مثال (٥):

أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{-1}^{1} z^2 P_n(z)dz$$

الحل:

نعلم أن:

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

أي إن:

$$\therefore z^2 = \frac{2}{3}P_2(z) + \frac{1}{3}P_0(z)$$

وعلى ذلك فإن:

$$\therefore I = \int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}P_2(z) + \frac{1}{3}P_0(z)\right]P_n(z)dz$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}P_2(z)P_n(z)dz + \frac{1}{3}\int_{1}^{1}P_0(z)P_n(z)dz$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 2, n \neq 0 \\ \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3} & n = 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15} & n = 2 \end{cases}$$

مثال (٦):

عبر عن الدالة $F(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 1$ بدلالة كثيرات حدود لجندر.

الحل:

نعلم أن:

$$P_0 = 1\ ,\ P_1(z) = z\ ,\ P_2(z) = \frac{1}{2}\ (3z^2 - 1),\ P_3(z) = \frac{1}{2}\ (5z^3 - 3z)$$

وعلى ذلك فإن:

$$\therefore z^2 = \frac{2}{3}P_2(z) + \frac{1}{3}P_0(z)$$

وعلى ذلك فإن:

$$z^3 = \frac{2}{5}P_3(z) + \frac{3}{5}P_1(z)$$

$$\therefore F(z) = \frac{2}{5}P_3(z) + \frac{3}{5}P_1(z) + \frac{4}{3}P_2(z) + \frac{2}{3}P_0(z) + 3P_1(z) + P_0(z)$$

$$= \frac{2}{5}P_3(z) + \frac{4}{3}P_2(z) + \frac{18}{5}P_1(z) + \frac{5}{3}P_0(z)$$

مبرهنة (٢):

إذا كانت $f(z)$ كثيرة حدود من الدرجة n فإن:

$$f(z) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(z)$$

حيث:

$$c_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(z)P_r(z)dz$$

(يترك البرهان للقارئ).

مثال (٧):

فك $f(z) = z^2$ في متسلسلة على الشكل $\sum_{r=0}^{n} c_r p_r(z)$.

الحل:

حيث إن $f(z) = z^2$ كثيرة حدود من درجة 2 ومن متسلسلة ليجندر نجد:

$$z^2 = \sum_{r=0}^{2} c_r p_r(z) = c_0 p_0(z) + c_1 p_1(z) + c_2 p_2(z) \qquad (1)$$

حيث إن:

$$c_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} z^2 p_r(z)dz \qquad (2)$$

ولكن:

$$p_0(z) = 1 \;\;,\;\; p_1(z) = z \;\;,\;\; P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \qquad (3)$$

بوضع $r = 0, 1, 2$ في (2) وباستخدام (3) فيكون لدينا:

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} z^3 dz = 0$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} z^2(3z^2 - 1)dz = \frac{5}{4}\left[3\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3}\right]_{1}^{1} = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$z^2 = \frac{1}{2}p_0(z) + \frac{2}{3}p_2(z)$$

مثال (٨):

انشر الدالة $f(z) = z^4 - 3z^2 + z$ في متسلسلة على الشكل $\sum_{r=0}^{n} c_r, p_r(z)$.

الحل:

كما في المثال السابق نحصل على:

$$z^4 - 3z^2 + z = \frac{-4}{5}p_0(z) + p_1(z) - \frac{10}{7}p_2(z) + \frac{8}{35}p_4(z)$$

مثال (٩):

انشر الدالة $f(z)$ في الشكل $\sum_{r=0}^{\infty} c_r, p_r(z)$.

حيث إن:

$$|f(z)| = \begin{cases} 0, & -1 < z < 0 \\ 1, & 0 < z < 1 \end{cases} \qquad (1)$$

الحل:

نفترض أن:

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r p_r(z) \qquad (2)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_r &= \left(r + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(z)P_r(z)dz \\ &= \frac{2r+1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f(z)P_r(z)dz + \int_{0}^{1} f(z)P_r(z)dz\right] \\ &= \frac{2r+1}{2}\int_{0}^{1} P_r(z)dz \qquad (3) \end{aligned}$$

مثال (١٠):

برهن أن:

$$\int_0^1 P_n(z).P_m(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{if } m > n \\ \dfrac{1}{1+2n} & \text{if } m = n \end{cases}$$

where $m \geq n$ and $m - n$ زوجياً

الحل:

نعلم أن:

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$$
$$P_m(-z) = (-1)^m P_m(z)$$

ومنه:

$$P_n(-z) \cdot P_m(-z) = (-1)^{n+m} P_n(z) P_m(z)$$

$$\text{but}: m - n = 2k \Rightarrow m = n + 2k$$

$$P_n(-z) \cdot P_m(-z) = (-1)^{n+2k+n} P_n(z) \cdot P_m(z) = P_n(z) P_m(z)$$

الدالة زوجية برهاناً، هذا من جهة ومن جهة ثانية لدينا:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} P_n(z).P_m(z)dz = 2\int_0^1 P_n(z).P_m(z)dz = 0$$

$$\text{Where}: m = n \Rightarrow P_n(-z) P_n(-z) = (-1)^{n+n} P_n(z) P_n(z) = [P_n(z)]^2$$

دالة زوجية.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{2}{1+2n}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2 dz = 2\int_0^1 [P_n(z)]^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [P_n(z)]^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+2n} = \frac{1}{1+2n}$$

مثال (١١):

إذا كان R يشير إلى المؤثر:

$$R = \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}\right]$$

فبرهن أن:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(z) R[f(z)] dz = -n(n+1)\int_{-1}^{+1} P_n(z) f(z) dz$$

وذلك بفرض أن f و f′ يبقيان منتهيان عند ± 1.

الحل:

$$I = \int_{-1}^{+1} P_n(z) \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)f'(z)\right]dz$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_n(z)\left[(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z)\right]dz$$

$$I = \int_{-1}^{+1} P_n(z)(1-z^2)f''(z) - 2\int_{-1}^{+1} zP_n(z)f'(z)dz$$

$$= I_1 + I_2$$

نكامل I_1 بالتجزئة:

$$f''(z)dz = dv \Rightarrow v = f'(z)$$

$$P_n(z)\,(1-z^2) = u \;\Rightarrow\; du = [(1-z^2)\,P_n(z)]'$$

ومنه:

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} P_n(z)(1-z^2)f''(z)dz$$

$$= \left[(1-z^2)P_n(z)f'(z)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left[(1-z^2)P_n(z)\right]' f'(z)dz$$

$$= -\int_{-1}^{+1}(1-z^2)P_n'(z).f'(z)dz + 2\int_{-1}^{+1} zP_n(z)f'(z)dz$$

$$I = I_1 + I_2 = -\int_{-1}^{+1}(1-z^2)P_n'(z)f'(z)dz + 2\int_{-1}^{+1} zP_n(z)f'(z)dz$$

$$-2\int_{-1}^{+1} zP_n(z)f'(z)dz$$

$$I = -\int_{-1}^{+1}(1-z^2)P_n'(z)f'(z)dz$$

$$f'(z).dz = dv \Rightarrow v = f(z);\ (1-z^2)P_n'(z) = u \Rightarrow du = \left[(1-z^2)P_n'(z)\right]'$$

$$I = \left[-(1-z^2)P_n'(z).f(z)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1}\left[(1-z^2)P_n'(z)\right]' f(z)dz$$

$$= \int_{-1}^{+1}(1-z^2)P_n''(z)f(z)dz - 2\int_{-1}^{+1}zP_n'(z)f(z)dz$$

$$= \int_{-1}^{+1}\left[(1-z^2)P_n''(z) - 2zP_n'(z)\right]f(z)dz$$

$$= -n(n+1)\int_{-1}^{+1}P_n(z)f(z)dz$$

٢ . ١٣ . تمثيل الحلول بتكاملات محيطية (ممتدة على طرق):

وجدنا في فقرات سابقة حلول المعادلات التفاضلية الخطية على شكل متسلسلات قوى، وذلك لأنه ليس من الممكن دائماً الوصول إلى حل على شكل تركيب منته من دوال ابتدائية.

سنحاول في هذا البند الوصول إلى حلول للمعادلات التفاضلية على شكل تكاملات محيطية، وليس بالضرورة أن نستطيع حلها.

٢ . ١٣ . ١ . النموذج الأول (معادلة لابلاس):

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$(a_n z + b_n)\, w^{(n)} + (a_{n-1} z + b_{n-1})\, w^{(n-1)} + \ldots + (a_1 z + b_1)\, w' + \\ + (a_0 z + b_0)\, w = 0 \qquad (1)$$

وهي معادلة من المرتبة n أمثال w فيها وأمثال مشتقات w هي من الدرجة الأولى في z. لو كانت من المرتبة الثانية لكانت نقطة اللانهاية نقطة شاذة غير منتظمة.

لنبحث لهذه المعادلة عن حل من النمط:

$$w = \int_l e^{z\eta} p(\eta)d\eta \qquad (\text{نواة التكامل } e^{z\eta}) \qquad (2)$$

حيث $p(\eta)$ دالة غير معلومة لـ η، l طريق غير معلوم للمكاملة ومستقل عن z.

لنفرض أن $p(\eta)$ و l هي بحيث يمكن الاشتقاق بالنسبة لـ z تحت رمز المكاملة أي إن: