$$= z^{-4}(c_0 + 4c_0z + c_0z^2 + 0 + c_4z^4 + \frac{4}{5}c_4z^5 + \frac{1}{5}c_4z^6 + 0 + \dots)$$

$$= z^{-4}[(1 + 4z + 5z^2)c_0 + (z^4 + \frac{4}{5}z^5 + \frac{1}{5}z^6)\, c_4]$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^2}\right)c_0 + \left(1 + \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}z^2\right)c_4$$

وهو يمثل الحل العام.

٢ . ٨ . دراسة الحل في جوار الـ ∞:

المطلوب هو البحث في حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية في جوار اللانهاية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$w'' + a(z)\, w'\, b(z)\, w = 0$$

نجري التحويل:

$$t = \frac{1}{z} \Leftarrow z = \frac{1}{t}$$

وبحساب المشتقات العادية نجد:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = \frac{d2w}{dz^2} = \frac{dw'}{dz} = \frac{dw'}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \cdot \frac{dw'}{dt}$$

$$= -t^2\left(-2t\frac{dw}{dt} - t^2\frac{d2w}{dt^2}\right)$$

$$= 2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d2w}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المفروضة:

$$\left(2t^3\frac{dw}{dt}+t^4\cdot\frac{d2w}{dt^2}\right)+a_1\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right)+b\left(\frac{1}{t}\right)w=0 \qquad (1)$$

نرتب المعادلة ونقسم على t^4 فنجد:

$$\frac{d2w}{dt^2}+\frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\frac{dw}{dt}+\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right)w=0 \qquad (2)$$

وتسمى بالمعادلة الجديدة بدلالة t:

لننظر في المقدارين:

$$\frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (4)$$

والسؤال الذي يطرح نفسه:

ما طبيعة النقطة $t = 0$ بالنسبة إلى كل من (3) و (4)؟

١. $t = 0$ نقطة عادية لكل من (3) و (4):

$$\Rightarrow \frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots$$ (تابع تحليلي كتبناه على شكل متسلسلة قوى)

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{t}\right)=2t-a_0t^2-a_1t^3-a_2t^4+\ldots$$

$$\Rightarrow a(z)=\frac{2}{z}-\frac{a_0}{z^2}-\frac{a_1}{z^3}-\frac{a_2}{z^4}-\ldots\ldots \qquad (5)$$

$$za(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}2 \qquad (6)$$

بإعادة نفس الخطوات لأجل (4) نجد:

$$\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right)=b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3+\ldots$$

$$b\left(\frac{1}{t}\right)=b_0t^4+b_1t^5+b_2t^6+b_3t^7\ldots.$$

$$b(z)=\frac{b_0}{z^4}+\frac{b_1}{z^5}+\frac{b_2}{z^6}+\frac{b_3}{z^7}+\ldots. \qquad (7)$$

حتى تكون النقطة $t=0$ نقطة منتظمة يجب أن تحقق الشروط (5) و (6) و (7) أي أن تكون النقطة هي موضع صفري من المرتبة الأولى بالنسبة للدالة $a(z)$ على الأقل (5)، وأن تكون موضعاً صفرياً من المرتبة الرابعة بالنسبة لـ $b(z)$ على الأقل (7) وأن يتحقق شرط النهاية (6)، ويكون الحل من الشكل: $w=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$.

٢ . $t=0$ نقطة شاذة منتظمة:

$t=0$ قطب بسيط بالنسبة لـ (3) على الأكثر عندئذٍ فإن (3) تكتب بالشكل:

$$\frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}=\frac{a_0}{t}+\text{تابع تحليلي}=\frac{a_0}{t}+a_1+a_2t+a_3t^2+\ldots$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{t}\right)=2t-a_0t-a_1t^2-a_2t^3-a_3t^4-\ldots.$$

$$\Rightarrow a(z)=\frac{\overline{a_0}}{z}+\frac{\overline{a_1}}{z^2}+\frac{\overline{a_2}}{z^3}+\frac{\overline{a_3}}{z^4}+\ldots.$$

$t=0$ قطب ثنائي على الأكثر بالنسبة للدالة (4) عندئذٍ:

$$\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{b_0}{t^2}+\frac{b_1}{t}+b_2+b_3t+b_4t^4+\ldots.$$

$$\Rightarrow b(z) = \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + \frac{b^2}{z^4} + \frac{b^3}{z^5} + \ldots.$$

حتى تكون النقطة $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة يجب أن يتحقق:

١. $z = \infty$ صفر من المرتبة الأولى بالنسبة للدالة $a(z)$ على الأقل.

٢. $z = \infty$ صفر من المرتبة الثانية على الأقل بالنسبة للدالة $b(z)$.

عندئذ يكون شكل الحل: $w = \sum_0^\infty c_k t^{k+\lambda} = \frac{1}{z^\lambda} \sum_0^\infty \frac{c_k}{z^k}$

في حال اختلال أحد الشرطين تكون النقطة شاذة غير منتظمة.

٢ . ٩ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

ما هي طبيعة النقاط الشاذة للمعادلة:

$$w'' + \frac{2(z+2)}{z(z-2)} w' + \frac{5}{z^2(z-2)^2} w = 0$$

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

$z = 2$ نقطة شاذة منتظمة.

بالنسبة لـ $z = \infty$ نلاحظ أن:

١. $z(a(z)) \xrightarrow[z\to\infty]{} 2$

٢. $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الأولى بالنسبة للدالة $a(z)$ {البسط درجة (1) والمقام درجة (2)}.

٣. $z = \infty$ صفر من المرتبة الرابعة بالنسبة للدالة $b(z)$.

ومنه $z = \infty$ نقطة منتظمة.

مثال (٢):

أعد نفس السؤال من أجل المعادلة:

$$z^2(z-2)\,w'' + az(z^2-4)\,w' + (z-1)\,w = 0$$

الحل:

$$w'' + \frac{az(z^2-4)}{z^2(z-2)^2}w' + \frac{(z-1)}{z^2(z-2)^2}w = 0$$

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

$z = 2$ نقطة شاذة منتظمة.

$z = \infty$ نقطة شاذة منتظمة لأن $z = \infty$ قطب بسيط من المرتبة الأولى لـ $a(z)$ وقطب درجة ثالثة لـ $b(z)$.

مثال (٣):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(1-z^2)\,w'' - 2zw' + 6w = 0$$

في جوار $z = \infty$.

الحل:

لنكتب المعادلة المفروضة بالشكل:

$$w'' - \frac{2z}{1-z^2}w' + \frac{6}{1-z^2}w = 0$$

$z = \infty$ نقطة شاذة منتظمة.

نجري التحويل: $z = \dfrac{1}{t}$

$$w' = \frac{dw}{dz} = -t^2\frac{dw}{dt}$$

$$w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d2w}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة:

$$\left(1-\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)\left(2t^3 \frac{dw}{dt} + \frac{d2w}{dt^2} t^4\right) - 2\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2 \frac{dw}{dt}\right) + 6w = 0$$

نرتب المعادلة:

$$t^2(t^2-1)\frac{d2w}{dt^2} + 2t^3 \frac{dw}{dt} + 6w = 0$$

$t = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

وهي نفس المعادلة التي حُلَّت في المثال رقم (١١) من الفقرة السابقة (٢ . ٧ . ٢).

٢ . ١٠ . معادلات فوكس:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى ذات الأمثال المتغيرة والمتجانسة الآتية:

$$w'' + a(z)\, w' + b(z)\, w = 0 \quad ; \quad w = w(z) \qquad (1)$$

إذا كانت جميع النقاط الشاذة للمعادلة (1) هي نقاط شاذة منتظمة، وكانت نقطة اللانهاية نقطة شاذة منتظمة على الأكثر فإن (1) تُدعى بمعادلة فوكس نسبة للعالم الألماني فوكس الذي درس النقاط الشاذة المنتظمة بشكل منهجي في القرن التاسع عشر.

والسؤال المطروح كيف يكون شكل الدالة $a(z)$ والدالة $b(z)$ في معادلة فوكس؟

لنفرض أن للمعادلة (1) عدداً منتهياً من النقاط الشاذة المنتظمة وهي $r_1, r_2, \ldots r_k$، ولنفرض أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة منتظمة على الأكثر لـ (1) وطبعاً هذه النقاط الشاذة المنتظمة يجب أن تكون معزولة أي يوجد جوار للنقطة لا يحوي نقاطاً شاذة أخرى باستثناء النقطة نفسها.

ومع العلم أن جوار اللانهاية هو عبارة عن خارج قرص كبير وجميع النقاط الشاذة تقع داخله أي $|z| > R$ كون $r_1, r_2, \dots, r_k$ بحسب فرضيتنا هي نقاط شاذة منتظمة فهي عبارة عن أقطاب بسيطة لـ $a(z)$ على الأكثر، وأقطاب مضاعفة على الأكثر لـ $b(z)$ وبناءً على ذلك فإن $a(z)$ بحسب لوران تكتب بالشكل:

$$a(z) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\beta_i}{z - r_i} + a_1(z) \qquad (2)$$

وحيث $a_1(z)$ هي عبارة عن دالة تحليلية ووحيدة القيمة في C (تابع صحيح) لكن بما أننا فرضنا $z = \infty$ هي نقطة شاذة منتظمة لـ (1) فهي تحقق الشرط: أنها صفر من المرتبة الأولى على الأقل لـ $a(z)$ ومن خلال هذا الشرط فإن $a_1(z)$ في (2) سوف تسعى إلى الصفر عندما $z \to \infty$ أي:

$$a_1(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

وعليه ضمن الفرضيات المعطاة يُختصر شكل الدالة $a(z)$ في (1) ليصبح:

$$a(z) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\beta_i}{z - r_i} \;\; ; \;\; \beta_i \text{ ثوابت } i = 1, \dots k \qquad (3)$$

وكون $r_1, r_2, \dots, r_k$ أقطاباً مضاعفة على الأكثر لـ $b(z)$ وبناء على ذلك فإن $b(z)$ بحسب لوران تكتب بالشكل:

$$b(z) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{c_i}{z - r_i} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\overline{c_i}}{(z - r_i)^2} + b_1(z) \qquad (4)$$

وحيث $b_1(z)$ هي عبارة عن دالة تحليلية ووحيدة القيمة في C (تابع صحيح) لكن، بما أن $z = \infty$ هي نقطة شاذة منتظمة لـ (1) فهي تحقق الشرط (إنها صفر من المرتبة الثانية على الأقل لـ $b(z)$ ومن خلال أنها صفر من المرتبة الثانية فإن $b_1(z)$ سوف تسعى إلى الصفر عندما $z \to \infty$ أي:

$$b_1(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

ومن خلال أنها صفر من المرتبة الثانية على الأقل فإن الحدود التي درجتها أولى ستكون معدومة أي:

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=k} c_i}{z - r_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=k} c_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 0 \qquad (*)$$

وعليه فإن شكل الدالة $b(z)$ يختصر في (4) ضمن الفرضيات ليصبح بالشكل:

$$b_z = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{c_i}{z - r_i} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\overline{c_i}}{(z - r_i)^2} \qquad (5)$$

وبحيث: $\sum_{i=1}^{i=k} c_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 0$

بتعويض (3) و (5) في (1) نجد أن:

$$w'' + \left(\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\beta_i}{z - r_i}\right) w' + \left(\sum_{i=1}^{i=k} \frac{c_i}{z - r_i} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\overline{c_i}}{(z - r_i)^2}\right) w = 0\, ; w = w(z) \quad (6)$$

وبحيث: $\sum_{i=1}^{i=k} c_i = 0$

والمعادلة (6) ضمن الشرط (*) هي معادلة فوكس بـ $r_1, r_2, \ldots, r_k$ و $z = \infty$ نقطة شاذة منتهية بينما بقية نقاط المستوي العقدي هي نقط عادية (منتظمة).

٢ . ١٠ . ١ . الأشكال المختلفة لمعادلة فوكس:

١ . معادلة فوكس بنقطة شاذة وحيدة:

لنفرض أن لـ (1) نقطة شاذة منتظمة وحيدة هي $z = r_1$ بينما جميع نقاط المستوي العقدي وبما فيها اللانهاية هي نقط عادية، وبناء على الدراسة السابقة فإن معادلة فوكس الموافقة هي (6) لتصبح ضمن فرضيتنا بالشكل:

$$w'' + \frac{\beta_1}{z-r_1}w' + \left(\frac{c_1}{z-r_1} + \frac{\overline{c_1}}{(z-r_1)^2}\right)w = 0 \quad ; \quad w = w(z) \qquad (7)$$

لكن من الشرط (*) نجد أن:

$$c_1 = 0 \qquad (8)$$

وكون $z = \infty$ هي نقطة عادية فهي تحقق الشرط $z.a(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 2$ ومن ثمّ:

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{\beta_1}{z-r_1} = \beta_1 = 2 \Rightarrow \beta_1 = 2 \qquad (9)$$

وكون $z = \infty$ نقطة عادية فهي تحقق الشرط أنها صفر من المرتبة الرابعة على الأقل لـ $b(z)$ وأنها ليست صفراً من المرتبة الرابعة، ومن ثمّ نضع $\overline{c_1} = 0$ لكي يتناسب مع طبيعة النقطة $z = \infty$، ومما سبق فإن المعادلة (7) تؤول إلى الشكل:

$$w'' + \frac{2}{z-r_1}w' = 0 \; ; \; w = w(z) \qquad (10)$$

والمعادلة (10) هي معادلة فوكس بنقطة شاذة منتظمة وحيدة بينما بقية النقاط مع اللانهاية هي نقط عادية ولحلها نفرض أن:

$$w' = u \Rightarrow w'' = u' \; ; \; u = u(z)$$

نعوض في (10) فنحصل على:

$$u' + \frac{2}{z-r_1}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2}{z-r_1}dz$$

بالمكاملة:

$$\ln\left(\frac{u}{a_1}\right) = -2\ln(z-r_1)^2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u}{a_1}\right) = \frac{1}{(z-r_1)^2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{a_1}{(z-r_1)^2} \quad ; \quad a_1 \text{ ثابت}$$

بالمكاملة

$$w' = u \Rightarrow w' = \frac{a_1}{(z-r_1)^2} \Rightarrow$$

$$w = -\frac{a_1}{(z-r_1)^2} + a_2 \Rightarrow w(z) = \frac{A}{(z-r_1)^2} + B \quad ; \quad A = -a_1 \; ; B = a_2$$

وهو الحل العام لمعادلة فوكس بنقطة شاذة منتظمة وحيدة. وبحيث A و B ثوابت اختيارية عقدية.

٢ . معادلة فوكس بنقطتين شاذتين:

لنفرض أن لـ (1) نقطة شاذة منتظمة هي $z = r_1$ ولنفرض أن اللانهاية هي نقطة شاذة منتظمة أيضاً لـ (1) وبناءً على الدراسة السابقة فإن معادلة فوكس المرافقة هي (6) لتصبح ضمن الفرضيات بالشكل:

$$w'' + \frac{\beta_1}{z-r_1} w' + \left(\frac{c_1}{z-r_1} + \frac{\overline{c_1}}{(z-r_1)^2}\right) W = 0 \quad ; \quad w = w(z)$$

لكن من الشرط (*) نجد أن:

$$c_1 = 0$$

وعليه تصبح (6) بالشكل:

$$w'' + \frac{\beta_1}{z-r_1} w' + \frac{\overline{c_1}}{(z-r_1)^2} w = 0 \quad ; \quad W = W(Z)$$

أي إن:

$$(z-r_1)^2 w'' + \beta_1 (z-r_1) + \overline{c}_1 w = 0 \quad ; \quad w = w(z) \qquad (11)$$

والمعادلة (11) هي معادلة فوكس بنقطتين شاذتين منتظمتين $z = r_1$, $z = \infty$ بينما بقية النقاط هي نقاط عادية، وتُدعى بمعادلة أولر وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة لحلها نفرض:

$$z - r_1 = e^t \Rightarrow t = \ln(z - r_1)$$

وبعد التعويض في (11) فنحصل على معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة بالتابع w والمتحول t ولحلها نستخدم «المؤثرات التفاضلية» وبعد الحصول على الحل نعود للمتحول z لنحصل على الحل العام لـ (11).

٣ . معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة منتظمة:

لنفرض أن للمعادلة (1) ثلاث نقاط شاذة منتظمة هي $z_1 = 0$ و $z_2 = 1$ و $z_3 = \infty$ بينما بقية النقاط هي عبارة عن نقاط عادية، وبناء على تلك الدراسة السابقة فإن معادلة فوكس الموافقة هي (6) لتصبح ضمن الفرضيات بالشكل:

$$w'' + \left(\frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z-1}\right)w' + \left(\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{\overline{c_1}}{z^2} + \frac{\overline{c_2}}{(z-1)^2}\right)w = 0 \ ; \ w = w(z) \quad (12)$$

لكن من الشرط (*) نجد أن:

$$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \qquad (13)$$

لنحسن في شكل $a(z)$ في (3):

$$a(z) = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z-1}$$

$$= \frac{(\beta_1 + \beta_2)z - \beta_1}{z(z-1)} = \frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} \Rightarrow a(z) = \frac{a_0 + a_1(z)}{z(z-1)} \qquad (14)$$

وبحيث:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\beta_1 \\ a_1 &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \qquad (15)$$

ولنحسن من شكل $b(z)$ في (3):

$$b(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{\overline{c_1}}{z^2} + \frac{\overline{c_2}}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{c_1 z(z-1)^2+c_2 z^2(z-1)+\overline{c_1}(z-1)^2+\overline{c_2}z^2}{z^2(z-1)^2}$$

$$=\frac{(c_1+c_2)z^3+(-2c_1-c_2+\overline{c_1}+\overline{c_2})z^2+(c_1-2\overline{c_1})z+\overline{c_1}}{z^2(z-1)^2}$$

$$\frac{\overline{c_1}+(c_1-2\overline{c_1})z+(\overline{c_1}+\overline{c_2}-c_1)z^2}{z^2(z-1)^2}=\frac{b_0+b_1 z+b_2 z^2}{z^2(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow b(z)=\frac{b_0+b_1 z+b_2 z^2}{z^2(z-1)^2} \qquad (16)$$

وبحيث إن:

$$\begin{aligned} b_0 &= \overline{c_1} \\ b_1 &= c_1-2\overline{c_1} \\ b_2 &= \overline{c_1}+\overline{c_2}-c_1 \end{aligned} \qquad (17)$$

نعوض (14) و (16) في المعادلة (12) فنجد:

$$w''+\frac{a_0+a_1 z}{z(z-1)}w'+\frac{b_0+b_1 z+b_2 z^2}{z^2(z-1)^2}w=0 \qquad (18)$$

$$z^2(z-1)^2 w''+(a_0+a_1 z)(z)(z-1)w'+(b_0+b_1 z+b_2 z^2)w=0 \quad (19)$$

و (19) هي معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة $0, 1, \infty$ (معادلة غوص) وبحيث إن الثوابت تعطى بمجموعات المعادلات (13) و (15) و (17).

الآن لنوجد المعادلة الدليلية لـ (19) في جوار الصفر:

$$a_1(z)=z.a(z)=z\cdot\frac{a_0+a_1 z}{z(z-1)}=\frac{a_0+a_1 z}{z-1}$$

$$c_0=a_1(0)=-\,a_0\Rightarrow c_0=-a_0\Rightarrow c_0=\beta_1$$

$$b_1(z)=z^2.b(z)=z^2\cdot\frac{b_0+b_1 z+b_2 z^2}{z^2(z-1)^2}=\frac{b_0+b_1 z+b_2 z^2}{(z-1)^2}$$

$$d_0 = b_1(0) = b_0 \Rightarrow d_0 = b_0 \Rightarrow d_0 = \overline{c_1}$$

والمعادلة الدليلية في جوار الصفر هي:

$$\lambda(\lambda - 1) + c_0 \lambda + d_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda^2 + (\beta_1 - 1)\lambda + \overline{c_1} = 0$$

لنوجد المعادلة الدليلية في جوار الواحد:

$$a_1(z) = (z-1).a(z) = (z-1)\cdot\frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} = \frac{a_0 + a_1 z}{z}$$

$$c_0 = a_1(1) = a_0 + a_1 \Rightarrow c_0 = -\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow c_0 = \beta_2$$

$$b_1(z) = (z-1)^2 \cdot b(z) = \frac{(z-1)^2 \cdot b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2(z-1)^2} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2}$$

$$d_0 = b_1(1) = b_0 + b_1 + b_2 = \overline{c_1} + c_1 - 2\overline{c_1} + \overline{c_1} + \overline{c_2} - c_1 = \overline{c_2}$$
$$\Rightarrow d_0 = \overline{c_2}$$

والمعادلة الدليلية في جوار الواحد هي:

$$\lambda(\lambda - 1) + c_0 \lambda + d_0 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (\beta_2 - 1)\lambda + \overline{c_2} = 0$$

لنوجد المعادلة الدليلية في جوار اللانهاية، ومن أجل ذلك نقوم بإجراء التحويل $z = \frac{1}{t}$ فينتقل الجوار من اللانهاية إلى الصفر ويكون:

$$z = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -t^2$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} = -t^2\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{d2w}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dz}$$

$$= +2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d2w}{dt^2}$$

نعوض في (19) فنجد:

$$\frac{1}{t^2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^2\cdot\left(t^4\frac{d2w}{dt^2}+2t^3\frac{dw}{dt}\right)+\left(\frac{a_0t+a_1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right)$$

$$+\left(\frac{b_0t^2+b_1t+b_2}{t^2}\right)w=0 \quad ; \quad w=w(t)$$

$$\Rightarrow (1-t)^2\frac{d2w}{dt^2}+\frac{2}{t}(1-t)^2\frac{dw}{dt}-\frac{1}{t}(a_0t+a_1)(1-t)\frac{dw}{dt}+$$

$$+\frac{(b_0t^2+b_1t+b_2)}{t^2}w=0$$

أو بالشكل:

$$\Rightarrow t^2(1-t)^2\frac{d2w}{dt^2}+\left[2t(1-t)^2-t(a_0t+a_1)(1-t)\right]\frac{dw}{dt}$$

$$+(b_0t^2+b_1t+b_2)\,w=0 \qquad (20)$$

وهي المعادلة الجديدة بدلالة t والمعادلة الدليلية في جوار اللانهاية هي نفس المعادلة الدليلية لـ (20) في جوار الصفر.

$$\Rightarrow t^2(t-1)^2\frac{d2w}{dt}+(2(1-t)-a_0t-a_1)(t)(1-t)\frac{dw}{dt}+b_0t^2+b_1t+b_2)w=0$$

لدينا:

$c_0 = 2 - a_1 = a_1(0)$ و $d_0 = b_1(0) = b_2$، ومن ثم بالتعويض في المعادلة الدليلية: $\lambda(\lambda - 1) + c_0\lambda + d_0 = 0$ نحصل على:

$$\lambda^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2)\lambda + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - c_1 = 0$$

إذاً حصلنا على ثلاث معادلات دليلية وهي معادلات من الدرجة الثانية في λ ولنفرض أن α_1، α_2 جذرا المعادلة الدليلية في جوار الصفر.

وأنه b_2, b_1 جذرا المعادلة الدليلة في جوار الواحد.

وتكون المعادلة الدليلية في جوار الصفر لها هي:

$$\lambda(\lambda - 1) + c_0\lambda + d_0$$

$$\lambda^2 - (A + 1)\lambda + C = 0$$

لكن:

$$A = a_0 - 2a$$

$$\Rightarrow A + 1 = a_0 - 2a + 1$$

$$A + 1 = -\beta_1 - 2a + 1$$

$$A + 1 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2a$$

$$A + 1 = (\alpha_1 - a) + (\alpha_2 - a)$$

أي إن الجذرين α_1, α_2 للمعادلة الدليلية في جوار الصفر أصبحا:

$$\alpha_1 - a\ ,\ \alpha_2 - a$$

وكذلك الجذران b_1 و b_2 يصبحان $b_1 - b$ و $b_2 - b$، ونرمز بـ a, b لجذري المعادلة الدليلية في جوار اللانهاية.

وبهدف التبسيط لنضع $\alpha_1 = a$ و $b_1 = b$ فتصبح الجذور للمعادلات الدليلية كما يلي:

$$0\ ,\ \alpha_2 - \alpha_1$$

$$0\ ,\ b_2 - b_1$$

$$a\ ,\ b$$

لنضع $\alpha_2 - \alpha_1 = 1 - c$ حيث c ثابت كيفي غير معدوم، عندئذ نستنتج أن: $b_2 - b_1 = c - a - b$ وذلك لأن مجموع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد، واستناداً لما ورد أعلاه فإن المعادلات (23) تصبح بالشكل الآتي:

$$\beta_1 = c\ ,\ \beta_2 = 1 - c + a + b\ ,\ \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0\ ,\ c_1 = -a.b$$

بالتعويض في عبارة $a(z)$ نجد:

$$a(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z-1}=\frac{c}{z}+\frac{(1-c+a+b)}{z-1}$$
$$=\frac{c(z-1)+(1-c+a+b)z}{z(z-1)}$$
$$\Rightarrow a(z)=\frac{z-c+z-cz+az+bz}{z(z-1)}$$
$$=\frac{-c+(1+a+b)z}{z(z-1)}$$

أما الآن لنعوض في عبارة $b(z)$ لنجد:

$$b(z)=\frac{\overline{c_1}}{z^2}+\frac{\overline{c_2}}{(z-1)^2}+\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z-1}$$
$$=0+0-\frac{ab}{z}+\frac{ab}{z-1} \quad ; \quad c_1+c_2=0$$

نوحد المقامات فنحصل على الشكل النهائي للدالة $b(z)$:

$$b(z)=\frac{-ab(z-1)+abz}{z(z-1)}=\frac{ab}{z(z-1)}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية الأصلية المفروضة:

$$z(z-1)\, w'' + [-c + (1 + a + b)z]\, w' + ab\, w = 0$$

وهو الشكل النموذجي النهائي وتسمى:

معادلة غوص، المعادلة فوق الهندسية، معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة منتظمة.

مهمتنا تكمن في إيجاد الحل العام لهذه المعادلة في جوار الصفر ثم الحل العام لهذه المعادلة بجوار الواحد ثم الحل العام لهذه المعادلة بجوار اللانهاية بالتفصيل ومنه سنحصل على التوابع فوق الهندسية.

٢ . ١٠ . ٢ . البحث في الحل العام لمعادلة غاوص بجوار الصفر:

$$z(1-z)\,w'' + [c-(1+a+b)\,z]\,w' - ab\,w = 0$$

a, b ثوابت كيفية.

c لا يساوي الصفر أو أي عدد صحيح سالب.

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow w' = \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$\Rightarrow w'' = \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض بالمعادلة ونضرب بـ z ونختصر على z^{λ}:

$$(1-z)\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k + [c-(1+a+b)\,z]\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^k$$

$$- ab\sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+1} = 0$$

نكتب المعادلة الدليلية:

$$z^0 : [\lambda(\lambda-1) + c\lambda]\,c_0 = 0 \quad , \quad c_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \ \vee \lambda_2 = 1 - c$$

وهذا يتطابق تماماً مع الدراسة النظرية.

أمثال الحد العام:

$$z^k : (k+\lambda)(k+\lambda-1)\,c_k - (k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\,c_{k-1}$$
$$+ c\,(c+\lambda)\,c_k - (a+b+1)(k+\lambda-1)\,c_{k-1} - ab\,c_{k-1} = 0$$

بجمع الحدود:

$[(k+\lambda)(k+\lambda-1+c)]\,c_k = [(k+\lambda-1)(k+\lambda-1)+a+b)+a\,.\,b]\,c_{k-1}$

ومنه:

$[(k+\lambda)(k+\lambda-1+c)]\,c_k = (k+\lambda+a-1)(k+\lambda+b-1)\,c_{k-1}\ ;\ k \geq 1$

بالتالي:

$$\Rightarrow c_k = \frac{(k+\lambda+a-1)(k+\lambda+b-1)}{(k+\lambda)(k+\lambda+c-1)}c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$\text{For} : \lambda = 0 \Rightarrow c_k = \frac{(k+a-1)(k+b-1)}{k(k+c-1)}c_{k-1}\ ; k \geq 1$$

$$k=1 \Rightarrow c_1 = \frac{a.b}{c}.c_0$$

$$k=2 \Rightarrow c_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)(2)}c_1$$

$$k=3 \Rightarrow c_3 = \frac{(a+2)(b+2)}{(3)(c+2)}c_2$$

$$k=4 \Rightarrow c_4 = \frac{(a+3)(b+3)}{(4)(c+3)}c_3$$

$$\vdots$$

$$\forall\, k : c_k = \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k)k}c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

بضرب هذه العلاقات وبفرض $c_0 = 1$ نجد:

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)....(a+k-1)(b)(b+1)(b+2)....(b+k-1)}{c(c+1)(c+2)....(c+k-1)}$$

ولندخل المصطلحات التالية:

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\ \ldots.\ (a+k-1)$$
$$(b)_k = b(b+1)(b+2)\ \ldots.\ (b+k-1)$$
$$(c)_k = c(c+1)(c+2)\ \ldots.\ (c+k-1)$$

بالتعويض بعبارة الـ c_k نجد:

$$c_k = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k\, k!}$$

نعوض بشكل الحل:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k\, k!} z^k$$

$$= 1 + \frac{ab}{1!c} z + \frac{a(a+1)(b+a)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(b+1)(a+2)(b+2)b}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \ldots$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+k-1)b(b+1)\ldots.(b+k-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots.(c+k-1)} z^k + \ldots.$$

$$= F(a, b, c, z)$$

وهو التابع فوق الهندسي هو عبارة عن متسلسلة غير منتهية تكون متقاربة عندما $1 > |z|$ وهذا ينسجم مع وجود نقطة شاذة في جوار الصفر وهو الحل الأول لمعادلة غاوص في جوار الصفر.

أمثلة محلولة

احسب ما يلي:

1) $F(a, b, c, 0) = 1$

2) $F(1, 1, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{k!(1)_k} z^k = \sum_{0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad ; \ |z| < 1$

3) $\lim_{a\to\infty} F(a, b, b\frac{z}{a}) = e^z$

ولإيجاد الحل الثاني لمعادلة غوص في جوار الصفر نجري التحويل: $w = z^{1-c} . u$