البنى الجبرية ٢

3-5-2017

نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الثانية عشرة ◄ عنوان المحاضرة: اساس المثالي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مثال عن المثالية الأولية .
٢ـ تعريف المثالية معدومة القوى + مبرهنة .
٣ـ تعريف أساس المثالي (جذر المثالي).
٤ـ مبرهنتان تخصان جذر المثالي .

مثال : لتكن R المعرفة بالشكل التالي

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad : a, b, c \in Z \right\}$$

أثبت أن $P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : b \in Z \right\}$ مثالي في R ولكنها ليست أولية .

الحل : P مثالي محققة وضوحاً لنثبت أنها غير أولية :

لنأخذ المثاليين من الحلقة R فإذا كان :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : a, b \in Z \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad : b, c \in Z \right\}$$

سنأخذ الجداء

$$A.B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a.b + b.c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : a, b \in Z \right\} \subseteq P$$

(ولكن حسب التعريف اذا كان $A.B \subseteq P$ و أن $P \neq R$ فإنه اما $A \subseteq P$ أو $B \subseteq P$)
بينما هنا $A \nsubseteq P$, $B \nsubseteq P$ وبالتالي فإن P ليس مثالي أولي .

تعريف : نقول عن المثالية I أنها عديمة اذا كان كل عنصر من I هو عديم القوى ونقول عن المثالية اليسارية I في R أنها معدومة القوى اذا وجدة عدد طبيعي n بحيث تتحقق العلاقة $x_1 . x_2 \dots \dots \dots . x_n = 0$ لكل $x_i \in I$ حيث $1 \leq i \leq n$.

تمرين : ليكن $(R, + ,.)$ حلقة أثبت أن كل مثالية يسارية معدومة القوى تكون عديمة .

الحل : حتى تكون معدومة القوى يجب أن تتحقق العلاقة $x_1 . x_2 \dots \dots \dots . x_n = 0$

ليكن J مثالية يسارية معدومة القوى في الحلقة $(\mathrm{R}, + ,.)$ هذا يؤدي الى وجود عدد طبيعي n لأجله تكون $\mathrm{J}^{\mathrm{n}} = 0$ ومن ناحية ثانية اذا كان $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$ فإنه تحقق العلاقة $\mathrm{x.x.x} \dots \dots \dots . \mathrm{x} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}} \in \mathrm{J}^{\mathrm{n}} = 0$
اي أن كل عنصر من المثالية يكون معدوم (عديم القوى) أي أن المثالية اليسارية عديمة.

تذكرة مبرهنة اقليدس : ليكن p عدداً أولياً و $a, b \in Z$ عندئذ اذا كان p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ يكون إما يقسم a أو p يقسم b .

مبرهنة : لتكن R منطقة تكاملية ولتكن $0 \neq x \in R$ الشرط اللازم والكافي لكي يكون العنصر x أولياً R هو أن يكون المثالي xR أولياً في R .

البرهان : لزوم الشرط :(سنطبق المبرهنة في الصفحة الأولى في المحاضرة 11)

بفرض أن العنصر x أولياً R بما أن العنصر غير قابل للقلب في R فإن $xR \neq R$.
ليكن $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ وبفرض أن $\mathrm{a.b} \in \mathrm{xR}$ عندئذ يوجد $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$ بحيث $\mathrm{a.b} = \mathrm{xr}$ هذا يعني أن x يقسم الجداء $\mathrm{a.b}$ وبما أن x أولي هذا يعني أن x يقسم a أو x يقسم b (حسب مبرهنة اقليدس) بفرض أن x لا يقسم a وبالتالي x يقسم b في R عندئذ يوجد $c \in R$ بحيث $b = x.c$ أي أن $b \in x.R$ اذاً xR أولي في R .

كفاية الشرط : بفرض أن المثالي xR أولياً في R اي $xR \neq R$ وليكن $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ وبفرض أن العنصر x يقسم الجداء $\mathrm{a.b} \in \mathrm{R}$ عندئذ يوجد عنصر $d \in R$ بحيث تحقق الشرط $a.b = x.d \in xR$ وبما أن المثالي xR أولي عندئذ اما $a \in xR$ أو $b \in xR$ ولنفرض أن $a \notin xR$ عندئذ $b \in xR$ عندئذ يوجد $h \in R$ بحيث $b = x.h$ ومنه x يقسم b وبالتالي x أولي .

تعريف : لتكن R حلقة ولتكن A مثالياً في R عندئذ نسمي المجموعة $\{a : a \in R \ ; \exists n \in N^* \ ; a^n \in A\}$ أساس المثالي A أو جذر المثالي $\sqrt{A}$ ونرمز لها ب $rad\ A$.

مبرهنة : لتكن R حلقة و A مثالياً في R عندئذ الشروط الاتية محققة :

١) $rad\ A$ مثالي في R .
٢) $A \subseteq rad\ A$.
٣) $rad(rad\ A) = rad\ A$

البرهان :

١) (حتى يتم المطلوب يجب أن يتحقق أن شرطي المثالي)

بما أن A مثالي في R فإن $0 \in A$ وبالتالي المجموعة $rad\ A \neq \emptyset$ ليكن $x, y \in rad\ A$ عندئذ يوجد عددين $n, m \in N^*$ وتحقق $x^n, y^m \in A$ (حسب التعريف) ولنأخذ

$$\underbrace{(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^{(n+m)-k} (-y)^k}_{\text{منشور ذي الحدين}}$$

$$\Longrightarrow x - y \in rad\ A$$

لنطبق الشرط الثاني وليكن $a \in R$ ولنأخذ $(a.x)^n \in A$ ومنه $a.x \in rad\ A$ وبالتالي $rad\ A$ مثالي في R .

٢) $A \subseteq rad\ A$ محققة وضوحاً .

٣) حسب ٢ نجد أن $rad\ A \subseteq rad(rad\ A)$ ولنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $z \in rad(rad\ A)$ عندئذ يوجد $t \in N^*$ بحيث $z^t \in rad\ A$ وحسب تعريف $rad\ A$ يوجد عنصر $s \in N^*$ بحيث $(z^t)^s \in A$ وبالتالي $z \in rad\ A$ اي أن $rad(rad\ A) \subseteq rad\ A$ وبالتالي

$$rad(rad\ A) = rad\ A$$

مبرهنة : لتكن R حلقة و A مثالياً أولياً في R عندئذ : $A = rad\ A$

البرهان : $A \subseteq rad\ A$ محققة وضوحاً لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in rad\ A$ عندئذ يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$ وبما أن A مثالية أولية في R فإن $x \in A$ وبالتالي $rad\ A \subseteq A$ وبالتالي $A = rad\ A$.

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد ابو التوت