Subject:

Date : / /

محاضرة رابعة عشر

تمرين: تم اختبار لقاح جديد ضد الزكام وتم إعطاء اللقاح لـ 100 شخص وتم مراقبتهم لمدة عام وقد نجا 68 منهم من الإصابة بالزكام ولنفرض أننا نعلم من معلومات سابقة أن احتمال عدم الإصابة بالزكام وهو بصورة طبيعية وبدون استخدام اللقاح هو 0.50 والمطلوب أي النتائج يمكن استخلاصها من هذه التجربة حول فاعلية اللقاح.

الحل: نفرض أن X متغير عشوائي يدل على عدد الذين نجوا من الإصابة بالزكام خلال العام عندئذ سيكون لـ X التوزيع الثنائي الحدين بالوسيطين $n=100$ و $P=0.50$ أي $X \sim b(100, 0.50)$ وبما أن $nP = (100)(0.50) = 50 > 5$

$nq = (100)(0.5) = 50 > 5$

فإنه يمكن التقريب التوزيع X من الحداني إلى الطبيعي بالوسيطين $\mu = nP$ و $\sigma = npq$

أي $X \sim N(50, 25)$ $N(50,25)$ $b(100, 0.50)$

$$P(X \geq 68) = P(Y \geq 68 - \tfrac{1}{2}) \underset{\text{بالمعايرة}}{=} P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \geq \frac{67.5-50}{5}\right)$$

$$P(Z \geq 3.5) = 1 - \phi(3.5) = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

النتيجة تدل على اعتراف بفاعلية اللقاح في الوقاية من الزكام تحت فرض أن $P = 0.50$

الفصل السادس

عزوم العينة ودوالها

تعاريف: العينة العشوائية: نقول عن المجموعة من المتغيرات العشوائية $X_1, \dots, X_n$ إنها عينة من الحجم n لمتغير عشوائي X إذا كانت هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها ولها نفس التوزيع المتغير X أي $f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i)$

مثال: إذا كان X يدل على وزن طالب في جامعة $X \sim N(70, 25)$

عندئذ اختيار مجموعة طلاب من 100 طالب تعتبر عينة عشوائية لهذا المتغير

٢- الإحصاء (الإحصاءة): نعرف كل دالة عينة عشوائية لا تتعلق بـ معلمات مجهولين إحصاء (إحصاءة) فإن اكانت $X_1 , \dots , X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X فإن الدوال

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} X^2 - \mu\sigma \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} X_i - \sigma^2$$

ليست إحصاءات طالما أن μ و σ مجهولين ولكنها تصبح إحصاءات عندما تصبح μ و σ معلومتين و إن الدوال

$$X_5 + X_6 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

كلها إحصاءات

٣- تعريف المتوسط للعينة: إذا كانت $X_n , \dots , X_1$ عينة عشوائية لمتغير X فإننا نعرف متوسط هذه العينة $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ هو إحصاء (إحصاءة)

٤- تباين عينة: إذا كانت $X_n , \dots , X_1$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X عندئذ تباين العينة هو إحصاء (إحصاءة)

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

الصيغة المختزلة بالشكل

$$S^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)} \quad *$$

برهان *:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}$$

$$= \sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X} = \sum X_i - n\bar{X} = \frac{n\sum X_i^2 - n^2\bar{X}^2}{n}$$

$$= \frac{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{n}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\frac{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{n}\right]$$

انتهت المحاضرة الرابعة عشرة

Subject:

Date : / /

$\phi\left(\frac{T_1-360}{45.83}\right) = \phi(-z_0) = 0.05$

$P\left(Z < \frac{T_1-360}{45.83}\right) = P(Z < -z_0) = 1 - P(Z < z_0) = 0.05$

$\Rightarrow P(Z < z_0) = 0.95 = \phi(z_0) = \phi(1.645)$

$\Rightarrow \frac{T_1-360}{45.83} = -z_0 = -1.645 \Rightarrow T_1 = 284,61$

انتهت المحاضرة السابعة عملي

المحاضرة الخامسة عشرة

توزيع كاي - تربيع وتوزيع t - ستيودنت: وهما توزيعان مستخدمان على نطاق واسع في الإحصاء التطبيقي لتعريفهما نبدأ بتعريف دالة غاما المعرفة بالعلاقة

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$

وبإنجاز هذا التكامل نجد أن: $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

ويمكن برهانه بحساب التكامل بالتجزئة

خواص دالة غاما:

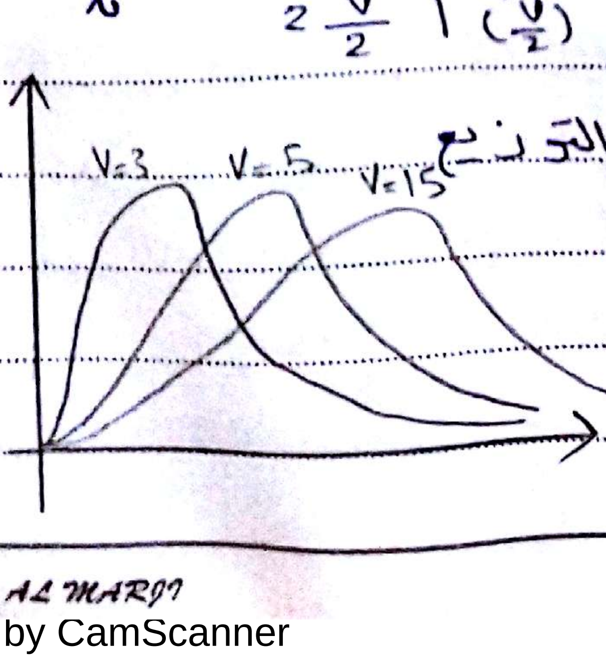
1) إذا كان n عدد طبيعي فإن $\Gamma(n) = n!$ ويكون $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ أي أن $\int e^{x} x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$

توزيع كاي - تربيع χ^2:

تعريف: نقول إن المتغير ع.ع إلى التوزيع كاي تربيع (ك ت) بدرجة حرية v إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \; ; \; 0 < x$



ودرجة الحرية v هنا تعبر عن وسيط هذا التوزيع

بعض خواص χ^2:

1) إذا كان $Z \sim N(0,1)$ فإن $Z^2 \sim \chi^2(1)$

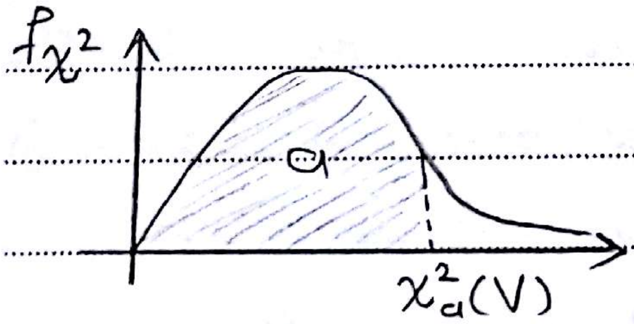
2) إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ مستقلة

ولها التوزيع الطبيعي المعياري فإن للمتغير العشوائي $K^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ يكون له التوزيع $\chi^2(n)$

3) إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين لهما التوزيع كاي تربيع بدرجتي حرية V_1 و V_2 على الترتيب ومستقلين فإن مجموعهما $X_1 + X_2$ توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $V = V_1 + V_2$

4) إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين وكان $X_1 \sim \chi^2(V_1)$ ومجموعهما $X_1 + X_2$ توزيع كاي تربيع بدرجة حرية V سيكون لـ X_2 توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $V_2 = V - V_1$ بشرط $V > V_1$

5) إذا كان X يتبع كاي تربيع فإن $E(X) = V$ و $V(X) = 2V$



جدول توزيع كاي مربع:

$$P(X \le \chi^2_a(V)) = a$$

تساوي المساحة المحصورة تحت f_X وعلى يسار القيمة $\chi^2_a(V)$ عند درجة حرية V

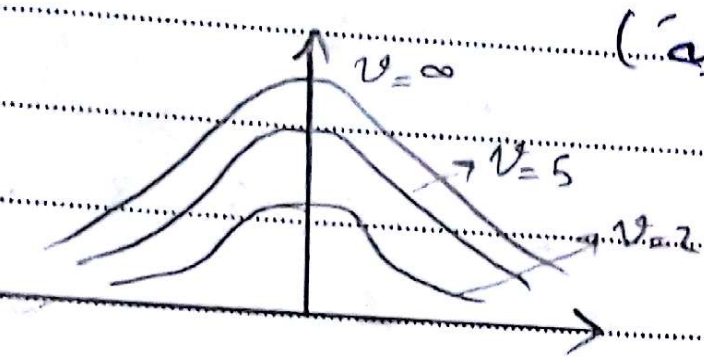
درجة الحرية V \ a	$\chi^2_{0.005}(V)$	$\chi^2_{0.01}(V)$	$\chi^2_{0.025}(V)$	———	$\chi^2_{0.995}(V)$
1					
⋮					
60					

حل: $P(X \le \chi^2_{0.01}(2)) = P(X \le 0.020) = 0.01$

توزيع t ستيودنت:

تعريف: نقول عن المتغير العشوائي X التوزيع t ستيودنت بـ V درجة حرية إذا كانت له دالة كثافة

$$f_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{V+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{V}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{V}\right)^{V+\frac{1}{2}} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

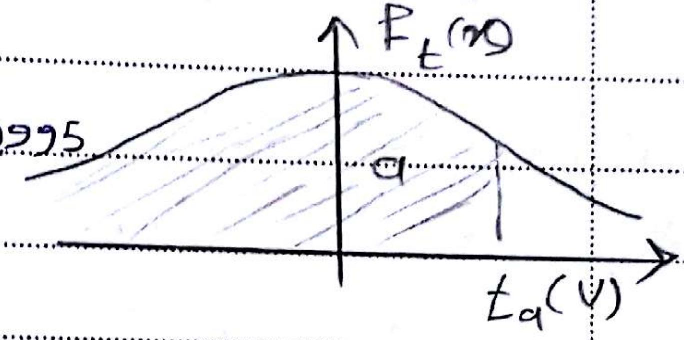


و V هو وسيط هذا التوزيع (درجة الحرية)

المنحنى متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

ويعتمد على الوسيط V

a / V درجة الحرية	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.65}$	...	$t_{0.9995}$
1					
2					
⋮					
30					
⋮					
∞					



مثال:

$$P(X < t_{0.60}(15)) = 0.60$$

$$\Rightarrow P(X < 0.258) = 0.60$$

أي أن $t_{0.6}(15) = 0.258$ والجدول موجود بالكتاب

مبرهنة: (هي مهمة جداً لتوزيع t ستيودنت): إذا كان Z متغير عشوائي طبيعي معياري وكان X متغير عشوائي له التوزيع $\chi^2(V)$ وكان المتغيرين مستقلين فإنه يكون المتغير العشوائي T له التوزيع t ستيودنت درجة حرية V

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{V}}}$$

توزيعات بعض الإحصاءات

أ- توزيع متوسط العينة:

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ حسب المبرهنة السابقة $X_1, \dots, X_n$ لمتغير عشوائي فإنه يكون لمتوسط العينة $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ أما إذا كانت العينة العشوائية $X_1, \dots, X_n$ لمتغير عشوائي ما X متوسطه μ وتباينه σ^2 فإنه سيكون لمتوسط العينة $\bar{X}$: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ وذلك حسب مبرهنة النهاية المركزية بشرط أن $n \geq 30$

Subject: Date : / /

تمرين 1: $X_1, \dots, X_9$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي طبيعي X متوسطه $\mu = 3$ وتباينه $\sigma^2 = 16$، اوجد احتمال أن يكون متوسط العينة $P(0.5 < \bar{X} < 6)$

الحل: لدينا $X \sim N(3, 16)$ وبالتالي $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Leftarrow \bar{X} \sim N(3, \frac{16}{9})$

$$\Rightarrow P(0.5 < \bar{X} < 6) = P\left(\frac{0.5-3}{\frac{4}{3}} < \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{6-3}{\frac{4}{3}}\right)$$

$= P(-1.875 < Z < 2.25) = \phi(2.25) - \phi(-1.875)$

$= \phi(2.25) - (1 - \phi(1.875)) = 0.9878 - (1 - 0.9696)$

$= 0.9574$

تمرين 2: إذا كان متوسط الدخل الأسبوعي لمجموعة كبيرة من العمال المهرة هو 1200 والانحراف المعياري قدره 100 فما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكبر من 1180 ل.س

الحل: نفرض أن X متغير عشوائي يدل على دخل عامل فإن $E(X) = 1200$ و $\sigma_X = 100$ ونفرض أن $X_1, \dots, X_{64}$ عينة لـ X عندئذ بما أن $n = 64 > 30$ فإنه يمكننا تطبيق مبرهنة النهاية المركزية فيكون لمتوسط دخل العينة التوزيع الطبيعي $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ مع $\bar{X} \sim N(1200, \frac{10000}{64})$

$P(\bar{X} \geq 1180) = 1 - P(\bar{X} < 1180) = 1 - P\left(Z < \frac{1180 - 1200}{\frac{100}{8}}\right)$

$= 1 - P(Z < -1.6) = P(Z < 1.6) = \phi(1.6) = 0.9452$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة

المحاضرة السادسة عشرة

2- توزيع مجموع عناصر العينة:

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي طبيعي X متوسطه μ وتباينه σ^2 فإنه حسب مبرهنة سابقة $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

أما إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير X متوسطه μ وتباينه σ^2

AL MARJI

Subject:

Date : / /

وكان $n \geq 30$ فإنه حسب مبرهنة النهاية المركزية يكون $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

تمرين: يتوزع وزن أمتعة المسافر جواً وفق توزيع طبيعي بمتوسط 20 كغ وانحراف معياري 5 كغ ويتسع نوع من الطائرات لـ 100 راكب ما هو احتمال أن يتجاوز الوزن الكلي لأمتعة المسافرين 2150 كغ

الحل: نفرض X متغير عشوائي يدل على وزن أمتعة المسافر فيكون لـ X التوزيع الطبيعي $X \sim N(20,5)$ ولتكن $X_1, \dots, X_{100}$ عينة عشوائية لهذا المتغير (أوزان أمتعة الركاب) فيكون الوزن الكلي للأمتعة $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$ له توزيع طبيعي

$$Y=\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow Y \sim N(200,2500)$$

∴ الاحتمال المطلوب

$$P(Y>1250) = 1-P(Y \leq 1250) = 1-P\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} \leq \frac{2150-2000}{50}\right)$$

$$= 1-P(Z \leq 3) = 1-\phi(3) = 1-0.9987 = 0.0013$$

تمرين: في عيادة أحد الأطباء 36 مراجعاً وقد بدأ استقبالهم في الثامنة صباحاً ففي أي ساعة سيكون متأكداً 99% من أنه سينهي عمله إذا كان يعلم من خبرته السابقة أن متوسط الزمن اللازم لمقابلة كل مريض هو 6 دقائق وبانحراف معياري دقيقتان

الحل: نفرض X متغير عشوائي يدل على زمن المقابلة المريض فيكون متوسطه $\mu=6$ وتباينه $\sigma^2=4$ ونفرض أن $X_1, \dots, X_{36}$ عينة عشوائية لهذا المتغير وبما أن $n=36>30$ باستخدام مبرهنة النهاية المركزية سيكون

$$Y=\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow Y \sim N((36)(6),(36)(4))$$

لنعين y

$$\Rightarrow Y \sim N(216,144)$$

$$P(Y<y) = 0.99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{y-216}{12}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{y-216}{12}\right) = 0.99 \Rightarrow \phi(2.33) = 0.99$$

Subject: Date: / /

$\Rightarrow \frac{y-216}{12} = 2.33 \Rightarrow y = 244$

أي الزمن الكلي لمعاينة المريض باحتمال 99% وبالتالي الطبيب سينهي عمله في الساعة $300 + 244 = 9:06$ تقريباً

توزيع الإحصاء : $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

مبرهنة : (تقبل بدون برهان) : إذا كان $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة عشوائية من الحجم n للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن

1- $\bar{X}$ و S^2 متغيران عشوائيان مستقلان

2- للمتغير العشوائي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $(n-1)$

مبرهنة : إذا كان المتوسط $\bar{X}$ وتباين عينة عشوائية من الحجم n للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإنه سيكون للمتغير العشوائي $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ توزيع t ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$

تمرين : إذا كانت أوزان أكياس طحين الذي تنتجه إحدى مؤسسات تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 50$ كغ أخذنا عينة حجمها $n = 10$ أكياس من إنتاج هذه المؤسسة فوجدنا أن الانحراف المعياري $S = 1$ كغ أوجد احتمال أن يزيد متوسط العينة $\bar{X}$ على 51 كغ

الحل : نفرض أن متغير عشوائي يدل على وزن ~~كيس طحين~~ كيس طحين ووجدنا أن $S = 1$ ولتكن $X_1, \ldots, X_{10}$ عينة لأوزان 10 أكياس فإن $X \sim N(50, \sigma^2)$ والاحتمال المطلوب هو

$$P(\bar{X} > 51) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{51-50}{\frac{1}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$T \sim t(n-1) \Rightarrow P(T > \sqrt{10}) = 1 - P(T < \sqrt{10})$$

AL MARJI

Subject:

Date: / /

$= 1 - P(T \leq 3.16) = 1 - 0.995 = 0.005$

انتهت المحاضرة السادسة عشرة