◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة السابعة عشر ((والأخيرة)) ◄ عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- حل تمارين .
٢- وملاحظات وتصحيح بعض الأخطاء التي وردت .

"التمرين الأول"

M نقطة مادية تتحرك على المنحني المعين بمعادلة المخروط $x^2+y^2-z^2=0$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F}=-mk^2r.\vec{I}$ ، **أكتب معادلات الحركة بالاعتماد على معادلات لاغرانج** .

"الحل"

من معادلة المخروط نجد ... $x^2+y^2=z^2$ وهي معادلة مخروط اسطواني .

لذلك سنأخذ الاحداثيات الاسطوانية (r,θ,z)

نعلم أن طويلة شعاع الموضع $r^2=z^2 \Longrightarrow |r|=\sqrt{z^2} \Longrightarrow |r|=\sqrt{x^2+y^2}$

$$r=z \Longrightarrow r'=z'$$

ووجدنا سابقاً ((بالمحاضرة (١٣))) أن السرعة بالإحداثيات الاسطوانية تعطى بالشكل :

$$v^2=r'^2+r^2.\theta'^2+z'^2 \Longrightarrow v^2=2r'^2+r^2.\theta'^2$$

ونعلم ان الطاقة الحركية $T=\frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow T=\frac{1}{2}m[2r'^2+r^2.\theta'^2]$

$$u=\int -mk^2r.dr \Longrightarrow u=-\frac{m}{2}k^2r^2$$

ونعلم أن معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial (T+u)}{\partial q}=0$ وهنا لدينا درجتين حرية :

الاولى على (r)

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'}-\frac{\partial (T+u)}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'}=2mr' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'}=2mr''$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=mr.\theta'^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial r}=-mk^2r$$

وبالتالي نعوض في معادلات لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'}=\frac{\partial (T+u)}{\partial r}$ فنجد :

$$2mr''=mr.\theta'^2-mk^2r \Longrightarrow 2r''=r.\theta'^2-k^2r \Longrightarrow \boxed{r''=\frac{r(\theta'^2-k^2)}{2}}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ، نحلها لإيجاد معادلة الحركة على r.

الثانية على (θ)

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'}-\frac{\partial (T+u)}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'}=mr^2\theta'$$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'}=mr^2\theta'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=0$$

وبالتعويض بمعادلات لاغرانج نجد : $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'}=\frac{\partial (T+u)}{\partial \theta}$ فنجد

$$mr^2\theta''=0 \Longrightarrow mr^2\theta'=c \Longrightarrow \boxed{r^2\theta'=c_1} \quad ; c_1=\frac{c}{m}$$

وهي خاضعة لقانون السطوح ، وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ،

بحلها نوجد معادلة الحركة على θ .

"التمرين الثاني"

M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m تتحرك على المنحني $y=\sqrt{x}$ حيث oy شاقولي صاعد
أكتب معادلات تكامل الطاقة الحركية للنقطة المادية M ثم احسب السرعة للنقطة M في الموضع (o)
علماً ان النقطة تركت في الموضع $x=1$ بدون حركة ابتدائية .

" الحل"

نعلم أن عبارة تكامل الطاقة هي $T=u+h$

وعبارة الطاقة الحركية $T=\frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow T=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2)$

$$y=\sqrt{x} \Longrightarrow y^2=x \Longrightarrow x'=2yy' \Longrightarrow x'^2=4y^2y'^2$$

$$v^2=x'^2+y'^2 \Longrightarrow v^2=(4y^2y'^2+y'^2)$$

$$T=\frac{1}{2}m(4y^2y'^2+y'^2) \Longrightarrow T=\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1)$$

$$u=-\int mg.dy \Longrightarrow u=-mgy$$

ومنه بالتعويض في قانون تكامل الطاقة الحركية نجد :

$$\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1)=-mgy+h\dots\dots(1)$$

من شروط البدء $x=1$ من نص المسألة وبتعويضها بـ $y=\sqrt{x}$ نجد $y=1$

$$0=-mg+h \Longrightarrow h=mg$$

وبالتالي بالتعويض بالعلاقة (1) نجد.. $\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1)=-mgy+mg$

$$\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1)=mg(-y+1) \Longrightarrow \frac{1}{2}y'^2(4y^2+1)=g(-y+1)$$

$$\frac{1}{2}v^2=g(-y+1) \Longrightarrow v^2=2g(-y+1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{v=\sqrt{2g(-y+1)}}$$

وهي سرعة النقطة المادية .

" التمرين الثالث "

لتكن M نقطة مادية كتلتها m ثقلها مهمل ملازمة بدون احتكاك للمحور ox يدور في مستوي ثابت بدوران منتظم سرعته ω يؤثر في M قوة مركزية دافعة متناسبة عكساً مع مربع البعد عن المركز.
أكتب معادلات الحركة اعتماداً على معادلات لاغرانج .

" الحل"

M نقطة تتحرك على ox والمستوي يدور حول oz ، وبالتالي عندنا درجة حرية واحدة .

من عبارة الطاقة الحركية نجد ... $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2) \Longrightarrow T = \frac{1}{2}mv_a^2$

السرعة النسبية هي $\boxed{v_r^2 = x'^2} \Longrightarrow v_r = x' \Longrightarrow v_r = x' + y'$

حيث $y' = 0$ لان الحركة فقط على المحور ox

والسرعة الجرية هي $\boxed{v_e^2 = x^2\omega^2} \Longrightarrow v_e = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\omega\vec{j}$

ومنه $v_a^2 = x'^2 + x^2\omega^2 \Longrightarrow v_a^2 = v_r^2 + v_e^2$

وبتعويض بقانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(x'^2 + x^2\omega^2)}$$

وبما أن القوة دافعة متناسبة عكساً مع مربع البعد فإنها من الشكل :

$$F = \frac{m\lambda^2}{x^2}r \Longrightarrow u = \int \frac{m\lambda^2}{x^2}r\,.dx$$

$$u = m\lambda^2 r \int x^{-2}\,dx \Longrightarrow \boxed{u = -m\frac{\lambda^2}{x}r}$$

نعلم أن معادلة لاغرانج هي : $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{\partial(T+u)}{\partial x}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\lambda^2}{x^2}r$$

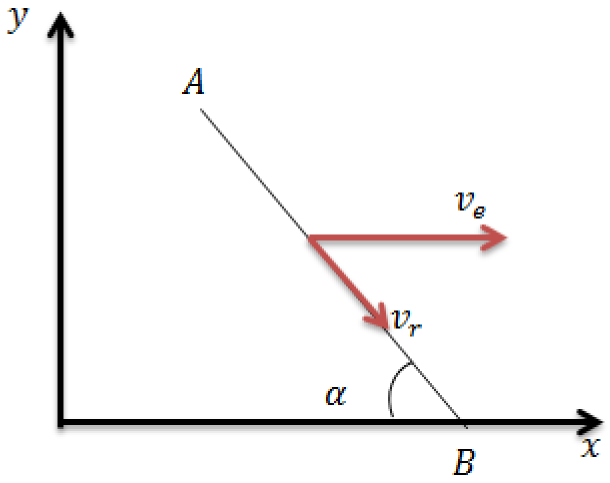
وبالتعويض في معادلات لاغرانج نجد :

$$mx'' = m\left(\omega^2 x + \frac{\lambda^2}{x^2}r\right) \Longrightarrow \boxed{x'' = \omega^2 x + \frac{\lambda^2}{x^2}r}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ، لحلها نضرب الطرفين بـ($2x'$)

وبالتالي نحصل على معادلة الحركة .

" وظيفة التمرين الثاني من المحاضرة العاشرة "



M نقطة مادية تتحرك على المستوي AB يميل عن الأفق بزاوية α وبسرعة نسبية قيمتها $v_r = \sqrt{2gy}$ حيث g ثابت و y ترتيب النقطة على المحور y المتجهة نحو الأسفل والمستوي AB يتحرك على ارض افقية وبجهة حركة M عليه بسرعة ثابتة v_e .

حدد المسار المطلق للنقطة M وكذلك سرعتها المطلقة لحظة تماس هذه النقطة على الارض مع العلم أن النقطة M كانت لحظة البدء على ارتفاع h عن الارض.

" الحل "

M تتحرك بسرعة نسبية v_r على المستوي AB والمستوي يتحرك على الارض الافقية بسرعة جرّية v_e

سرعة المستوي على الارض الافقية (x) هي السرعة الجرية $v_e = x'$ $\Longleftarrow$

$$x = v_e t \ldots (1)$$

سرعة النقطة على المستوي هي السرعة النسبية $y' = v_r . \sin\alpha$

$$y' = \sqrt{2gy}.\sin\alpha \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \sqrt{2g}.\sin\alpha.\sqrt{y} \Longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2g}.\sin\alpha.dt$$

$$y^{-\frac{1}{2}}.dy = \sqrt{2g}.\sin\alpha.dt \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} 2y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g}.\sin\alpha.t + c$$

وبأخذ الثابت يساوي $c = 0$ نجد.... $2y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g}.\sin\alpha\,.\,t \ldots\ldots (2)$

بتربيع العلاقة (2) نجد: $4y = 2g.\sin^2\alpha\,.\,t^2 \Rightarrow y = \frac{g}{2}\sin^2\alpha\,.\,t^2$

وبتربيع العلاقة (1) نجد : $x^2 = v_e^2 t^2$

لإيجاد المسار نحذف الزمن وبتقسيم على $\frac{y}{x^2}$ نجد :

$$\frac{y}{x^2} = \frac{g\sin^2\alpha.t^2}{2v_e^2 t^2} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{g\sin^2\alpha}{2v_e^2} \Rightarrow y = \frac{g\sin^2\alpha}{2v_e^2}.x^2$$

وبفرض(($f = \frac{g\sin^2\alpha}{2v_e^2}$)) نجد... $y = f.x^2$ المسار هو عبارة عن معادلة قطع مكافئ

أما السرعة المطلقة لحظة التماس مع الأرض نبدل كل $h = y$ فنجد

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \Rightarrow \boxed{v_a = \sqrt{v_e^2 + 2gh}}$$

"انتهى المقرر"

ملحق تصويب أخطاء

تصويب خطأ في المحاضرة الثانية في الصفحة((٤))

الخطأ : $t = 0 \begin{cases} x = x_0\,, y = y_0\,, z = z_0 \\ x' = x_0'\,, y' = y_0\,, z' = z_0 \end{cases}$

الصواب: $t = 0 \begin{cases} x = x_0\,, y = y_0\,, z = z_0 \\ x' = x_0'\,, y' = y_0'\,, z' = z_0' \end{cases}$

التمرين الخامس في المحاضرة الثانية عشر الصفحة((٦))

((يوجد خطأ في السؤال تم تصحيحه في الدورات وحله))

تصويب خطأ في المحاضرة الثانية عشر في الصفحة((٤))

بالإصلاح والمطابقة نجد :

$$v^2 = l^2[\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta] + l^2[\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

الخطأ :

الصواب : بالإصلاح والمطابقة نجد :

$$v^2 = l^2\left[\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\underline{\theta'^2}\right]$$
$$+l^2\left[\sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\,\underline{\varphi'^2} + \cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\,\underline{\varphi'^2}\right] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

تصويب خطأ في المحاضرة الثامنة في الصفحة ((٤))

الخطأ :

$$2\vec{u} = 2\frac{d\sigma}{dt} = \vec{r}\times\vec{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

الصواب :

$$2\vec{u} = 2\frac{d\sigma}{dt} = \vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

تصويب خطأ في المحاضرة السادسة في الصفحة ((٧و٨)) وفي الدورة الثانية ٢٠١٦ السؤال الاول

الخطأ :

$$kz' = (g + kv_0\, sin\,\alpha)\, e^{-kt} - g \;\Rightarrow\; g + kz' = (g + kv_0\, sin\,\alpha)\, e^{-kt}$$

الصواب :

$$kz' = (g + kv_0\, sin\,\alpha)\, e^{-kt} - g \;\Leftarrow\; g + kz' = (g + kv_0\, sin\,\alpha)\, e^{-kt}$$

الخطأ :

$$dz = \left(\frac{g+kv_0\, sin\,\alpha}{k}\, e^{-kt}\right)dt - \frac{g}{k}\,dt \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{g+kv_0\, sin\,\alpha}{k}\, e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

الصواب :

$$dz = \left(\frac{g+kv_0\, sin\,\alpha}{k}\, e^{-kt}\right)dt - \frac{g}{k}\,dt \;\Leftarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{g+kv_0\, sin\,\alpha}{k}\, e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

بالمكاملة نجد :

نعتذر عن وجود بعض الأخطاء التي تداركناها بفضل الله من خلال المحاضرات

وإليكم بعض الملاحظات

"ملاحظات هامة لحل المسائل "

◀إذا كانت النقطة المادية تدور حول محور ما بسرعة زاوية ω يجب حساب السرعة المطلقة
$v_a = v_r + v_e$

◀إذا كانت النقطة المادية تدور حول محور ما بسرعة زاوية ω ، وطلب إيجاد معادلات الحركة فقط ((لم يذكر بطريقة معادلات لاغرانج)) نستخدم قانون التحريك الاساسي

$$m\overrightarrow{\Gamma_r} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_c}$$

ونوجد $(v_a, v_r, v_e\ )$

◀إذا طلب في نص المسألة أكتب معادلة الحركة حسب معادلات لاغرانج ثم احسب معادلة تكامل الطاقة

نوجد معادلة الحركة حسب لاغرانج $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial(T+u)}{\partial q} = 0$

◀ثم نوجد معادلة الحركة حسب تكامل الطاقة $T = u + h$

ملاحظة يامة : يجب الانتباه إلى الأشعة حتى ولم يتم وضعهم من قبل الدكتور أو في المحاضرات في وقت الامتحان .

انتهى المقرر... نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم المحتوى العلمي لهذا المقرر بجودة عالية و بشرح كافٍ ☺

و ندعو لكل زملائنا بالتوفيق و النجاح و نتمنى لكم امتحاناً موفقاً و مثمراً ☺

إعداد: محمد علي فليون – رهف سليمان