٢ . ١١ . ٤ . العلاقات التكرارية لدوال بسل:

Recurrence Relations for $J_n(z)$:

1) $J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$

مهم

2) $J'_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right]$

3) $\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^n J_{n-1}(n)$

4) $\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z)\right] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$

الإثبات:

—٣) من العلاقة (ii)، فإن:

$$J_{n+1}(z) = J_{n-1}(z) - 2J'_{n-1}(z) \qquad \text{(I)}$$

بطرح (I) من العلاقة (i) فنحصل على:

$$\therefore 0 = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J_{n-1}(z) + 2J'_n(z)$$

$$\therefore nJ_n(z) + zJ'_n(z) = zJ_{n-1}(z)$$

بضرب طرفي المعادلة في z^{n-1} فنجد أن:

$$\therefore nz^{n-1}J_n(z) + x^n J'_n(z) = z^n J_{n-1}(z)$$

أي إن:

$$\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^n J_{n-1}(z) \qquad \text{(iii)}$$

٤) بجمع العلاقتين (I) و (i) فنحصل على:

$$\therefore 2J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J'_n(z)$$

$$\therefore zJ'_n(z) - nJ_n(z) = -zJ_{n+1}(z)$$

بضرب طرفي المعادلة في z^{-n-1} فنحصل على:

$$\therefore z^{-n}J'_n(z) - nz^{-n-1}J_n(z) = -z^{-n}J_{n+1}(z)$$

$$\therefore \frac{d}{dz}\left[z^{-n}J_n(z)\right] = -z^{-n}J_{n+1}(z)$$

٢ . ١١ . ٥ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

أثبت أن:

$$1)\ J_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z-z\cos z}{z}\right)$$

$$2)\ J_{\frac{3}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{z\sin z+\cos z}{z}\right)$$

الحل:

من العلاقة (1) نجد:

$$J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)-J_{n-1}(z)$$

بوضع $n=\frac{1}{2}$ فنحصل على:

$$J_{3/2}(z)=\frac{1}{z}J_{1/2}(z)-J_{-1/2}(z)$$

ولدينا من المثال (٢):

$$\because J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad , \quad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{coz}$$

فإن:

$$\therefore J_{3/2}(z)=\frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z-z\cos z}{z}\right)$$

بوضع $n=-\frac{1}{2}$ في العلاقة (1) فنحصل على:

$$J_{1/2}(z)=-\frac{1}{z}J_{-1/2}(z)-J_{-3/2}(z)$$

$$J_{-3/2}(z)=-\frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\cos z+z\sin z}{z}\right)$$

مثال (٢):

أثبت أن:

$$1)\ \int z^n J_{n-1}(z)dz = z^n J_n(z) + C$$

$$2)\ \int z^{-n} J_{n+1}(z)dz = -z^{-n} J_n(z) + C$$

الإثبات:

من العلاقة (3):

$$\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^n J_{n-1}(z)$$

بالتكامل نجد أن:

$$\int z^n J_{n-1}(z)dz = z^n J_n(z) + C$$

كما أن من العلاقة (4):

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z)\right] = -z^n J_{n+1}(z)$$

بالتكامل مرة أخرى نحصل على:

$$\int z^{-n} J_{n+1}(z)dz = -z^{-n} J_n(z) + C$$

مثال (٣):

أوجد قيمة التكامل: $\int z^4 J_1(z)dz$

الحل:

$$\int z^4 J_1(z)dz = \int z^2 (z^2 J_1(z)dz)$$

بالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$u = z^2 \quad ; \quad dv = z^2 J_1(z)\, dz$$
$$du = 2zdz \quad ; \quad v = z^2 J_2(z)$$

$$\therefore I = z^4 J_2(z) - 2\int z^3 J_2(z) dz$$
$$= z^4 J_2(z) - 2z^3 J_3(z) + C$$

مثال (٤):

أثبت أن:

$$\text{(i) } J'_0 = -J_1 \quad , \quad \text{(ii) } J_2 - J_0 = 2J''_0$$

الإثبات:

(i) من العلاقة التكرارية الآتية:

$$zJ'_n = -nJ_n - zJ_{n+1}$$

بوضع $n = 0$ نحصل على:

$$zJ'_0 = -zJ_1 \Rightarrow J'_0 = -J_1 \qquad (2)$$

(ii) من العلاقة التكرارية الآتية:

$$2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$$

بالتفاضل نحصل على:

$$2J''_n = J'_{n-1} - J'_{n+1} \qquad (3)$$

بوضع $n - 1$، $n + 1$ بدلاً من n نحصل على:

$$2J'_{n-1} = J_{n-2} - J_n \qquad (4)$$
$$2J_{n+1} = J_n - J_{n+2} \qquad (5)$$

بالتعويض من (4)، (5) في (3) نحصل على:

$$2J''_n = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})$$
$$4J''_n = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2} \qquad (6)$$

بوضع $n = 0$ في (6) نحصل على:

$$4J''_0 = J_{-2} - 2J_0 + J_2$$

$$= (-1)^2 J_n - 2J_0 + J_2$$

$$4J''_0 = 2(J_2 - J_0) \Rightarrow 2J''_0 = J_2 - J_0$$

مثال (٥):

استخدم العلاقة التكرارية:

$$J_{n+1} = \frac{2n}{z} J_n - J_{n-1}$$

في التعبير عن J_4 بدلالة J_0، J_1.

الحل:

حيث إن:

$$J_{n+1} = \frac{2n}{z} J_n - J_{n-1}$$

بوضع $n = 3$ نحصل على:

$$J_4 = \frac{6}{z} J_3 - J_2$$

بوضع $n = 2$ نحصل على:

$$J_3 = \frac{4}{z} J_2 - J_1$$

$$\therefore J_4 = \frac{6}{z}\left[\frac{4}{z} J_2 - J_1\right] - J_2$$

$$= \left[\frac{24}{z^2} - 1\right] J_2(z) - \frac{6}{z} J_1(z)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على:

$$J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$J_4(z) = \left(\frac{24}{z^2} - 1\right)\left(\frac{2}{z}J_1(z) - J_0(z)\right) - \frac{6}{z}J_1(z)$$
$$= \left(\frac{48}{z^2} - \frac{8}{z}\right)J_1 - \left(\frac{24}{z^2} - 1\right)J_0$$

مثال (٦): سؤال دورة

باستخدام العلاقتين:

$$\text{(i)}\ \frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d}{dz}(z^{-n} J_n) = -z^{-n} J_{n+1}$$

أثبت أن:

$$\frac{d}{dz}\left(J_n^2 + J_{n+1}^2\right) = 2\left(\frac{n}{z}J_n^2 - \frac{n+1}{z}J_{n+1}^2\right)$$

الحل:

من (i) ، (ii) نحصل على:

$$J_n'(z) = -\frac{n}{z}J_n(z) + J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

$$J_n'(z) = \frac{n}{z}J_n(z) - J_{n+1}(z) \qquad (2)$$

بوضع $n + 1$ بدلاً من n في العلاقة (1) نحصل على:

$$J_{n+1}' = \frac{-(n+1)}{z}J_{n+1} + J_n \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{d}{dz}\left[J_n^2 + J_{n+1}^2\right] = 2J_nJ_n' + 2J_{n+1}J_{n+1}'$$

$$= 2J_n\left[\frac{n}{z}J_n - J_{n+1}\right] + 2J_{n+1}\left[-\frac{n+1}{z}J_{n+1} + J_n\right]$$

$$= 2\left(\frac{n}{z}J_n^2 - \frac{n+1}{z}J_{n+1}^2\right)$$

مثال (٧):

باستخدام المعطيات (ii)، (i) في المثال السابق أثبت أن:

$$\frac{d}{dz}[zJ_nJ_{n-1}] = z[J_n^2 - J_{n+1}^2]$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}[zJ_nJ_{n+1}] = J_nJ_{n+1} + z(J'_nJ_{n+1} + J_nJ'_{n+1})$$

$$= J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(zJ'_n) + J_n(zJ'_{n+1}) \qquad (1)$$

ومن العلاقتين (ii), (i) نجد أن:

$$zJ'_n = nJ_n - zJ_{n+1} \qquad (2)$$

$$zJ'_n = -nJ_n + zJ_{n+1} \qquad (3)$$

بوضع $n + 1$ بدلاً من n في (3) نحصل على:

$$zJ'_{n+1} = -(n+1)J_{n+1} + zJ_n \qquad (4)$$

باستخدام zJ'_n , zJ'_{n+1} من (2)، (4) في (1) نحصل على:

$$\frac{d}{dz}[zJ_nJ_{n+1}] = J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(nJ_n - zJ_{n+1}) + J_n(-(n+1)J_{n+1} + zJ_n)$$

$$= z[J_n^2 - J_{n+1}^2]$$

مثال (٨):

إذا كان $n > -1$ أثبت أن:

$$\int_0^z z^{n+1} J_n(z)dz = z^{n+1} J_{n+1}(z)$$

الحل: بما أن:

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

بوضع $n + 1$ بدلاً من n في (1) نحصل على:

$$\frac{d}{dz}(z^{n+1} J_{n+1}) = z^{n+1} J_n(z) \qquad (2)$$

بالتكامل من صفر إلى z نحصل على:

$$\int z^{n+1} J_n(z)dz = z^{n+1} J_{n+1}(z)$$

مثال (٩):

أثبت أن:

$$\text{(i)} \ \frac{d}{dz}(zJ_1(z)) = zJ_0(z)$$

$$\text{(ii)} \ \int_0^b zJ_0(az)dz = \frac{b}{a} J_1(ab)$$

الحل:

حيث إن:

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على:

$$\frac{d}{dz}(zJ_1) = zJ_0$$

بوضع $\alpha z = t$ أي $adz = dt$ فنجد أن:

$$\int_a^b zJ_0(az)dz = \frac{1}{a^2}\int_a^{ab} tJ_0(t)dt$$

وباستخدام الجزء (1) نحصل على:

$$\int_a^b zJ_0(az)dz = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab}\frac{d}{dt}(tJ_1)dt = \frac{1}{a^2}\left[tJ_1\right]_0^{ab} = \frac{1}{a^2}\left(abJ_1(ab)-0\right)$$

$$\therefore \int_0^b zJ_0(az)dz = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

وحيث $J_1(0)=0$.

مثال (١٠):

أثبت أن:

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dz}(J_0(z)) = -J_1(z)$$

$$\text{(ii)}\quad \int_a^b J_0J_1dz = \frac{1}{2}\left[J_0^2(a)-J_0^2(b)\right]$$

الحل:

الجزء (i): حيث إن:

$$\frac{d}{dz}(x^{-n}J_n(z)) = -z^nJ_{n+1}(z) \qquad (1)$$

بوضع $n=0$:

$$\frac{d}{dz}(J_0(z)) = -J_1(z) \qquad (2)$$

الجزء (ii) باستخدام مثال (٧) نحصل على:

$$\int_a^b J_0(z)J_1(z)dz = -\int_a^b J_0(z)J_0'(z)dz = \left[\frac{J_0^2(z)}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[J_0^2(b)-J_0^2(a)\right]$$

مثال (١١):

عبر عن $\int J_3(z)dz$ بدلالة $J_2(z)$، $J_1(z)$.

الحل:

باستخدام العلاقة:

$$\frac{d}{dz}(z^{-n}J_n(z)) = -z^{-n}J_{n+1}$$

بالمكاملة نحصل على:

$$\int z^{-n}J_{n+1}(z) = -z^{n}J_n(z) \qquad (1)$$

$$\int J_3(z)dz = \int z^2(z^{-2}J_3(z))dz = z^2(-z^{-2}J_2(z)) - \int 2z(-z^2J_2(z))dz$$

بالتكامل بالتجزئة وباستخدام (1)، $n = 2$ نحصل على:

$$\int J_3(z)dz = -J_2(z) + \int z^{-1}J_2(z)dz = -J_2(z) + 2(-z^{-1})J_1(z)) + C$$

ومن العلاقة التكرارية:

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \qquad (3)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على:

$$\frac{2}{z}J_1(z) = J_0(z) + J_2(z)$$

$$J_2(z) = \frac{2J_1(z)}{z} - J_0(z) \qquad (4)$$

باستخدام (4) في (2) فنجد أن:

$$\int J_3(z)dz = -\left(\frac{2J_1(z)}{z} - J_0(z)\right) - 2\frac{J_2(z)}{z} + C$$

$$= J_0(z) - \frac{4J_1(z)}{z} + C$$

حيث C ثابت اختياري.

مثال (١٢):

أثبت أن:

a) $\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2J_2(z) \cos 2\theta + 2J_4(z) \cos 4\theta + \ldots$

b) $\sin(z\sin \theta) = 2J_1(z) \sin \theta + 2J_3(z) \sin 3\theta + 2J_5(z) \sin 5\theta + \ldots$

الحل:

نفرض أن $t = e^{i\theta}$ وبالتعويض في الدالة المولدة نحصل على:

$$e^{\frac{1}{2}z(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\cos n\theta + \sin n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\theta}$$

$\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) = \{J_0(z) + [J_{-1}(z) + J_1(z)]\cos\theta + [J_{-2}(z) + J_2(z)]\cos 2\theta + \ldots\} + i\{(J_1(z) - J_{-1}(z))\sin\theta + (J_2(z) - J_{-2}(z))\sin 2\theta + \ldots\}$

وحيث أن $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ فنحصل على:

$\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) = \{J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\theta + \ldots\} + i\{2J_1(z)\sin\theta + 2J_3(z)\sin 3\theta + \ldots\}$

وبمساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي ينتج المطلوب.

مثال (١٣):

برهن صحة العلاقة:

$$16J_\upsilon''''(z) = J_{\upsilon-4}(z) - 4J_{\upsilon-2}(z) + 6J_\upsilon(z) - 4J_{\upsilon+2}(z) + J_{\upsilon+4}(z)$$

حيث υ ثابت كيفي.

الحل:

we have: $2J'_\upsilon(z) = J_{\upsilon-1}(z) - J_{\upsilon+1}(z)$ حسب الخاصة 2

$$\Rightarrow 2J''_\upsilon(z) = J'_{\upsilon-1}(z) - J'_{\upsilon+1}(z)$$

$$\Rightarrow 4J''_\upsilon(z) = 2J'_{\upsilon-1}(z) - 2J'_{\upsilon+1}(z)$$

$$\Rightarrow 4J''_\upsilon(z) = J_{\upsilon-2}(z) - J_\upsilon(z) - J_\upsilon(z) + J_{\upsilon+2}(z)$$

$$= J_{\upsilon-2}(z) - 2J_\upsilon(z) + J_{\upsilon+2}(z)$$

نشتق فنجد:

$$\Rightarrow 4J'''_\upsilon(z) = J'_{\upsilon-2}(z) - 2J'_\upsilon(z) + J'_{\upsilon+2}(z)$$

$$\Rightarrow 8J'''_\upsilon(z) = 2J'_{\upsilon-2} - 4J'_\upsilon(z) + 2J_{\upsilon+2}(z)$$

$$\Rightarrow 8J'''_\upsilon(z) = J_{\upsilon-3}(z) - J_{\upsilon-1}(z) - 2J_{\upsilon-1}(z) + 2J_{\upsilon+1}(z) + J_{\upsilon+1}(z) - J_{\upsilon+3}(z)$$

$$= J_{\upsilon-3}(z) - 3J_{\upsilon-1}(z) + 3J_{\upsilon+1}(z) - J_{\upsilon+3}(z)$$

نشتق طرفي المعادلة الأخيرة ونضرب بـ (2):

$$16J''''_\upsilon(z) = 2J'_{\upsilon-3}(z) - 3(2)J'_{\upsilon-1}(z) + 3(2)J'_{\upsilon+1}(z) - 2J'_{\upsilon+3}(z)$$

$$= J_{\upsilon-4}(z) - J_{\upsilon-2}(z) - 3J_{\upsilon-2}(z) + 3J_\upsilon(z) + 3J_\upsilon(z)$$

$$- 3J_{\upsilon+2}(z) - J_{\upsilon+2}(z) + J_{\upsilon+4}(z)$$

$$= J_{\upsilon-4}(z) - 4J_{\upsilon-2}(z) + 6J_\upsilon(z) - 4J_{\upsilon+2}(z) + J_{\upsilon+4}(z)$$

مثال (١٤):

برهن أنه إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right] = z^{\upsilon-m} J_{\upsilon-m}(z)$$

الحل:

نبرهن باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

$$m = 0 \Rightarrow z^\upsilon J_\upsilon(z) = z^\upsilon J_\upsilon(z)$$

نفرض صحتها من أجل m ثم نبرهن صحتها لأجل m + 1:

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^{m+1}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=\frac{d}{zdz}\left[\left(\frac{d}{zdz}\right)^{m}\left(z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right)\right]$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^{m+1}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=\frac{d}{zdz}\left[z^{\upsilon-m}J_{\upsilon-m}(z)\right]$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon-m}J_{\upsilon-m}(z)\right]$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d}{zdz}\right)^{m+1}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=\frac{1}{z}\left[(\upsilon-m)z^{\upsilon-m-1}J_{\upsilon-m}(z)+z^{\upsilon-m}J'_{\upsilon-m}(z)\right]$$

$$=(\upsilon-m)z^{\upsilon-m-2}J_{\upsilon-m}(z)+z^{\upsilon-m-1}J'_{\upsilon-m}(z)$$

but: $J'_{\upsilon}(z)=J_{\upsilon-1}(z)-\frac{\upsilon}{z}J_{\upsilon}(z)$

$$J'_{\upsilon-m}(z)=J_{\upsilon-m}(z)-\frac{\upsilon-m}{z}J_{\upsilon-m}(z)$$

نعوض فنجد:

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^{m+1}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=(\upsilon-m)z^{\upsilon-m-2}J_{\upsilon-m}(z)+$$

$$+z^{\upsilon-m-1}\left[J_{\upsilon-m-1}(z)-\frac{\upsilon-m}{z}J_{\upsilon-m}(z)\right]$$

$$=(\upsilon-m)z^{\upsilon-m-2}J_{\upsilon-m}(z)+z^{\upsilon-m-1}J_{\upsilon-m-1}(z)-(\upsilon-m)z^{\upsilon-m-2}J_{\upsilon-m}(z)$$

$$=z^{\upsilon-m-1}J_{\upsilon-m-1}(z)$$

مثال (١٥):

برهن صحة العلاقة التالية:

$$J_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)$$

الحل:

سنبرهن صحة هذه العلاقة بطريقة مغايرة تماماً لما برهناه سابقاً. نعلم أن:

$$J_{3/2}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+5/2)}$$

لكن:

$$\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)=\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(n+3/2)(2n+1)!}{2^{n+1}.2^n.n!}\sqrt{\pi}$$

ومنه:

$$\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)=\frac{(2n+3)!}{4^{n+1}(2n+2)n!}\sqrt{\pi}$$

كما أن:

$$\frac{(-1)^n(z^2/4)^n}{n!\dfrac{(2n+3)!}{4^{n+1}(2n+2)n!}\sqrt{\pi}}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!}z^{2n}$$

ومن ثمَّ:

$$J_{3/2}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!}z^{2n}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{3/2}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!}z^{2n}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+2)}{(2n+3)!}z^{2n+2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sum_{n-1=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(+2n)}{(2n+1)!}z^{2n}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(+2n-1+1)}{(2n+1)!}z^{2n}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!}+1+\frac{1}{z}\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)-1\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)$$