le \alpha + 2\pi$

حالة خاصة :

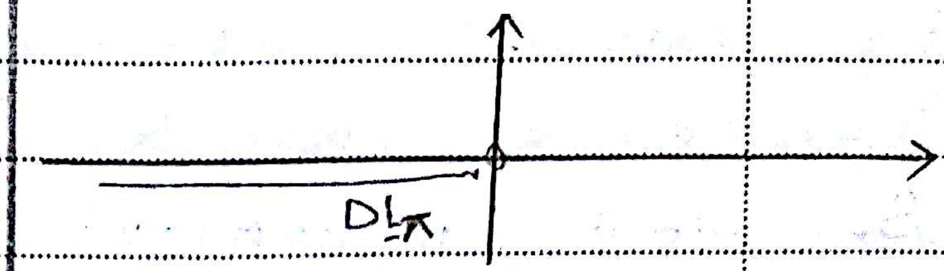
$$f_{-\pi}: \mathbb{C}^* \longrightarrow A \cong]-\infty,+\infty[\cup]-\pi,\pi]$$

$$f_{-\pi} = \ln|z| + i\,Arg\,z = Log\,z$$

القيمة الرئيسية لـ $\log z$



Subject: Date : / /



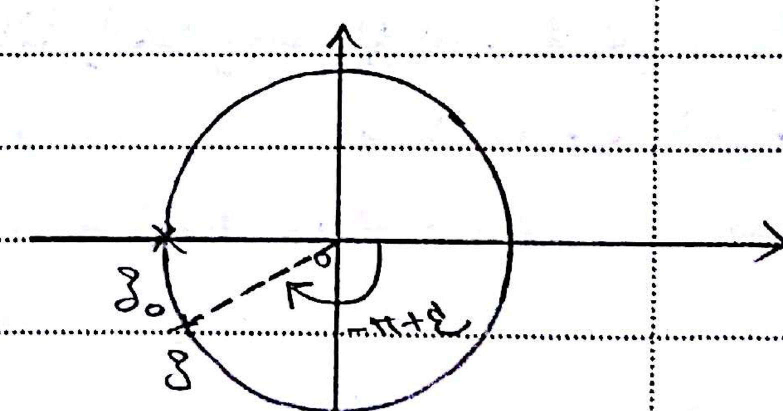
$\overline{\omega} = DL_{-\pi} \cup \{0\}$

مبرهنة: إن أي تابع لوغاريتمي هو غير مستمر عند أي نقطة من $\overline{\omega} = \{0\} \cup DL_\alpha$

الإثبات: في حالة $-\pi$

لنثبت أن $f_{-\pi}$ غير مستمر عند أي نقطة من $\overline{\omega}$، $f_{-\pi}$ غير مستمر عند $z=0$ لأنه غير معرف عندها

* $z_0 \in \overline{\omega}$ ، $z_0 \neq 0$ لنأخذ $z \to z_0$ على دائرة $C(0,|z_0|)$



أخذت القيمة $(-\pi+\varepsilon)$ بدال $(\pi+\varepsilon)$ لأنو بدي قيمة من المجال $]-\pi,\pi]$ ولنفس السبب أخذت z في النصف السفلي من المستوي

$z = |z_0| e^{i(-\pi+\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} z_0$

$f_{-\pi}(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

$= \ln|z_0| + i(-\pi+\varepsilon) \to \ln|z_0| - i\pi$

$z \to z_0$ نحصل على نفس حل تمرين هاي

إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f_{-\pi}(z)$ موجودة فإنها تساوي $\ln|z_0| - i\pi$

$f_{-\pi}(z_0) = \operatorname{Log} z = \ln|z_0| + i\operatorname{Arg} z_0$

أي بقيمة رئيسية لزاوية z على المجال $]-\pi,\pi]$ وإن $-\pi$ لا تنتمي للمجال الذي أخذناه

$= \ln|z_0| + i\pi \neq \ln|z_0| - i\pi$

والتابع $f_{-\pi}$ غير مستمر عند z_0 كيفية من $DL_{-\pi}$ فهو غير مستمر عند أي نقطة من $\overline{\omega}$

تمرين: هل $\lim\limits_{z\to z_0^{-\pi}} f(z)$ موجودة حيث $z_0 \in \overline{\omega}$

فكرة الحل [illegible]

لتكن $z_0 \in \overline{\omega}$ ، $\neq 0$ ولنأخذ $z \to z_0$ على الدائرة $C(0,|z_0|)$ حيث $z_1 = |z_0| e^{i(-\pi+\varepsilon)}$

ولنأخذ $z_2 \to z_0$ على الدائرة $C(0,|z_0|)$

$z_2 = |z_0| e^{i(+\pi-\varepsilon)}$

$\lim\limits_{z_1\to z_0} f(z_1) = \ln|z_0| + i(-\pi)$

$\lim\limits_{z_2\to z_0} f(z_2) = \ln|z_0| + i(\pi)$

$\lim\limits_{z_1\to z_0} f_{-\pi}(z_1) \neq \lim\limits_{z_2\to z_0} f_{-\pi}(z_2)$

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار وبالتالي النهاية غير موجودة

Subject: Date: / /

$f_\alpha = f|_{\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha} : \mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha \to S_\alpha$

؛ $S_\alpha = \{w\in\mathbb{C} : \alpha < Im\, w < \alpha+2\pi\}$

$f_\alpha(z) = \ln|z| + i\theta$

$\alpha < \theta = \arg z < \alpha + 2\pi$

حالة خاصة :

$f_{-\pi} : \mathbb{C}\setminus \bar{\mathbb{R}}_- \to S_{-\pi}$

$f_{-\pi}(z) = Log\, z$

الفرع الرئيسي لـ log

الشريحة الحاوية الكاملة

خاصة السادسة

التابع اللوغاريتمي العقدي :

ملخص لما سبق :

$z = e^{w} \Leftrightarrow w = \log z \quad \forall z\in\mathbb{C}^*$

$\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$

$z \to w = \log z = \ln|z| + i\arg z$

إذا كان $r = |z|$ و θ أحد قياسات زاوية z

$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$\log z$ تابع متعدد القيم

* ليكن log وحيد القيمة في أي شريط أفقي عرضه 2π دون أحد حافتيه

وليكن α عدداً حقيقياً

$S_\alpha = \{w\in\mathbb{C} ; \alpha < Im\, w < \alpha+2\pi\}$

شريط أفقي مفتوح الذي حافتاه

$Im\, w = \alpha + 2\pi$ و $Im\, w = \alpha$

$B_\alpha = \{w\in\mathbb{C} : Im\, w = \alpha+2\pi\}$

حافة العليا لـ S_α

إن Log تابع وحيد القيمة في A_α (إذا كانت α)

؛ $A_\alpha = S_\alpha \cup B_\alpha$

ولنعرف لهذا التابع $f_\alpha : \mathbb{C}^* \to A_\alpha$

$z \to f_\alpha(z) = \ln|z| + i\theta$

حيث θ قياس زاوية z المنتمي لـ

$]\alpha, \alpha+2\pi]$ ليكن DL_α نصف

مستقيم الذي يصنع زاوية قياسها

α مع ox^+ أي

$DL_\alpha = \{z\in\mathbb{C} : \arg z = \alpha\}$ و $DL_\alpha = DL_{\alpha+2\pi k}$

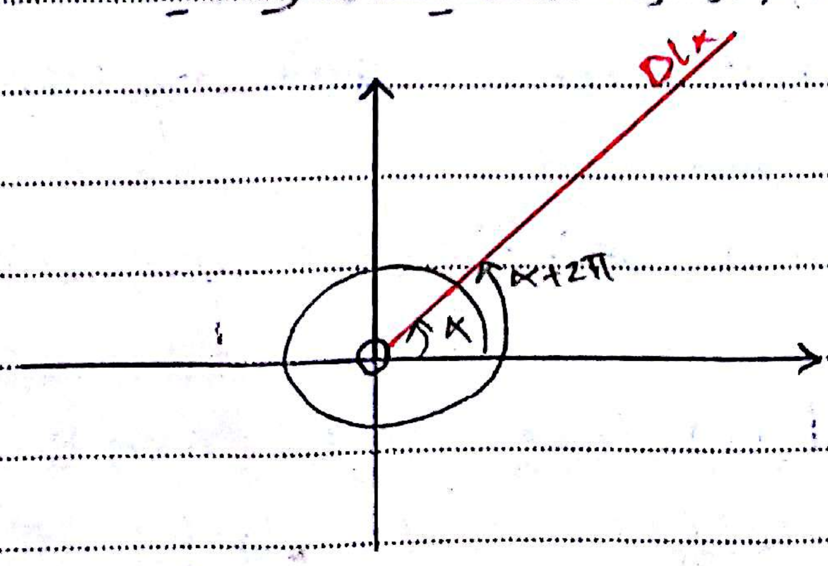
$f_\alpha(DL_\alpha) = B_\alpha$

برهنة : إن f_α غير مستمر عند أي نقطة

من $DL_\alpha \cup \{0\}$

$DL_\alpha \cup \{0\} = o\mathcal{U}$ ؟

المبرر هو الصفر العقدي الوحيد الذي ليس له زاوية



// حق تأكد أن $f_\alpha(z)$ على يسار المحور التخيلي ؟
عندما تكون $|z| \ln|z| < 0$ أي عندما
$|z| < 1$ //

مبرهنة: إن f_α تحليلي على $\mathbb{C}^* \setminus D_{l_\alpha}$
وإن $f'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$
أياً كانت z من منطقة
(تحليلي أي معرف على منطقة (مفتوحة ويمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مضلعي)

التمثيل القطبي لمجموعة:

* G مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^*$ و α ثابت
حقق كيف من الواضح أن هناك تقابل
بين نقاط G ونقاط مجموعة جزئية
G_p من الشريط القطبي Polar

$H_\alpha =]0, \infty[\times]\alpha, \alpha+2\pi]$

G_p تمثيلاً قطبياً لـ G أو التمثيل
القطبي لـ G في H_α

حالة خاصة

$H_{-\pi}$ في $(\mathbb{C}^* \setminus o\bar{u}) =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$

$H_{-\pi}$ في $(\mathbb{C}^* \setminus ox^+) =]0, +\infty[\times]-\pi, 0[\cup]0, \pi]$

H_0 في $(D(0,2) \setminus \{0\})_p =]0, 2[\times]0, 2\pi]$

هنا لم نأخذ الحافة السفلى لأنها تحوي الصفر
لذلك أخذنا الحافة العليا

مبرهنة: لتكن G مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^*$
و G_p تمثيلاً لها ولتكن

$f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$
تابعاً عقدياً معرفاً على G بحيث
$z = re^{i\theta}$, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$
وندخل $(r_0, \theta_0) \in G_p$ نقطة داخلية
في G عندئذ f قابل للاشتقاق عند z_0
إذا وفقط إذا كان:

① u, v قابلان للاشتقاق التام عند (r_0, θ_0):
② u, v يحققان شرطي كوشي ريمان قطبياً:
عند (r_0, θ_0)

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r} v_\theta(r_0, \theta_0)$$

$$v_r(r_0, \theta_0) = -\frac{1}{r} u_\theta(r_0, \theta_0)$$

الاشتقاق التام: المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x و v_y موجودة ومستمرة

إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند z_0 فإن
$f'(z_0)$ يعطى بالشكل

$$f'(z_0) = \frac{r_0}{z_0}\left(u_r(r_0, \theta_0) + i v_r(r_0, \theta_0)\right)$$

يمكن تعميم هذه المبرهنة بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة: ليكن $f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$
تابعاً عقدياً معرفاً على مجموعة مفتوحة
G جزئية من $\mathbb{C}^*$ عندئذ:
f تحليلي (قابل للاشتقاق على G) $\Longleftrightarrow$
① u, v قابلان للاشتقاق التام على G_p
② u, v يحققان شرطي كوشي ريمان

الإثبات:

$f(\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha) = S_\alpha$

$G = \mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha$

$H_\alpha =]0,\infty[\times]\alpha, \alpha+2\pi[$

$(r,\theta) \in G_p$

$; G_p =]0,\infty[\times]\alpha, \alpha+2\pi[$

$u = \ln r \,,\, v = \theta$

$\Rightarrow u_r = \frac{1}{r} \,,\, v_r = 0$

$u_\theta = 0 \,,\, v_\theta = 1$

إن الدوال التابع حقيقين مشتقات جزئية من الدرجة الأولى مستمرة على مجموعة فإن ذلك التابع قابل للاشتقاق التام على تلك المجموعة.

إن المشتقات الجزئية u_r و u_θ و v_r و v_θ مستمرة على G_p ومنه u و v قابلان للاشتقاق التام على G_p

كذلك: $u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta$

$v_r = 0 = -\frac{1}{r}(0) = -\frac{1}{r} u_\theta$

$\forall (r,\theta) \in G_p$

ومنه f_α قابل للاشتقاق على $G = \mathbb{C}^*\setminus DL$

وإن $f'_\alpha(z) = \frac{r}{z}(u_r + i v_r)$

$= \frac{r}{z}\left(\frac{1}{r} + i\underset{\text{صفر}}{(0)}\right) = \frac{1}{z}$

$\forall z \in \mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha$

الفرع التحليلي

$\ell_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha} \Rightarrow \ell_\alpha : \mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha \to S_\alpha$

$\ell_\alpha(z) = f_\alpha(z) = \ln r + i\theta$

$r = |z|$ و θ هو قياس الزاوية في المجال $]\alpha, \alpha+2\pi[$ نسمي أي تابع من توابع ℓ_α $(\alpha \in \mathbb{R})$ فرع التابع log التحليلي على $\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha$

حالة خاصة:

$\ell_{-\pi} = f_{-\pi} = Log : \mathbb{C}^*\setminus o\bar{u} \to S_{-\pi}$

له الشريط الرئيسي

$Log\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z$

انتهت المحاضرة السادسة.

ملاحظة سابعة عشرية:

لا يمكن تعريف مجموعة أوسع من شريط عرضه 2π بحيث يكون عندها التابع اللوغاريتمي وحيد القيمة وتحليلي عندها

فرع التابع log $\ell_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha}$ تحليلي على المنطقة $\mathbb{C}^*\setminus DL_\alpha$

* إن $f_{\alpha+2\pi k} = f_\alpha + 2\pi k$ معرف على $\mathbb{C}^*$

$f(z) = \ln|z| + i\theta$

$; \theta = \arg z \in]\alpha+2\pi k, \alpha+2\pi(k+1)[$

Subject: Date: / /

$= \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k) = f(z) + i2\pi k$

حيث φ لـ z $\in]\alpha, \alpha + 2\pi[$

يرمز لـ $f_{\alpha k}$ بالرمز $f_\alpha + 2\pi k$

$\Rightarrow L_{\alpha k} = f_{\alpha k}|_{\mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha}$

$L_{\alpha k} : \mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha \longrightarrow S_\alpha$

$L_{\alpha k} = L_\alpha + 2\pi k i$

ملاحظة هامة:

إن الفروع التحليلية لـ Log من $\mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha$ هي $L_{\alpha k}$

$L_{\alpha k} = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$

حيث θ زاوية منتمية للمجال $]\alpha, \alpha + 2\pi[$

$L_{\alpha k}$ الفرع التحليلي لـ Log الموافق لـ k

$L_{-\pi k}(z) = \ln|z| + i(Arg\, z + 2\pi k)$

$= \ln|z| + i\,Arg\, z + i2\pi k$

$= L_{-\pi}(z) + i2\pi k$

$= Log(z) + i2\pi k$

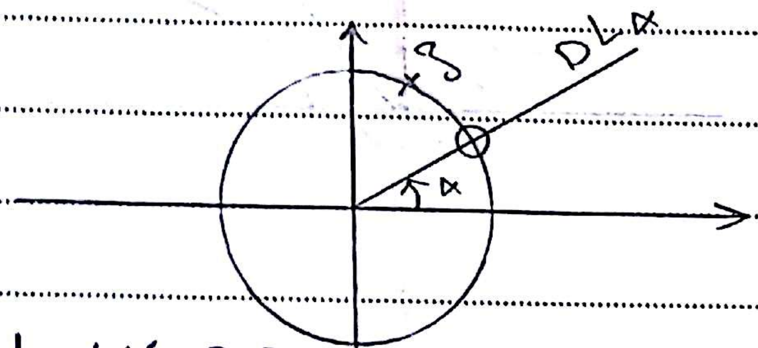
نقطة التفرع ومستقيم التفرع:

إن الدوران حول المبدأ دورة كاملة ينقلنا من فرع لـ Log إلى فرع آخر لذلك يسمى المبدأ بنقطة التفرع لـ Log

نقطة التفرع: هي نقطة إذا درنا حولها انتقلنا من فرع إلى آخر

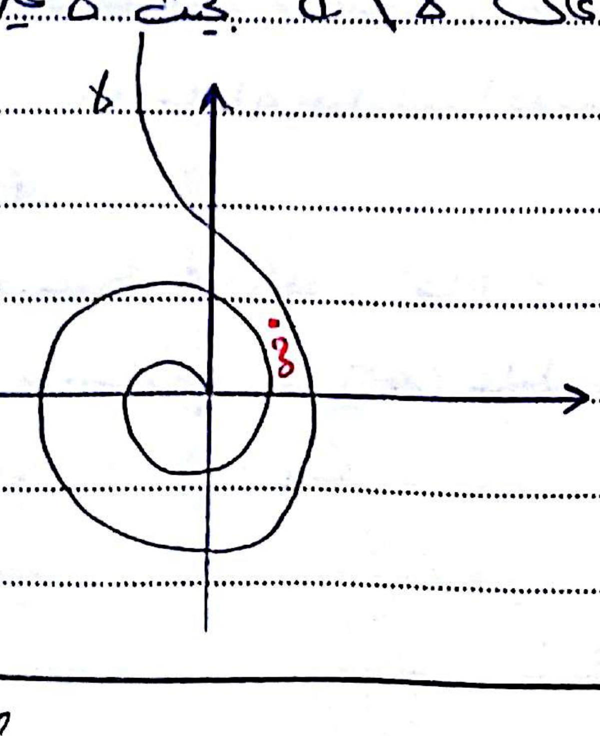
كما أن انطلاقاً من z في $\mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha$ وعودتنا إلى z ذاتها يعني أننا قمنا بإجراء دورة كاملة حول المبدأ يعني تقاطع نصف المستقيم DL_α

يسمى ذلك النصف المستقيم $DL_\alpha \cup \{0\}$ بنصف مستقيم التفرع



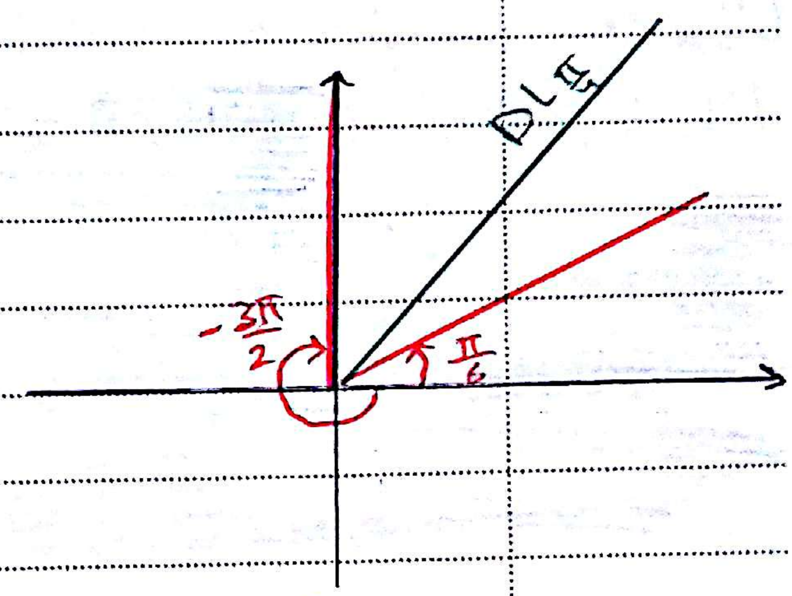
إن اختيار نصف المستقيم $DL_\alpha \cup \{0\}$ يعطينا جماعة الفروع التحليلية على $\mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha$

ملاحظة: يمكن منع الدوران حول المبدأ باختيار منحني يبدأ من المبدأ الإحداثيات ويذهب إلى اللانهاية بشرط ألا يتقاطع بنفسه (والأنصاف الموجودة كرقعه) ويمكن الحصول على فرع لـ Log تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \lambda$ بحيث λ غير معين بزاوية



AL MARJI

تمرين: عين فرع تحليلي لـ log على المنطقة $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{6}$



$G \subseteq \mathbb{C}^* \setminus DL_{\frac{\pi}{4}}$

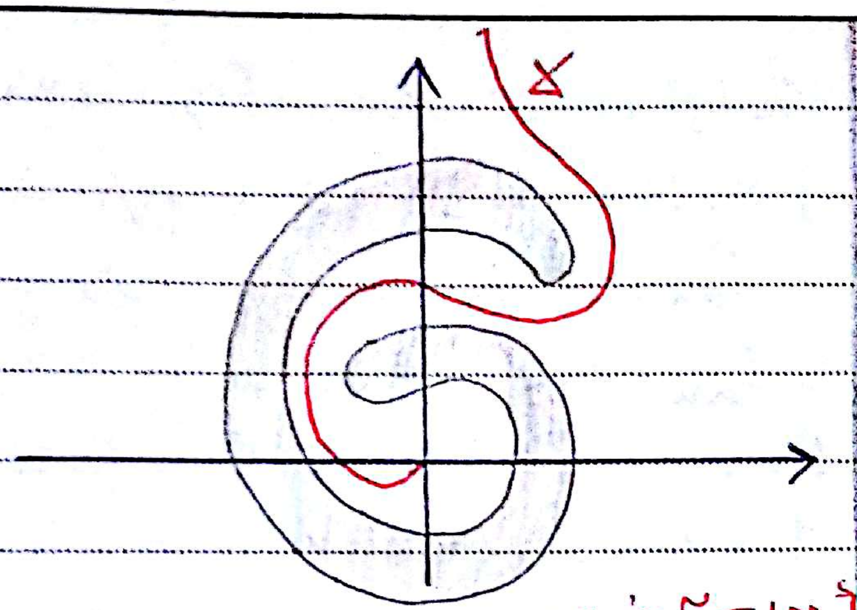
$\ell_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{C}^* \setminus DL_{\frac{\pi}{4}} \longrightarrow S_{\frac{\pi}{4}}$

$\ell_{\frac{\pi}{4}}(z) = \ln|z| + i\theta$

حيث θ قياس لـ $\arg z$ في $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+2\pi[$

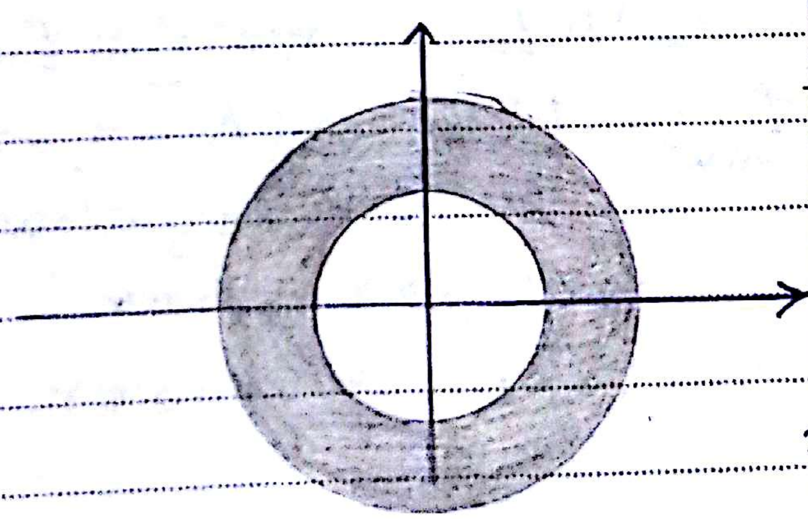
هو فرع تحليلي لـ log على G

لتكن G منطقة في $\mathbb{C}^*$ تحقق الخاصة التالية
لا يمكن الانطلاق من نقطة من G والعودة إليها بإجراء دورة كاملة حول المبدأ دون الخروج من G.
لأجل أي منطقة G تحقق الخاصة السابقة توجد فروع لـ log تحليلية على منطقة تحوي G



أمثلة أخرى

هنا لا يمكن إيجاد فرع من فروع log على هذه المنطقة، هنا نقتطع المنحنى
هنا يمكن إيجاد فروع تحليلية من اقتطاع منحنى



لا يمكن إيجاد فروع تحليلية ولا تحقق الخاصة ويمكن الدوران حول المبدأ داخل المنطقة

* يمكن بالنظر تصنيف المنطقة إذا تحقق الخاصة أو لا تحقق الخاصة

نقاط تفرع للتابع $Log\, f(z)$

حيث f تابع وحيد القيمة ، ان نقاط تفرع التابع $Log\, f(z)$ هي أصفار f أي حلول المعادلة $f(z)=0$

- إذا كانت G منطقة لا تحوي المبدأ وتحقق الخاصة التالية :

لا يمكن الانطلاق من نقطة $z \in G$ والعودة إليها بإجراء دورة كاملة حول أي نقطة تفرع دون الخروج من G

وهذه الحالة (تحقق الخاصة) أي يوجد فرع لـ $Log\, f$ تحليلية على منطقة تحوي G إذا كان f تحليلي على G

مثال : عين نقاط التفرع للتابع

$g(z) = Log(z^2+1)$

ثم عين فرع تحليلي لـ g على أوسع منطقة في $\mathbb{C}$ يتطابق مع $Log(z^2+1)$ الفرع الرئيسي

الحل : $f(z) = z^2+1$

ان نقاط التفرع هي حلول المعادلة

$z^2+1=0 \Leftrightarrow z_1=+i \,,\, z_2=-i$

حتى يكون شرط التركيب ممكن يجب أن يكون f مستمر بسا وهو منطلق Log لذلك نأخذ ونشير الى صورة

الصورة العكسية لـ $O\bar{x}^-$

$G=\mathbb{C}\setminus f^{-1}(O\bar{x}^-) \xrightarrow{f} \mathbb{C}\setminus O\bar{x}^- \xrightarrow{Log} S_\pi$

$z \to f(z) \in \mathbb{C}\setminus O\bar{x}^-$

$z \in f^{-1}(O\bar{x}^-) \Rightarrow f(z) \in O\bar{x}^-$

$z^2+1 \in O\bar{x}^- \Leftrightarrow x^2-y^2+i2xy+1 \in O\bar{x}^-$

جزء تخيلي جزء حقيقي

$2xy=0 \wedge x^2-y^2+1 \le 0$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee y=0) \wedge x^2-y^2+1 \le 0$

$\Leftrightarrow (x=0 \wedge x^2-y^2+1 \le 0)$

$\vee (y=0 \wedge x^2-y^2+1 \le 0)$

مستحيلة لانه لا يوجد في $\mathbb{R}$ $x^2 \le -1$

ومنه $-y^2+1 \le 0 \Leftrightarrow y^2 \ge 1$

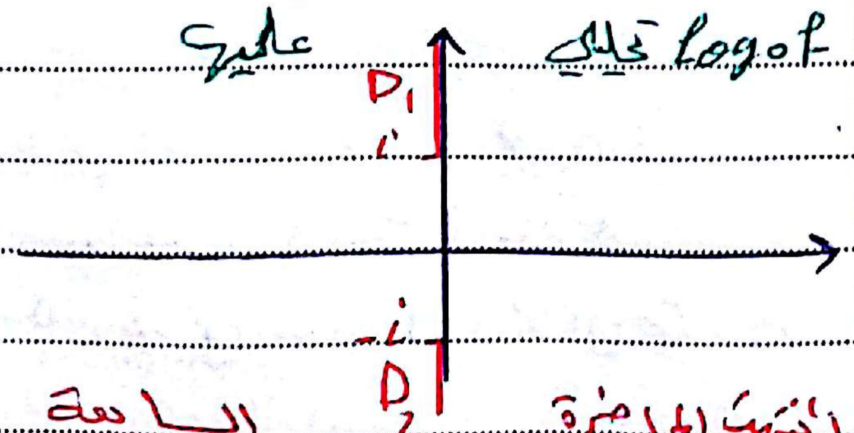
$\Leftrightarrow |y| \ge 1 \Leftrightarrow (y \le -1 \vee y \ge 1) \wedge x=0$

ان صور D_1 و D_2 وفق f هي $O\bar{x}^-$

$G_1 = \mathbb{C}\setminus(D_1 \cup D_2)$

عندئذ G تحليلي على G لأنه تحليلي على $\mathbb{C}$ و Log تحليلي على $\mathbb{C}\setminus O\bar{x}^-$ التي تحوي $f(G)$ و $Log \circ f$ تحليلي على G وهو فرع لـ g

ويستحيل أن نجد منطقة أوسع من G يكون عندها $Log \circ f$ تحليلي عليها



السالبة