البنى الجبرية ٢

15-5-2017

نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄المحاضرة: الرابعة عشر والأخيرة ◄عنوان المحاضرة : حلقة الحدوديات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف حلقة الحدوديات بالمتحول x.

٢ـمبرهنة

تعريف : لتكن R حلقة نسمي الحلقة S التي تم بناءها في مبرهنة سابقة بحلقة الحدوديات بالمتحول x على الحلقة R ونرمز لها بالرمز $R[x]$ ونسمي عناصر $R[x]$ حدوديات على الحلقة R ونرمز لها بالرمز $f(x)$ حيث

$$f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_1.x + a_0 \in R[x]$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i \quad : \quad i = 0,1,\ldots\ldots n$$

نرمز ب n بدرجة الحدودية ل $f(x)$ بالرمز $\deg(f) = n$ ونسمي العناصر $R \ni a_i \neq 0$ بأمثال الحدودية $f(x)$ أو معاملات الحدودية $f(x)$.

نتيجة : ليكن $R[x]$ حلقة الحدوديات على الحلقة R عندئذ يكون :

١) $\forall a \in R$ فإن $\deg(a) = 0$

٢) نصطلح على أن $\deg(0) = -\infty$

٣) اذا كان

$$f(x), g(x) \in R[x] \ : \ \begin{cases} f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i \\ g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i.x^i \end{cases}$$

فإن

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{r}(a_i+b_i).x^i \ : \ r=\max(m,n)$$

وكذلك

$$f(x).g(x)=\sum_{k=0}^{m+n}d_k.x^k \ : \ d_k=\sum_{i+j=k}a_i.b_j$$

ملاحظة : ليكن $(R,+,.)$ حلقة ولنعتبر أنه لا فرق بين أي عنصر من R وليكن $a\in R$ عندئذ يكون

لدينا العنصر a بكثير الحدود $(a,0,0,,,,,,,)$ واذا رمزنا لكثير الحدود $(0,1,0,0,0,,,,)$ ب x و

$(0,0,1,0,0,,,,)$ ب x^2 و $(0,0,0,1,0,,,,)$ ب x^3 ....

مبرهنة : ليكن $(R,+,.)$ حلقة ولتكن $\boldsymbol{S}$ مجموعة كل كثيرات الحدود على الحلقة $\boldsymbol{R}$ واذا كانت $*,\boldsymbol{\Delta}$

عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على المجموعة S بالشكل الآتي :

$$(a_n)*(\mathrm{b_n})=(a_n+\mathrm{b_n})$$

$$(a_n)\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{b_n})=r_n \quad ; \quad r_n=\sum_{i+j=n}a_i.b_j \quad : \quad n=0,1,2,,,,,$$

عندئذ يتحقق ما يلي :

$(\mathrm{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ حلقة واذا كانت الحلقة $(R,+,.)$ بمحايد فإن الحلقة $(\mathrm{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ ايضاً بمحايد

البرهان : $\forall a_n,b_n,c_n\in S$

- إن $(\mathrm{S},*)$ زمرة تبديلية لأنه عنصرها المحايد هو كثير الحدود الصفري ومعكوس أي عنصر من S وليكن a_n هو $-a_n$ في R بالنسبة لعملية لجمع $+$

$$(a_n)*(0)=(a_n+0)=a_n$$
$$(a_n)*(-a_n)=(a_n+(-a_n))=0$$

وأن العملية تبديلية لأن

$$(a_n)*(\mathrm{b_n})=(a_n+\mathrm{b_n})=(\mathrm{b_n}+a_n)=(\mathrm{b_n})*(a_n)$$

وأن العملية تجميعية

$$((a_n)*(\mathrm{b_n}))*(\mathrm{c_n})=((a_n+\mathrm{b_n}))+(c_n)=(a_n)+((\mathrm{b_n})+(c_n))$$
$$=(a_n)*((\mathrm{b_n})*(c_n))$$

وواضح أن العملية داخلية ومنه فإن $(S,*)$ زمرة تبديلية.

- **لنثبت أن** $(S\,,\boldsymbol{\Delta})$ شبه زمرة (واضح أن العملية المعرفة داخلية لنثبت أنها تجميعية)

أي لنبرهن أن هذه المساواة صحيحة

$$(a_n)\boldsymbol{\Delta}[(\mathrm{b_n})\boldsymbol{\Delta}(c_n)]=[(a_n)\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{b_n})]\boldsymbol{\Delta}(c_n)$$

من أجل الطرف الأول لنفرض أن $w_n=(\mathrm{b_n})\boldsymbol{\Delta}(c_n)$ وأن $(a_n)\boldsymbol{\Delta}(w_n)=u_n$

(حسب تعريف $\boldsymbol{\Delta}$ يمكننا تسمية العنصرين بعنصر واحد ومن ثم على شكل متسلسلة)

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n\geq 0$ يكون لدينا

$$u_n=\sum_{i+q=n}a_i.w_q$$
$$=\sum_{i+q=n}a_i.\left(\sum_{j+k=q}b_j.c_k\right)=\sum_{i+q=n}\ \sum_{j+k=q}a_i.(b_j.c_k)$$
$$=\sum_{i+j+k=n}a_i.b_j.c_k$$

من أجل الطرف الثاني لنفرض أن $r_n=(a_n)\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{b_n})$ وأن $(r_n)\boldsymbol{\Delta}(c_n)=v_n$

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n\geq 0$ يكون لدينا

$$v_n=\sum_{h+k=n}r_h.c_k$$
$$=\sum_{h+k=n}(\sum_{j+j=h}a_i\,.b_j).c_k=\sum_{h+k=n}\ \sum_{j+j=h}a_i.(b_j.c_k)$$
$$=\sum_{i+j+k=n}a_i.b_j.c_k$$

ومنه $u_n = v_n$ وبالتالي العملية تجميعية محققة .

اختيار الأدلة يكون عشوائي وقمنا فقط بتعويض المتسلسلات بأماكنها حسب تعريف العملية بالمبرهنة

- بقي اثبات أن الضرب توزيعي على الجمع أي $\boldsymbol{\Delta}$ توزيعي على $*$ **(من اليمين واليسار)**

$$(a_n)\boldsymbol{\Delta}[(\mathrm{b_n}) * (c_n)] = (a_n)\boldsymbol{\Delta}\left[(\mathrm{b_n}) \underbrace{+}_{\text{حسب تعريف } *} (c_n)\right] = S_n$$

ونريد اثبات أن

$$[\underbrace{(a_n)\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{b_n})}_{r_n}] * [\underbrace{(a_n)\boldsymbol{\Delta}(c_n)}_{t_n}] = r_n \underbrace{+}_{\text{حسب تعريف } *} t_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i+j=n} a_i.\left(b_j + c_j\right) = \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i.b_j}_{r_n} + \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i.c_j}_{t_n}$$

$$= r_n + t_n = r_n * t_n$$

بنفس الطريقة نبرهن على أن $\boldsymbol{\Delta}$ توزيعي على $*$ من اليمين . **ومنه** $(\mathbf{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ **حلقة**

من أجل الطلب الثاني لنفرض أن الحلقة $(\mathbf{R},+,.)$ بمحايد

بما أن الحلقة $(\mathbf{R},+,.)$ بمحايد فإن عنصر الوحدة هو الواحد $\mathbf{1}$ فإن كثير الحدود الصفرية فيها عنصر الوحدة $\boldsymbol{I_0} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{I_n} = \mathbf{0}$ ومن الحلقة $(\mathbf{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ حلقة بمحايد .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد ابو التوت