نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄المحاضرة الثالثة عشر عنوان المحاضرة : تمرينات عن السطوح التكاملية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-بدأت محاضرتنا مع تمارين عن السطوح التكاملية .

٢-السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة.

٣-تمرين عن الفقرة السابقة.

مثال: أوجد السطح التكاملي للمعادلة $yp - xq = 0$ والمار بالمنحنيين المعينين بالمعادلتين

$$x^2 - z^2 = 1 \quad \& \, y = 0$$

الحل: لقد درسنا في المحاضرة السابقة إيجاد الحل العام لهذه المعادلة $yp - xq = 0$ وقد كان

$$F(C_1, C_2) = 0 \to F\left(z, \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0 : C_1 = z \;\; \&\& \; C_2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

ولدينا في هذه المسألة :

$$x^2 - z^2 = 1 \dots \dots (1) \;\&\&\; y = 0 \dots \dots (2) \;\&\&\; C_1 = z \dots \dots (3)$$

$$C_2' = \frac{x^2 + y^2}{2} \to 2C_2' = x^2 + y^2 \;\&\&\; C_2 = x^2 + y^2 \to C_2 = 2C_2' \dots (4)$$

نعوض (٢) في (٤) فيكون : $x^2 = C_2$ نعوض (٣) في (١) ومنه:

$$x^2 - C_1^2 = 1 \to x^2 = 1 + C_1^2 \xrightarrow{\text{ومنه كون } x^2 = C_2} C_2 = 1 + C_1^2$$

والآن نعوض كل من C_1, C_2 بما يساويه نجد :

$$x^2+y^2=1+z^2 \rightarrow x^2+y^2-z^2=1$$

وهي معادلة السطح التكاملي المطلوبة .

تمرين: أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية المعطاة كما يلي:

$$(2x-y-z)p+(2y-x-z)q=2z-x-y$$

والمار بالمستقيمان : $y=k \quad \&\& \quad x=0$

الحل: نكتب الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \rightarrow \frac{dx}{2x-y-z}=\frac{dy}{2y-x-z}=\frac{dz}{2z-x-y}$$

$$\xRightarrow{\text{وبالتالي حسب خواص التناسب}} \frac{dx+dy+dz}{2x-y-z+2y-x-z+2z-x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$\rightarrow dx+dy+dz=0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} x+y+z=C_1$$

نلاحظ أن : النسبة الأولى – الثانية = الثانية – الثالثة وبالتالي:

$$\frac{dx-dy}{2x-y-z-2y+x+z}=\frac{dy-dz}{2y-x-z-2z+x+y}$$

$$\frac{dx-dy}{3x-3y}=\frac{dy-dz}{3y-3z} \xRightarrow{\text{نضرب الطرفين ب 3}} \frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z} \xRightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

$$\ln(x-y)=\ln(y-z)+\ln(C_2) \rightarrow \ln(x-y)=\ln\big(C_2(y-z)\big) \rightarrow$$

$$x-y=C_2(y-z) \rightarrow C_2=\frac{x-y}{y-z} \xRightarrow{\text{أصبح لدينا المعادلات}} x=0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\&\&\ y=k \ldots\ldots(2)\ \&\&\ x+y+z=C_1 \ldots\ldots(3)\ \&\&\frac{x-y}{y-z}=C_2 \ldots\ldots(4)$$

ولدينا السطح التكاملي:

$$F(u,v)=0 \to F(C_1,C_2)=0 \to F\left(x+y+z,\frac{x-y}{y-z}\right)=0$$

من المعادلات الأربعة نعوض (١) و(٢) في (٣) ومنه: $C_1=z+k \to z=C_1-k$

نعوض (١) و(٢) في (٤) ومنه:

لدينا $C_1=x+y+z$: $C_2=-\frac{k}{k-C_1+k}=-\frac{k}{2k-C_1}=\frac{k-y}{y-z}$

$$\frac{k-y}{y-z}=-\frac{k}{2k-x-y-z}\xRightarrow{\text{ولكن } k=y}\boxed{\boldsymbol{\frac{x-y}{y-z}=-\frac{y}{y-x-z}}}$$

وهي معادلة السطح التكاملي المطلوبة .

تمرين : أوجد السطوح التكاملية للمعادلة :

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)p+q=2$$

نكتب الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

من (٢) و (٣) نجد : $\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}\to 2dy=dz\to 2dy-dz=0\xRightarrow{\text{بالمكاملة}}2y-z=C_1$

نضرب dx ب (-1) و dy ب (-1) أي (البسط والمقام) ونجمعهم ومنه:

$$\frac{-dx-dy+dz}{-1-\sqrt{z-x-y}-1+2}=\frac{-dx-dy+dz}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}$$

$$= -\frac{d(z-x-y)}{\sqrt{z-x-y}} = dy \xRightarrow{\text{بالمكاملة(حيث أن البسط هو مشتق مضمون الجذر)}} -2\sqrt{z-x-y}$$

$$= y + C_2 \to C_2 = -2\sqrt{z-x-y} - y$$

والسطوح التكاملية هي :

$$F(C_1, C_2) = 0 \to \boxed{\boldsymbol{F\left(2y - z, -2\sqrt{z-x-y} - y\right) = 0}}$$

تمرين: أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية(<u>سؤال دورة</u>) :

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = (x^2 + y^2)z$$

والمار بالمنحنيين المعينين بالمعادلتين التاليتين:

$$x + y = 0 \quad \&\& \quad z = 1$$

الحل: نكتب الجملة الملحقة ومنه :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \to \frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

نضرب الأولى ب y والثانية ب x ومنه:

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + xyz - yx^3 - xyz} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z} \xRightarrow{\text{نخرج } yx \text{ عامل مشترك من المقام}}$$

$$\frac{ydx + xdy}{yx(y^2 + z - x^2 - z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z} \to \frac{ydx + xdy}{yx(y^2-x^2)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$\frac{ydx + xdy}{yx(y^2-x^2)} = -\frac{dz}{(y^2-x^2)z} \to \frac{ydx + xdy}{yx} = -\frac{dz}{z} \ldots\ldots\ldots (\#)$$

نعلم أن (#) هي $d(xy) = xdy + ydx$ وبالتالي $\frac{d(xy)}{yx} = -\frac{dz}{z}$ بالمكاملة:

$$\ln|xy| = -\ln|z| + \ln(C_1) \to \ln(x.y) = \ln\left(\frac{1}{z}\right) + lnC_1 \xrightarrow{\text{وحسب خواص اللوغاريتم}}$$

$$xy = \frac{C_1}{z} \to \boldsymbol{x.y.z = C_1}$$

الآن نضرب النسبة (١) ب x والثانية ب y ونطرح (٣) منهما:

$$\frac{xdx + ydy - dz}{x^2(y^2+z) - y^2(x^2+z^2) - (x^2-y^2)z} = \frac{xdx + ydy - dz}{0} \to$$

$$xdx + ydy - dz = 0 \xRightarrow{\text{نكامل}} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z = C_2' \xRightarrow{\text{نضرب الطرفين ب٢}}$$

$$x^2 + y^2 - 2z = C_2' : \quad C_2 = 2C_2'$$

وبالتالي تكون معادلة السطوح التكاملية هي :

$$F(C_1, C_2) = 0 \to \boxed{\boldsymbol{F(x.y.z, x^2 + y^2 - 2z) = 0}}$$

ولإيجاد السطح التكاملي المار بالمنحنيين: لدينا أولاً

$$x + y = 0 \dots \dots .(2) \ \ \&\&\& \ \ z = 0$$

ولدينا أيضاً: $x.y.z = C_1 \dots \dots \dots (3) \ \ \&\& \qquad x^2 + y^2 - 2z = C_2 \dots \dots \dots (4)$

لنأخذ المعادلات الوسيطية للمنحني $z = 1$ وهي $\boldsymbol{x = t} \ \&\& \ \boldsymbol{y = -t}$ نعوض في (٣)

$$\boldsymbol{C_1 = -t^2} \xRightarrow{\text{نعوض المعادلات الوسيطية في}(\mathbf{4})} t^2 + t^2 - 2 = C_2 \to C_2 = 2t^2 - 2$$

$$\boldsymbol{C_2 = -2C_1 - 2}$$

والآن نعوض كل من C_1, C_2 بما يساويان ومنه:

وهي معادلة السطح المطلوب : $\boxed{\boldsymbol{-2x.y.z - 2 = x^2 + y^2 - 2z}}$

تمارين تترك للقارئ : أوجد الحل العام (السطوح التكاملية) للمعادلات الآتية :

1) $y.zp - xzq = e^z$ 2) $(y - z^2)p + xz = xy$

3) $(\sin^2 x)p + (\tan z)q = \cos^2 z$ 4) $(y + z)p + (x + z)q = x - y$

5) $2(y - x) + 2p(y + z) - 2q(x + z) = 0$ 6) $x^2p + y^2q = (x + y)z$

السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة:

لنفرض أنه لدينا مجموعة من السطوح التابعة لوسيط ما معطاة بالعلاقة :

$$\varphi(x, y, z) = C \dots\dots\dots (1)$$

عندئذ إن السطوح المتعامدة مع هذه السطوح (١) تكون سطوحاً مولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة الملحقة التي هي :

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

مثال: أوجد السطوح المتعامدة مع مجموعة السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية الملحقة التالية:

$$z(x + y) = C(3z + 1)$$

والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين : $x^2 + y^2 = 1 \;\&\&\; z = 1$

الحل: في البداية سوف نقوم بعزل C ومن ثم نأخذ الجملة الملحقة:

$$C = \frac{z(x + y)}{3z + 1} = \varphi(x, y, z)$$

وبالتالي السطوح المتعامدة لمجموعة السطوح التي نحصل عليها من الجملة الملحقة التالية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

$$\to \frac{dx}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{dy}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{dz}{\frac{(x+y)(3z+1)-3z(x+y)}{(3z+1)^2}}$$

هنا طبقنا مشتق كسر

$$\xrightarrow{\text{نقسم على } (3z+1)^2} \frac{(3z+1)dx}{z} = \frac{(3z+1)dy}{z} = \frac{(3z+1)^2 dz}{(x+y)(3z+1-3z)} =$$

$$\frac{dx}{z(3z+1)} = \frac{dy}{z(3z+1)} = \frac{dz}{x+y}$$

١ ٢ ٣

من النسبتين (١) و(٢) لدينا $dx = dy$ ومنه بالمكاملة :

$$x = y + C_1 \to \boxed{\boldsymbol{x - y = C_1}}$$

الآن نضرب (١) ب x والثانية ب y والثالثة ب $-z(3z+1)$ ومنه:

$$\frac{xdx + ydy - z(3z+1)dz}{(3xz^2 + xz) + (3yz^2 + yz) - 3xz^2 - xz - 3yz^2 - yz}$$

$$= \frac{xdx + ydy - z(3z+1)}{0}$$

$$\xRightarrow{\text{وبالتالي}} xdx + ydy + (-3z^2 - z)dz = 0$$

$$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^3 - \frac{z^2}{2} = C_2' \xRightarrow{\text{نضرب ب}(2)} x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = C_2 \ : C_2 = 2C_2'$$

ومنه السطوح التكاملية:

$$F(C_1, C_2) = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{F(x - y, x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2) = 0}}$$

لإيجاد معادلة السطح المار بالدائرة :

$$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots (1) \ \ \&\& \ \ z = 1 \dots\dots\dots (2)$$

لدينا أيضاً : $C_2 = x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 \dots\dots\dots (3)$ ومنه نعوض(١)و(٢) في (٣):

$$C_2 = 1 - 2(1) - (1) = -2 \rightarrow -2 = x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2$$

وهي معادلة السطح المطلوبة : $\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 + 2 = 0}}$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه