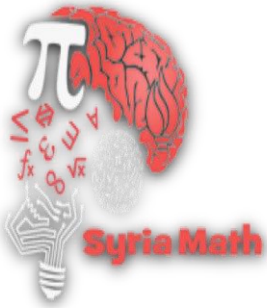



نظري

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄ المحاضرة السادسة عشر عنوان المحاضرة: مضاريب لاغرانج

**المستوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تمارين عن النقط الحرجة و القيم القصوى و تطبيقاتها

٢ـ مضاريب لاغرانج

٣ـ تطبيقات على مضاريب لاغرانج

---

**تمرين١ :** أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(0,0,a)$ ومجموعة النقاط $\{(x,y,z) : z = x.y\}$ حيث $a > 0$

**الحل :**

$$f(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-a)^2$$
$$= x^2 + y^2 + (x.y - a)^2$$

نشتق :

$$f_x(x,y) = 2x + 2y(x.y - a) = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y + 2x(x.y - a) = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ x و الثانية بـ y و نطرح :

$$2x^2 - 2y^2 = 0 \implies x^2 = y^2 \implies x = \mp y$$

و لنميز :

$$(1)\ldots\ldots\ldots x = y \implies 2x + 2x(x^2 - a) = 0$$

$$2x[1 + x^2 - a] = 0$$

Syria Math Team

$$x=0\ \ ,x=\mp\sqrt{a-1}\ \ \Rightarrow \boxed{(\mp\sqrt{a-1},\mp\sqrt{a-1})}$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ x=-y\ \Rightarrow\ 2x-2x(-x^2-a)=0$$

$$2x(1+x^2+a)=0$$

$$\Rightarrow\ x=0\ .x=\mp\sqrt{a+1}\ \ \Rightarrow \boxed{(\mp\sqrt{a+1},\mp\sqrt{a+1})}$$

$$f_{xx}=2+2y^2\ \ ,\ \ f_{yy}=2+2x^2\ \ ,\ \ f_{xy}=f_{yx}=2(xy-a)+2yx$$
$$=4xy-2a$$

$$f_{xx}=(\mp\sqrt{a-1},\mp\sqrt{a-1})=2a\ ,f_{yy}=2a$$

$$f_{xy}=(\mp\sqrt{a-1},\mp\sqrt{a-1})=2a-4$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2a & 2a-4\\ 2a-4 & 2a\end{vmatrix}=4a^2-(4a^2-16a+16)=16a-16>0$$

$$a>0$$

**تمرين٢:**

أوجد أقصر بُعد بين النقطة $A(2,1,-3)$ و المستوي الذي معادلته $2x+y-2z=4$

**الحل:** لنفرض أن $\mathbf{M(x,y,z)}$ و بالتالي يمكن تقليل عدد المجاهيل بعزل $\mathbf{y}$ من معادلة المستوي و تعويضها في إحداثيات النقطة، لنجد أن $\mathbf{M(x,4+2z-2x,z)}$، و الآن سنأخذ الدالة التي تشكل مربع البعد بين نقطة كيفية من المستوي و النقطة $\mathbf{A}$:

$$f(x,y,z)=(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$$

$$f(x,z)=(x-2)^2+(3+2z-2x)^2+(z+3)^2$$

$$f_x=2(x-2)-4(3+2z-2x)=0$$

$$=10x-8z-16=0\ \ \ldots.[1]$$

$$f_z=4(3+2z-2x)+2(z+3)=0$$

$$=10z-8x+18=0\ \ \ \ldots.[2]$$

Syria Math Team

نقسم كلاً من [1] و [2] على 2 نجد أن :

$$5x - 4z - 8 = 0$$

$$-4x + 5z + 9 = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $4$ والمعادلة الثانية بـ $5$ نجد و نجمع:

$$9z + 13 = 0 \implies \boxed{z = \frac{-13}{9}}$$

نعوض بإحدى المعادلتين ...

$$5x - 4\left(-\frac{13}{9}\right) - 8 = 0$$

$$5x + \frac{52}{9} - 8 = 0 \implies 5x + \frac{52}{9} - \frac{72}{9} = 0 \implies 5x = \frac{20}{9} \implies \boxed{x = \frac{4}{9}}$$

نُعوض ب $y$

$$y = 4 - \frac{8}{9} - \frac{26}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-13}{9}\right)$$

## القيم القصوى ومضاريب لاغرانج

معظم المسائل العلمية التي لها أهميّة كبيرة تشمل إيجاد القيم العظمى أو الصغرى للدوال في عدة متغيرات

حيث أن العلاقة بين متغيراتها تتحدد من معادلة واحدة أو أكثر وتسمى **الشروط الجانبية** ومن أحد هذه الأمثلة :

إيجاد نصف قطر أكبر كرة مرسومة داخل مجسم قطع ناقص، إن هذا يكافئ إيجاد القيمة العظمى للدالة .

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

المرسومة ضمن القطع الناقص:

Syria Math Team

$$\varphi(x,y,z) = 1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

لإيجاد النقاط الحرجة نُشكل الدالة :

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) \dots\dots \lambda > 0$$

ثم نشتق و نعدم المشتقات الصرفة من المرتبة الأولى:

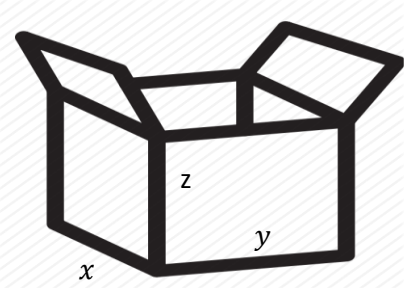
$$F_x = 0 \ , \ F_y = 0 \ , \ F_z = 0 \ , \ F_\lambda = 0$$

**مثال:**

أوجد أبعاد صندوق مفتوح من الأعلى والذي حجمه أكبر ما يمكن إذا كانت المساحة (السطحية) = ١٢

**الحل :**

نشكل الدالة التي تعبر عن حجم متوازي مستطيلات و هي جداء أبعاده الثلاثة ( الطول * العرض * الارتفاع)




$$f(x,y,z) = x.y.z$$

و أيضاً نشكل المعادلة الجانبية ، حيث أنه من نص المسألة نجد أن مساحة السطح هو عبارة عن مساحة المستطيلين المتقابلين و الذي كل منهما أبعاده $x,z$ بالإضافة إلى مساحة المستطيلين الذي كل منهما أبعاده $y,z$ ، و أيضاً بالإضافة إلى مساحة القاعدة (الوحيدة) و التي أبعادها $y,x$ ، أي:

$$yx + 2yz + 2xz = 12$$

$$\varphi(x,y,z) = 12 - xy - 2yz - 2xz$$

$$F(x,y,z) = x.y.z + \lambda(12 - xy - 2yz - 2xz)$$

$$F_x(x,y,z) = yz + \lambda(-y - 2z) = 0$$

$$F_y(x,y,z) = xz + \lambda(-x - 2z) = 0$$

Syria Math Team

$$F_z(x,y,z) = xy + \lambda(-2x - 2y) = 0$$

$$F_\lambda(x,y,z) = 12 - xy - 2yz - 2xz = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ x و الثانية بـ y و الثالثة بـ z فينتج لدينا جملة المعادلات :

$$xyz - \lambda(xy + 2xz) = 0 \quad \dots [1]$$

$$xyz - \lambda(xy + 2yz) = 0 \quad \dots [2]$$

$$xyz - \lambda(2xz + 2yz) = 0 \quad \dots [3]$$

لا تنسى أن $x, y, z$ أبعاد لصندوق و بالتالي لن يكون أي منها صفراً و بالتالي لا نناقش حل المعادلة $z = 0$

بطرح [1] و [2] نجد أن :

$$\Rightarrow \lambda(-2xz + 2yz) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z\lambda(-x + y) = 0$$

$$x = y$$

بطرح [2] من [3] نجد أن :

$$-\lambda(-xy + 2xz) = 0$$

$$-\lambda x(-y + 2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2z \dots (*)$$

و لما كان $y = x$ ينتج أن $x = 2z \dots (**)$

نعوض (**) &(*) في المعادلة الأخيرة

$$12 - 2z(2z) - 2(2z)z - 2(2z)z = 0$$

$$12 - 4z^2 - 4z^2 - 4z^2 = 0$$

$$12z^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad z = \mp 1$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (2,2,1)$$

و نرفض السالب ، لأننا نتحدث عن أبعاد متوازي مستطيلات .

مثال (وظيفة):

أوجد أبعاد متوازي مستطيلات الذي حجمه أكبر ما يمكن وجوانبه موازية للمحاور $ox, oy, oz$

Syria Math Team

ويمكن رسمه داخل المجسم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

**الحل :** أيضاً نشكل معادلة حجم متوازي المستطيلات ، ألا و هي $f(x,y,z)=x.y.z$ و لدينا المعادلة الجانبية :

$$\emptyset(x,y,z)=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

و بالتالي، و حسب مضاريب لاغرانج يمكن أن نكتب :

$$F(x,y,z,\lambda)=x.y.z+\lambda\left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right):\lambda\neq 0$$

نشتق كما في المثال السابق

$$F_x(x,y,z)=yz-2\lambda\frac{x}{a^2}=0\ldots(1)$$

$$F_y(x,y,z)=xz-2\lambda\frac{y}{b^2}=0\ldots.(2)$$

$$F_z(x,y,z)=xy-2\lambda\frac{z}{c^2}=0\ldots..(3)$$

$$F_\lambda(x,y,z)=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0\ldots.(4)$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $x$ و الثانية بـ $y$ و نطرح :

$$-\frac{2\lambda}{a^2}x^2+\frac{2\lambda}{b^2}y^2=0\Longrightarrow\boxed{y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $x$ و الثالثة بـ $z$ و نطرح أيضاً :

$$-\frac{2\lambda}{a^2}x^2+\frac{2\lambda}{c^2}z^2\Longrightarrow\boxed{z^2=\frac{c^2}{a^2}x^2}$$

Syria Math Team

نعوض ما هو موضوع ضمن إطارات في المعادلة *(4)* :

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \Rightarrow \frac{3}{a^2}x^2=1 \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{b}{\sqrt{3}} \quad , \quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

إذاً : $(x,y,z)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$

**تمرين: (يترك للقارئ)**

أوجد القيم الصغرى للدالة $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$

حيث النقطة تحقق المعادلة $x+y+z=4$

و هو تطبيق مباشر كما في التمارين السابقة

---

**انتهت المحاضرة**

---

| | | |
|---|---|---|
| صفحتنا على فيسبوك:<br>IOM<br>الرابط :<br>facebook.com/MathemagicTeam/ | مجموعة السنة الثانية :<br>Improve Our Mathematics | مجموعة السنة الأولى:<br>طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق<br>٢٠١٧ |

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي

Syria Math Team

أصدقائي حرصاً على الدقة .. نعتذر أولاً عن ورود بعض الأخطاء في المحاضرات السابقة و سنحاول تلافي هذه الأخطاء من خلال ملحق التصويبات التالية :

| موقع الخطأ | الخطأ | الصواب |
|---|---|---|
| المحاضرة٣-ص٣-في تعريف النقطة الملاصقة | لكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقول عن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ بأنها نقطة ملاصقة لـ $M$ إذا كان تقاطع أي جوارلـ $x_0$ مع المجموعة $M$ غير خالية $\forall N(x_0,r)\ ;\ N(x_0,r) \cap M \neq 0$ | لتكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقول عن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ بأنها نقطة ملاصقة لـ $M$ إذا كان تقاطع أي جوارلـ $x_0$ مع المجموعة $M$ غير خالية $\forall N(x_0,r)\ ;\ N(x_0,r) \cap M \neq \emptyset$ |
| المحاضرة ٧-ص٥-السطر ٩ | $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ $= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0+h,0) - f_x(0,0)}{h} = \frac{1-0}{h}$ $= \infty$ | $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ $= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h}$ $= \frac{1-0}{h} = \infty$ |
| المحاضرة ٩-نص المبرهنة | إذا كانت $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في النقطة c فهناك عددان موجبان $\delta, k$ يحققان الشرط: $\|x-c\| < \delta$ فإن: $\|f(x)-f(c)\| < k$ | إذا كانت $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في النقطة c فهناك عددان موجبان $\delta, k$ يحققان الشرط: $\|x-c\| < \delta$ فإن: $\|f(x)-f(c)\| < k\|x-c\|$ |
| المحاضرة ١٠ – ص٧ –نهاية التمرين الرابع | $\lim_{h\to 0} \mu(h,h) = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{2h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ | $\lim_{h\to 0} \mu(h,h)$ $= \lim_{h\to 0} \left(-\frac{2h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\neq 0$ |
| المحاضرة ١١-ص٢-السطر ٣ | $= 2\left(1-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}\left[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}} - nx_1^2\right]$ | $= 2\left(1-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) - nx_1^2\right]$ |
| المحاضرة١٤ –في فقرة تعميم النص السابق – الحالة ٢ | ٢- بحيث $\Delta_1 = f_{x_1x_1}(c) < 0$ $c \Leftarrow \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$ عظمى نسبية. | ٢- بحيث $\Delta_1 = f_{x_1x_1}(c) < 0$ من $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ إشارات متناوبة $\Leftarrow$ c عظمى نسبية. |

فريق سيريا ماث يتمنى لكم أصدقائنا كل التوفيق و النجاح <3