المحاضرة السابعة عشر: * مفهوم القياس الخارجي لمجموعة $A \subseteq X$

* المجموعة المقيسة لقياس خارجي μ^*

* مبرهنتين.

* جبر بوريل.   * قياس لوبيغ على جبر بوريل.

* مثال:

- مفهوم القياس الخارجي لمجموعة $A \subseteq X$: $X \neq \phi$ ، $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{R}_+$: المرتبط

لتكن الحلقة: $\mathcal{A} \notin A \subseteq X$ عبارة $A \subseteq X$ فإنه

$\exists E_i : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

// عادة $X \in \mathcal{A}$ لما سوف احتمالات تكون $X = \bigcup E_i$ — تغطية دوما

• مواصفاتها:

$\mu^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \ , \ E_i \in \mathcal{A}$ — القياس الخارجي للمجموعة A

// إذا كانت $A \in \mathcal{A} \Leftarrow \mu^*(A) = \mu(A)$ //

- المجموعة المقيسة لقياس خارجي μ^*

ليكن $A \subseteq X$. نقول عن A إنها مقيسة إذا تحقق الشرط:

$$\forall E \subseteq X \Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

$$E = E \cap X$$

$$= E \cap (A \cup A^c) = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

المجموعتان X و ϕ تحققان الشرط. لذلك يمكننا أن نشكل جبر تام موجود

// إذا كانت μ قياسية: $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

// منطقي نضع ≥ لنتحقق أنها أصبح شرطاً أن تكون ≥

القياس الخارجي على المجموعات المقيسة تشكل قياس.

- مبرهنة: إذا أخذنا جميع المجموعات المقيسة بالنسبة لـ μ^* فهي إنها تشكل جبر تام على X.

- مبرهنة: مقصور القياس الخارجي μ^* على المجموعات المقيسة تشكل قياساً تاماً

$$\mu^*|_{m^*} = \mu$$

وبصيغة أخرى : $\mu^*: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$:

$\exists m^*$ جبر تام ، $\mu: m^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ، $\mu^*|_{m^*} = \mu$.

- جبر بوريل :

إذا كانت $X=\mathbb{R}$ ، $t = \{A : A\subseteq \mathbb{R}, \forall x\in A \Rightarrow \exists a,b\in\mathbb{R} ;$ $a<x<b$, $]a,b[\subseteq \mathbb{R}\}$

التوبولوجيا المألوفة لـ $\mathbb{R}$

// أصغر جبر أو جبر تام بالتوبولوجيا المألوفة هي مجموعة دفعتها // (المجموعات المفتوحة)

نرمز بـ $B(\mathbb{R})$ جبر بوريل . وكل مجموعة من هذا الجبر يسمى مجموعة بوريلية

- قياس لوبيغ : $\mu: B(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

طول المجالات هو طولها .

$\mathcal{L}[a,b] = b-a$

$\mathcal{L}[a,b[= b-a$, $\mathcal{L}]a,b] = b-a$

$\mathcal{L}]a,b[= b-a$.

مثال: احسب قياس المجموعة $A\subseteq\mathbb{R}$ حيث :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n+4^{-n}, n+2^{-2}]$$

ونضع ذلك بالرسم من أجل $n=1,2,3$.

الحل: $A_1 = [1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}]$ $A_2 = [2+\frac{1}{16}, 2+\frac{1}{4}]$

$A_3 = [3+\frac{1}{64}, 3+\frac{1}{8}]$ — — —

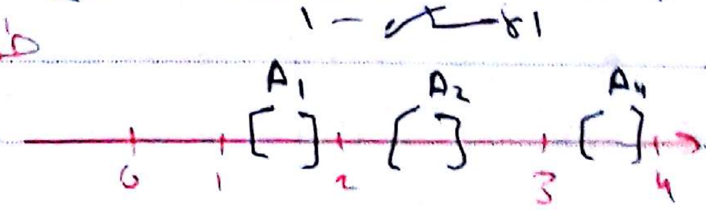
هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى ⇐ حسب تعريف القياس يكون قياس الاجتماع هو مجموع القياسات .

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}[n+4^{-n}, n+2^{-n}] = \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2^{-n}) - (n+4^{-n})]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$$ ⟸ متسلسلة هندسية أساسها أصغر من 1

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$ ⟸ مجموعها = الحد الأول / (1 − الأساس)

طول الكاملة



/ /

المحاضرة الثامنة عشر: • التابع المقيوس

• التابع الدرجي

• خواص التابع الدرجي

• التابع البسيط • تكامل لوبيغ للتابع البسيط.

* التابع المقيوس: ليكن لدينا الفضائين $(X, \mathcal{A}, \mu_1), (Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ فضائين مقيوسين (معرف عليهما قياس). نعرف التابع المقيوس: $f: X \longrightarrow Y$ نقول إنه f مقيوس إذا كانت الصورة العكسية لمجموعة المقيوسة في الفضاء الثاني هي مجموعة مقيوسة في الفضاء الأول: أي نعرف f تابعاً $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$.

$$\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) = A \in \mathcal{A}$$

* التابع الدرجي:

إذا افترضنا الفضاء الأول ($A \subseteq X$):

$$\forall x \in X : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

التابع الدرجي.

المستقيم R (إذا اعتبرناه فضاء مقيوس لجبر بوريل)

$$\chi_X(x) = 1 \qquad \chi_\emptyset(x) = 0$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

* خواص التابع الدرجي:

1) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

2) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ ؛ $A \cap B = \emptyset$

3) $A \subseteq B \Rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

4) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A \cap B}(x)$

5) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$

6) $\chi_{A \Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_{A \cap B}(x)$.

مناقشة: لخاصة الأولى:

• $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = 1$

$x \in A \ , x \in B \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \qquad \chi_B(x) = 1$

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ؛ $x \in A \cap B$

/ /

- $x \notin A\cap B \Rightarrow \chi_{A\cap B}(x)=0$

$x\notin A \wedge x\notin B \Rightarrow \chi_A(x)=0 \wedge \chi_B(x)=0$ إما

$0=\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=0\cdot 0=0$

$x\notin A \wedge x\in B \Rightarrow \chi_A(x)=0 \wedge \chi_B(x)=1$ أو

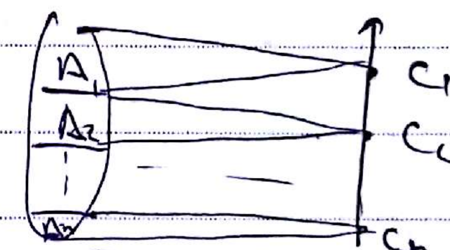
$0=\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=0\cdot 1=0$

$x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow \chi_A(x)=1 \quad \chi_B(x)=0$ أو

$0=\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=1\cdot 0=0.$

* التابع البسيط: ((هو تابع له مجموعة قيم منتهية)).

$f: X \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$



ملاحظة: كل تابع بسيط يمكن أن نكتب تركيب خطي لتوابع درجية.

$f: X\to\{c_1,\dots,c_n\}$; $f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\chi_{A_i}(x)$

$= c_1\chi_{A_1}(x)+c_2\chi_{A_2}(x)+\dots+c_n\chi_{A_n}(x)$

// بما أننا نريد تجزئة كل النقاط وكل نقطة المنطقة له صورة //

A_i تشكل تجزئة: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, $A_i\cap A_j=\emptyset;\ i\neq j$

$A_i=\{x\in X;\ f(x)=c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$.

شرح: $x\in X,\ x\in A_1 \Rightarrow f(x)=c_1\cdot 1+c_2\cdot 0+\dots=c_1$

$f(x)=\begin{cases}3 & 0\le x<4\\ 5 & 4\le x\le 7\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<3\\ 4 & 3\le x<6\\ 7 & 6\le x\le 7\end{cases}$

$f(x)=3\cdot\chi_{[0,4[}(x)+5\chi_{[4,7]}(x)$, $g(x)=2\chi_{[0,3[}(x)+4\chi_{[3,6[}(x)+7\chi_{[6,7]}(x)$

$f(x)+g(x)=(3+2)\chi_{[0,3[}(x)+(3+4)\chi_{[3,4[}(x)+(5+4)\chi_{[4,6[}(x)$

$+(5+7)\chi_{[6,7]}(x)$

// كل مجموعة من الأولى مع كل مجموعات الثاني
وهذا ما نضع الإشارة //

*تكامل لوبيغ للتابع البسيط: إذا كانت $X\neq\phi$ وكان لدينا فضاء القياس $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ، نعرف تكامل لوبيغ للتابع f البسيط في X بالنسبة للقياس μ بالشكل التالي: $\int_X f\,d\mu$ ط :

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mu(A_i)$$

$\{c_i\}$ مجموعة قيم التابع البسيط و A_i تشكل تجزئة لـ X ، $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ، $A_i\cap A_j=\phi$ ، $i\neq j$

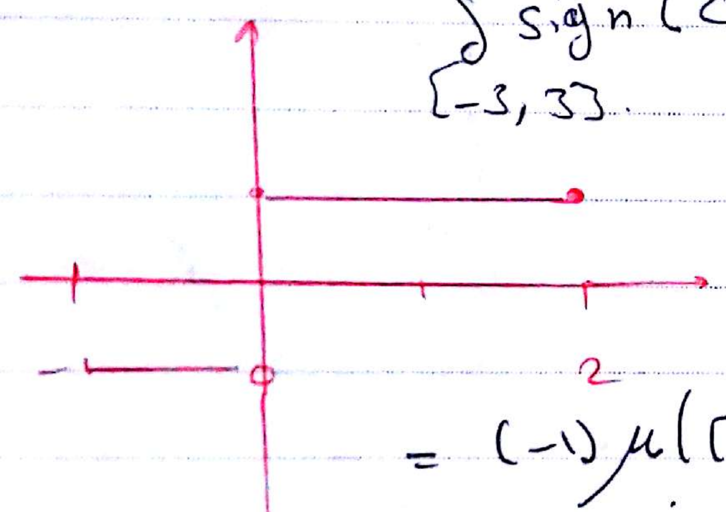
$$A_i=\{x\in X : f(x)=c_i\}$$

مثال: احسب التكامل: $\int_{[-1,2]} f\,d\mu$ ،

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 2\end{cases}$$

و $\int_{[-3,3]} \operatorname{sign}(\cos \pi x)\,d\mu$

دالة الإشارة: $\operatorname{sign}(w)=\begin{cases}-1 & w<0\\ 0 & w=0\\ 1 & w>0\end{cases}$



$$\int_{[-1,2]} f\,d\mu=(-1)\,\mu([-1,0[)+(1)\,\mu([0,2])=-1+1(2)=1$$

• يوجد توابع لا نستطيع حلها بريمان ونحلها بلوبيغ:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\quad , x\in[0,1]$$

(لأن قياس الـ $\mathbb{Q}$ صفر) $x\notin\mathbb{Q} \Leftarrow x\in[0,1]$

فلما $\mathbb{Q}$ قابلة للعد بالكثير في $[0,1]$ فهو صفر $[0,1]$ ناقص $C\mathbb{Q}$

$\Leftarrow 1$

والتمرين الثاني من أجل تابع $\cos\pi x$ يجب أن نأخذ مجالات الإشارة الجزئية.

/ /

المحاضرة التاسعة عشر والأخيرة

مراجعة تكامل لوبيغ:

• إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس نعرف تكامل لوبيغ للدالة البسيطة f على X بالشكل: $\int f\,d\mu = \sum c_i \mu(A_i)$ حيث A_i تشكل تجزئة لـ X

$\bigcup_{i}^{n} A_i = X \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \ , \ A_i = \{x \in X ; f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$

و c_i قيم الدالة f , أي $\{c_1, \dots, c_n\}$ $\quad f : X \to \overline{R}_+$

مثال: $\int\limits_{[-3,3]} \operatorname{Sign}(\cos \pi x)\, d\mu$,

$$\operatorname{Sign}(w) = \begin{cases} -1 & w < 0 \\ 0 & w = 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases}$$

دالة ذات قيم منقطعة

$= c_1 \boxed{\mu(A_1)} + c_2 \mu(A_2) + c_3 \mu(A_3)$

قبل قياس الصفر

تجزئة المجال ما الصفر

الباقي هي مجالات

$c_1 = -1 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 1$

$y = \cos \pi x$

ندرس إشارة الدالة $[-3, 3]$.

$\cos \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = -\frac{1}{2} \Leftarrow k = -1, \qquad x = \frac{1}{2} + k$

لنأخذ: $x = -\frac{3}{2} \Leftarrow k = -2 \qquad x = \frac{1}{2} \Leftarrow k = 0$

$x = -\frac{5}{2} \Leftarrow k = -3 \qquad x = \frac{3}{2} \Leftarrow k = 1$

$x = \frac{5}{2} \Leftarrow k = 2$

(إذا أخذنا $k = 3$ نحصل على x خارج المجال $[-3, 3]$)

$A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$

نأخذ $x = 0 \Leftarrow$ $y = 1$ وهي من القيم الزوجية , $y = 1 \Leftarrow x = 1$

$A_1 = [-3, -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup]\frac{5}{2}, 3]$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$A_3 =]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$

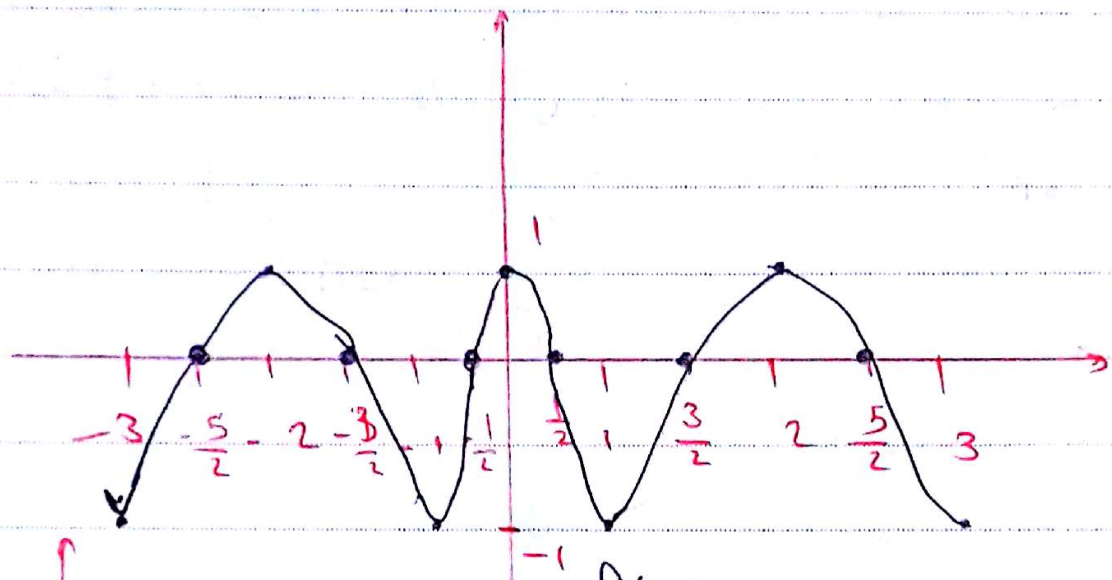
$\int\limits_{[-3,3]} \operatorname{Sign}(\cos \pi x)\, d\mu = -1\left[\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}\right] + 0(0) + 1\left[1 + 1 + 1\right] = -3 + 0 + 3$

$= 0$

/ /

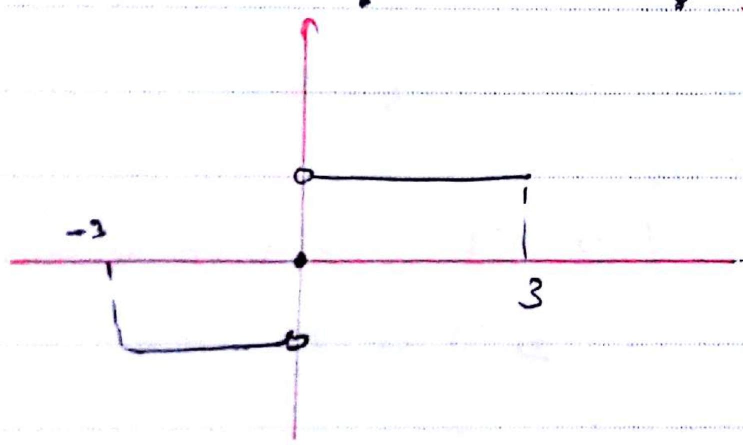
// لأن المجالات منفصلة فقياس الاتحاد هو مجموع القياسات. وقياس $A_2 = 0$ لأنها مجالات مغلقة لها نفس البداية والنهاية وقياس الاتحاد مجموع القياسات فمجموع أصفار هو صفر //

مثلاً لو هي أردنا حساب التكامل للدالة ج مع المحور ox فنحسب كل الأقسام.



مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -3 \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$



$A_1 = [-3, 0[\quad A_2 =]0] \quad A_3 =]0, 3]$

// للامتحان: النظري: تعاريف: د.ن.م، لوبيغ، استكمال، القياس.
الكوامل: فوائد د.ن.م + لوبيغ، معايير: د.ن.م 4، استكمال //