نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄المحاضرة السابعة عنوان المحاضرة :لصاقة مجموعة في فضاء طوبولوجي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالنقطة الملاصقة لمجموعة و لصاقة مجموعة في فضاء طوبولوجي و خواصها.

٢ـمبرهنة تبين أن اجتماع أي مجموعة في فضاء طوبولوجي مع تراكمها هي مجموعة مغلقة

٣ـ مبرهنة تبين أن لصاقة مجموعة تساوي اجتماع هذه المجموعة مع تراكمها

٤ـتعريف المجموعة الكثيفة في مجموعة

تعريف النقطة المُلاصقة لمجموعة:

ليكن (X,τ) فضاءً طوبولوجياً و $A \subseteq X$ نعرف لصاقة المجموعة A بأنها تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي A و نرمز لها بـ $\bar{A}$ (تدعى لصاقة مجموعة ببعض المراجع **غُلاقة مجموعة**) و ندعو كل نقطة من لصاقة المجموعة A بنقطة ملاصقة لـ A أي أن :

$$x \in \bar{A} \Rightarrow x \text{ ملاصقة لـ} A$$

ملاحظات و نتائج حول لصاقة مجموعة:

(المجموعة المغلقة تساوي لُصاقتها)

ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و المجموعتان $A,B \subseteq X$

1) المجموعة $\bar{A}$ مغلقة و هي أصغر مجموعة تحوي A

2) إذا كانت A مجموعة مغلقة فهذا يكافئ أن $A=\bar{A}$ (المجموعة المغلقة تساوي لصاقتها).

3) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

4) إذا كانت B مجموعة مغلقة و تحوي A فإن $A \subseteq \bar{A} \subseteq B$

مثال: لتكن $X=\{a,b,c\}$ و $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$ و (X,τ) فضاء طوبولوجي: أوجد

$\overline{\{a\}}$, $\overline{\{b\}}$, $\overline{\{b,c\}}$

الحل: لنوجد أولاً المفتوحات والتي هي $\emptyset$, X , $\{a\}$, $\{a,b\}$ ومن ثمَّ تكون المغلقات هي متمماتها أي :

X , $\emptyset$, $\{b,c\}$, $\{c\}$

لُصاقة $\{a\}$: هي أصغر مغلقة تحوي $\{a\}$ والمغلقة الوحيدة التي تحويها هي X أي $\overline{\{a\}}=X$

لُصاقة $\{b\}$: هي أصغر مغلقة تحوي $\{b\}$ والمغلقات التي تحويها هي $X,\{b,c\}$ أي $\overline{\{b\}}=\{b,c\}$

(اخترنا أصغر مغلقة بالنسبة لعلاقة الاحتواء)

لُصاقة $\{b,c\}$: لاحظ أنَّ $\{b,c\}$ مجموعة مغلقة وبالتالي ستساوي لُصاقتها أي $\overline{\{b,c\}}=\{b,c\}$

مثال :

لتكن $X\neq\emptyset$ و $(X,P(X))$ الطوبولوجيا المتقطعة على X عندئذٍ :

$$\forall A\subseteq X\Longrightarrow \bar{A}=A\ \&\ A^{\circ}=A$$

إن $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

إن A° أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

مثال : لنأخذ $X=\mathbb{N}$ و لنعرف عليها الطوبولوجيا المكونة من المجموعة الخالية و كل المجموعات

الجزئية من $\mathbb{N}$ التي متمماتها منتهية . أي $\tau=\emptyset\cup\{A\subseteq X : A^c \text{ منتهية}\}$ ، أوجد المجموعات التالية:

$$\{2,3,4\}^{\circ}\ ,\ \overline{\{2,3,4\}}\ ,\ \{2,3,4\}'$$

الحل : لنسمي أولاً $A=\{2,3,4\}$ ، لنبدأ:

- سنوجد أولاً داخل A أي سنوجد A° :

  إن A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A و لنبدأ المناقشة : إن أي مجموعة مفتوحة هي مجموعة من τ ، و أن أي مجموعة مفتوحة غير الـ $\emptyset$ هي من الشكل $\mathbb{N}\setminus S$ حيث S منتهية و بالتالي أي مجموعة مفتوحة غير المجموعة الخالية مستحيل أن تكون محتواة في A (غير منتهية لن تكون محتواة في المنتهية حتماً) و بالتالي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A هي الخالية ،

  إذاً $\boxed{A^{\circ}=\emptyset}$.
- سنوجد الآن لصاقة A أي سنوجد $\bar{A}$:

  إن $\bar{A}=A$ عندما و فقط عندما تكون A مغلقة و أنّ $A=\{2,3,4\}$ مغلقة لأنها منتهية (في هذا الفضاء المدروس) و بالتالي $\boxed{\bar{A}=A}$
- أخيراً سنوجد تراكم A أي سنوجد A' :

بشكل عام يجب دراسة كل عناصر الفضاء و التبين إذا كان كل عنصر من عناصر الفضاء الكلي يحقق شرط نقطة التراكم أم لا ....و لكن كون المجموعة A مغلقة هنا فنعلم حسم مبرهنة سابقة أن $A' \subseteq A$ و بالتالي يمكن هنا فقط دراسة عناصر A بدلاً من دراسة جميع عناصر الفضاء :

◄من أجل $x = 2$ نأخذ المجموعة $\mathbb{N} \setminus \{3,4\}$ فنجد أنها مجموعة مفتوحة تقاطعها مع $A \setminus \{2\}$ تساوي الخالية

$$\left(\left(\mathbb{N} \setminus \{3,4\}\right) \cap \left(A \setminus \{2\}\right) = \left(\mathbb{N} \setminus \{3,4\}\right) \cap \{3,4\} = \emptyset \right)$$

◄من أجل $x = 3$ نأخذ المجموعة $\mathbb{N} \setminus \{2,4\}$ فنجد أنها مجموعة مفتوحة تقاطعها مع $A \setminus \{3\}$ تساوي الخالية

$$\left(\left(\mathbb{N} \setminus \{2,4\}\right) \cap \left(A \setminus \{3\}\right) = \left(\mathbb{N} \setminus \{2,4\}\right) \cap \{2,4\} = \emptyset \right)$$

◄من أجل $x = 4$ نأخذ المجموعة $\mathbb{N} \setminus \{2,3\}$ فنجد أنها مجموعة مفتوحة تقاطعها مع $A \setminus \{4\}$ تساوي الخالية

$$\left(\left(\mathbb{N} \setminus \{2,3\}\right) \cap \left(A \setminus \{4\}\right) = \left(\mathbb{N} \setminus \{2,3\}\right) \cap \{2,3\} = \emptyset \right)$$

إذاً جميع نقاط A لم تحقق شرط نقطة التراكم و بالتالي $A' = \emptyset$.

مبرهنة :

لتكن (X,τ) فضاءً طوبولوجياً و $A \subseteq X$ عندئذٍ $A \cup A'$ مغلقة في X

البرهان :

لإثبات أن $A \cup A'$ مغلقة ، يكفي إثبات أن متممتها $(A \cup A')^c$ مفتوحة (تنتمي لـ τ) ،
ليكن $x \in (A \cup A')^c = A^c \cap (A')^c$

$$\Longrightarrow x \in A^c \quad \wedge \quad x \in (A')^c$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x \notin A \qquad\quad x \notin A'$$

و الآن لكون $x \notin A'$ نستنتج أنه :

$$\exists B \in \tau : x \in B : B \cap \underbrace{(A \setminus \{x\})}_{=A:x \notin A} = \emptyset$$
$$\Longleftrightarrow \exists B \in \tau : x \in B : B \cap A = \emptyset$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{B \subseteq A^c}$$

و لنبرهن الآن أن $B \subseteq (A')^c$
ليكن $y \in B \in \tau$ عندئذٍ:

$$B \cap (A \setminus \{y\}) \subseteq B \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow B \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset$$

$y \notin A'$ (حسب تعريف النقطة الحدية)

$$\Leftrightarrow \boxed{B \subseteq (A')^c}$$

مما سبق نجد أن نجد أن :

$$\forall x \in (A \cup A')^c ; \exists B \in \tau : x \in B \, , B \subseteq A^c \ \wedge \ \ B \subseteq (A')^c$$

وهذا يكافئ أن $\boxed{B \subseteq (A^c \cap (A')^c) = (A \cup A')^c}$ و بالتالي $(A \cup A')^c \in \tau$ (مفتوحة) و بالتالي $A \cup A'$ مغلقة .

((لقد أثبتنا أن كل نقطة من المجموعة $(A \cup A')^c$ هي داخلية فيها و بالتالي هي مفتوحة))

مبرهنة : ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ عندئذٍ $\bar{A} = A \cup A'$

البرهان : إن $A \cup A'$ مجموعة مغلقة تحوي A و بما أن $\bar{A}$ أصغر مجموعة تحوي A فإن

$$\boxed{\bar{A} \subseteq A \cup A'}$$

$$1)\ A \subseteq B \Longrightarrow A' \subseteq B'$$

$$2)\ B \text{ مغلقة} \Longrightarrow B' \subseteq B$$

يكون لدينا $A \subseteq \bar{A}$ و بالتالي حسب ما سبق يكون $A' \underbrace{\subseteq}_{(1)} (\bar{A})' \underbrace{\subseteq}_{(2)} \bar{A}$ لأن $\bar{A}$ مغلقة .

$$\Longrightarrow \boxed{A \cup A' \subseteq \bar{A}} \Longrightarrow \boxed{\boxed{\bar{A} = A \cup A'}}$$

نتائج :

ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي و $A, B \subseteq X$ و $x \in X$ عندئذٍ :

١- $\bar{X} = X$ (أصغر مجموعة مغلقة تحوي X) و $\bar{\emptyset} = \emptyset$ (أصغر مجموعة مغلقة تحوي الخالية)

٢- $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

٣- $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

٤- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

٥- $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B \in \tau \, , x \in B \ \Longrightarrow B \cap A \neq \emptyset$

سنبرهن بعض هذه الخواص :

برهان ٣:

$A \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq B \subseteq \bar{B}$ ($\bar{B}$ مغلقة تحوي A و بالتالي $\bar{A} \subseteq \bar{B}$)

برهان ٤:

$x \in \bar{A} = A \cup A'$

- في حال $x \in A$ يتم المطلوب $(\forall B \in \tau, x \in B\,; B \cap A \neq \emptyset)$
- في حال $x \notin A$ فإن : $x \in A'$ و أن : $A \setminus \{x\} = A$ و بالتالي :
  $\forall B \in \tau\,, x \in B\,; B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

تعريف (المجموعة الكثيفة في مجموعة): ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي و أيضاً $A, B \subseteq X$ بحيث

$A \subseteq B$ نقول عن A إنها كثيفة في B إذا تحقق أنه $B \subseteq \bar{A}$

و نقول عن A إنها كثيفة في X إذا تحقق $\bar{A} = X$ ((يجب قبل التحقق من الكثافة أن تكون $A \subseteq B$ ..)

فائدة ^_^ :

$\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$، رأينا ذلك في التحليل الحقيقي إذ أنَّ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ لأنَّ كل مفتوحة في $\mathbb{R}$ غير خالية تحوي عدداً لا نهائياً من الأعداد العادية أي ستتقاطع مع $\mathbb{Q}$.

معنى المجموعة الكثيفة هو أنها تُلاقي أي مجموعة مفتوحة غير الخالية (تتقاطع مع أي مجموعة مفتوحة غير الخالية).

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي