Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

المحاضرة: 18 والأخيرة

الدكتورة: ميسم جديد

5/14/2017 المحاضرة الثامنة عشر: الأخيرة.

البرمجة الديناميكية:

- مجالات الاستخدام: تستخدم لإيجاد الحل الأمثل في المواقف متعددة الخطوات والتي تتضمن مجموعة من القرارات المرتبطة.

أمثلة: ① مسائل توزيع الموارد، وتنظيم الإنتاج والإدارة. ② مسائل التخزين

- منهج الاستنتاج للبرمجة الديناميكية (من الخلف إلى الأمام):

المبدأ هو تجزئة المسألة إلى خطوات ترتبط بعضها، بعضها حسب الموقف موضوع الدراسة وفي كل خطوة تعرّف مجموعة من الحالات، حيث تتفرع عن كل حالة مجموعة من القرارات الممكنة.

- مقياس الفاعلية: يحدد مقياس الفاعلية في صورة تكلفة أو ربح أو زمن أو أي مقياس آخر ويسمى تابع الهدف.

- القرار الأمثل: هو الذي يحقق في كل حالة القيمة المثلى لتابع الهدف في الحالة السابقة.

من أبرز المساهمين في تطوير هذه النظرية وتطبيقاتها هو العالم ريتشارد بالمان صاحب المبدأ القائل:

"إن سياسة مثلى لا يمكن أن تتشكل إلا من سياسات جزئية مثلى." وهي المبدأ النظري والأساس للبرمجة الديناميكية.

مزايا البرمجة الديناميكية: تتميز البرمجة الديناميكية عن غيرها من الطرق بما يلي:
- تعطي الحل الأمثل المطلق، وليس الأمثل النسبي.
- تخفض الزمن اللازم للحساب من جراء تجزئة المسألة إلى مسائل صغيرة و بعدد أقل من المتغيرات و بذلك يتخفض عدد البدائل في كل خطوة.
- لا تتطلب أي من الشروط الخطية أو التحدب أو حتى الاستمرارية، ومع ذلك فهي محددة ضمن أشكال خاصة بتابع الهدف.
- إن هذه الطريقة تتضمن عناصر تحليل الحساسية حيث تبين من خلالها حساسية النتائج من أجل جملة من القيم للمتغيرات الداخلة للمسألة و تمكننا من إيجاد السياسات القريبة للسياسة المثلى مع الإشارة إلى أنها لا تستطيع حل كل أنواع المسائل.

تصنيف مسائل البرمجة الديناميكية:

تصنف مسائل البرمجة الديناميكية ضمن ثلاث حالات:

1. مسائل وحيدة البعد و وحيدة المؤثر.
2. مسائل متعددة الأبعاد و وحيدة المؤثر أو مسائل وحيدة البعد و متعددة المؤثرات.
3. مسائل متعددة الأبعاد و متعددة المؤثرات.

تعريف البعد: هو المعيار الذي يؤثر في عملية اتخاذ القرار في مرحلة معينة من مراحل الحصول على الحل الأمثل حيث أنه إذا كان المعيار وحيداً في اتخاذ القرار عندئذ تسمى المسألة وحيدة البعد و إلا فهي مسألة متعددة الأبعاد.

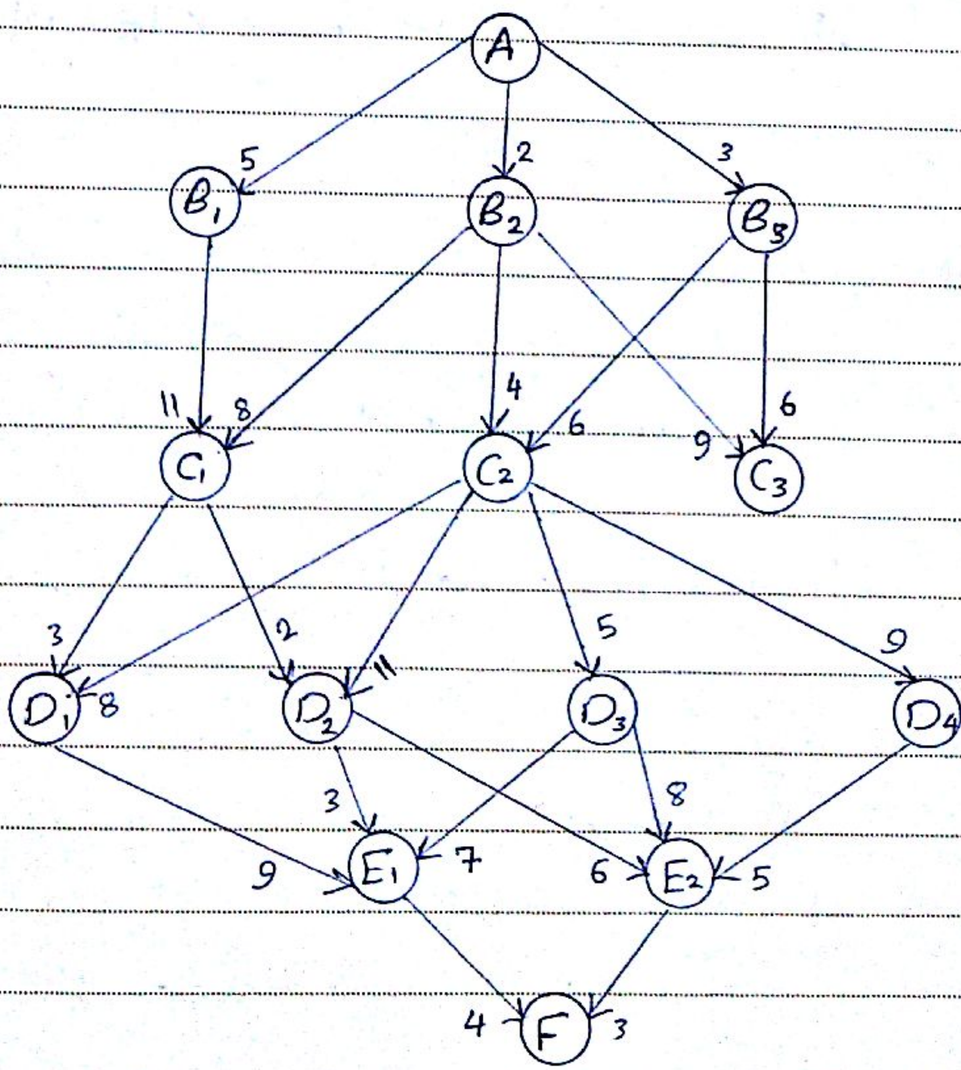
Alnour

تعريف المؤثر: هو تابع الهدف وَ إذا كانت المسألة تبني أكثر من هدف واحد عندها نسميها مسألة متعددة المؤثرات.

المسألة الأولى:

إنشاء اوتستراد بين المدينتين A وَ F حيث يجب على هذا الاوتستراد أن يمر بالمدن B , C , D , E وَ بالتالي سوف يتشكل من خمسة أقسام , من أجل كل قسم تمت دراسة وَ تقييم كلفة مختلف البدائل وَ قدم تمثيل هذه البدائل مع تكاليفها على الشكل المرفق , المطلوب:

إيجاد الطريق ذات التكلفة الأقل لإنشاء الاوتستراد.



/ /

نقطة البداية $Z_0 : A$

$Z_1 : B_1 \quad B_2 \quad B_3$

$Z_2 : C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$Z_3 : D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4$

$Z_4 : E_1 \quad E_2$

$Z_5 : F$

يتم حساب النتيجة تدريجياً مرحلة تلو الأخرى باستخدام التابع:

$$G_n(Z_n) = opt\left[G_{n-1}(Z_{n-1}) + F(Z_n, Z_{n-1})\right]$$

حيث أن opt يمكن أن تكون Min أو Max حسب طبيعة المسألة في هذه المسألة هي من النوع Min لأننا نريد أقل تكلفة.

الحالة الابتدائية

$$G_0(Z_0) = A = 0$$

$F(Z_n, Z_{n-1})$ هو تكلفة الطريق بين النقطتين المأخوذتين ولنبدأ بالحالة Z_1

$$G_1(Z_1) = Min\left[G_0(Z_0) + F(Z_1, Z_0)\right]$$

$$G_1(Z_1) = Min\left[0 + F(B, A)\right]$$

$$Z_1 = B_1 \quad B_2 \quad B_3$$

وعليه

$$G_1(B_1) = Min\left[0 + F(B_1, A)\right] = 5$$

$$G_1(B_2) = \boxed{2}$$

$$G_1(B_3) = 3$$

الطريق الأمثل في المرحلة الأولى هو AB_2

$$G_2(Z_2) = Min[G_1(Z_1) + F(Z_2, Z_1)]$$

$$Z_2 = C_1 \quad C_2 \quad C_3$$

$$G_2(C_1) = Min[G_1(B_1) + F(C_1, B_1), G_1(B_2) + F(C_1, B_2), G_1(B_3) + F(C_1, B_3)]$$

$$= Min[5 + 11, 2 + 8, 3 + \infty]$$

$$= Min[16, 10, 3 + \infty] = 10$$

$$G_2(C_2) = Min[G_1(B_1) + F(C_2, B_1), G_1(B_2) + F(C_2, B_2), G_1(B_3) + F(C_2, B_3)]$$

$$= Min[5 + \infty, 2 + 4, 3 + 9] = \boxed{6}$$

$$G_2(C_3) = Min[G_1(B_1) + F(C_3, B_1), G_1(B_2) + F(C_3, B_2), G_1(B_3) + F(C_3, B_3)]$$

$$= Min[5 + \infty, 2 + 9, 3 + 6] = 9$$

فيكون الطريق الأقل $A\,B_2\,C_2$

$$G_3(Z_3) = Min[G_2(Z_2) + F(Z_3, Z_2)]$$

$$Z_3 = D_1, D_2, D_3, D_4$$

$$G_3(D_1) = Min[G_2(C_1) + F(D_1, C_1), G_2(C_2) + F(D_1, C_2), G_2(C_3) + F(D_1, C_3)]$$

$$= Min[10 + 3, 6 + 8, 9 + \infty] = 13$$

$$G_3(D_2) = Min[G_2(C_1) + F(D_2, C_1), G_2(C_2) + F(D_2, C_2), G_2(C_3) + F(D_2, C_3)]$$

$$= Min[10 + 2, 6 + 11, 9 + \infty] = 12$$

$$G_3(D_3) = Min[G_2(C_1) + F(D_3, C_1), G_2(C_2) + F(D_3, C_2),$$

$G_2(C_3) + F(D_3, C_3)]$

$= Min[10 + \infty, 6 + 5, 9 + \infty] = \boxed{11}$

$G_3(D_4) = Min[G_2(C_1) + F(D_4, C_1), G_2(C_2) + F(D_4, C_2)$

$G_2(C_3) + F(D_4, C_3)]$

$= Min[10 + \infty, 6 + 9, 9 + \infty] = 15$

فيكون الطريق الأمثل هو $A\ B_2 C_2 D_3$

$G_4(Z_4) = Min[G_3(Z_3) + F(Z_4, Z_3)]$

$Z_4 = E_1, E_2$

$G_4(E_1) = Min[G_3(D_1) + F(E_1, D_1), G_3(D_2) + F(E_1, D_2)$

$G_3(D_3) + F(E_1, D_3), G_3(D_4) + F(E_1, D_4)]$

$= Min[13 + 9, 12 + 3, 11 + 7, 15 + \infty] = \boxed{15}$

$G_4(E_2) = Min[G_3(D_1) + F(E_2, D_1), G_3(D_2) + F(E_2, D_2),$

$G_3(D_3) + F(E_2, D_3), G_3(D_4) + F(E_2, D_4)]$

$= Min[13 + \infty, 12 + 6, 11 + 8, 15 + 5] = 18$

فيكون الطريق الأمثل $A\ B_2 C_1 D_2 E_1$

$G_5(Z_5) = Min[G_4(Z_4) + F(Z_5, Z_4)]$

$Z_5 = F$

$G_5(F) = Min[G_4(E_1) + F(F, E_1), G_4(E_2) + F(F, E_2)]$

$= Min[15 + 4, 18 + 3] = 19$

وَ الطريق الأمثل هو $A B_2 C_1 D_2 E_1 F$

وَ التكلفة $= 19$

* هذه المسألة هي سؤال امتحاني هام (قد يعطي مراحل أقل)

/ /

الشكل الرياضي لمسائل البرمجة الديناميكية:

- حالة وحيد البعد و وحيد المؤشر: توضح أسلوب البرمجة الديناميكية بالعلاقات التالية:

$$Z_i = F_i(x_i) \qquad i=\overline{1:n}$$

حيث Z_i هو تابع الحالة الذي يعبر عن الحالة التي وصلت إليها المسألة في مرحلة جزئية معينة، x_i هو متحول القرار في المرحلة i حيث توجد علاقة بين تابع الحالة Z_i في مرحلة معينة i و تابع الحالة في المرحلة السابقة Z_{i-1}

يمكن صياغتها بالشكل $Z_i = g_i(x_i, Z_{i-1})$ هنا نحسب قيمة تابع الهدف G أي قيمة المؤشر الذي ينتج عنه وفقاً لتوابع الهدف الجزئية في المراحل السابقة و ذلك من خلال العلاقة

$G_i(Z_i) = F(x_i, Z_{i-1}, Z_i)$ و يجب أن نأخذ قيمة مثلى عند كل مرحلة معطاة

$$G_n^*(Z_n) = \underset{x_n}{opt}\{F_n(x_n, Z_{n-1}, Z_n) + G_{n-1}^*(Z_{n-1})\}$$

حيث $G_n^*(Z_n)$ تابع الهدف المثالي في المرحلة n الأخيرة
$G_{n-1}^*(Z_{n-1})$ تابع الهدف المثالي للمرحلة n-1 السابقة

نحل هذه المعادلات:

$$G_1^*(Z_1) = \underset{x_1}{opt}\{F_1(x_1, Z_0, Z_1) + G_0^*(Z_0)\}$$
$$G_2^*(Z_2) = \underset{x_2}{opt}\{F_2(x_2, Z_1, Z_2) + G_1^*(Z_1)\}$$

⋮

حتى نصل إلى $G_n^*(Z_n)$

على كل علاقة من العلاقات السابقة يوجد قيد يعطى بالشكل التالي

$$Z_1 = g_1(x_1, Z_0)$$
$$Z_2 = g_2(x_2, Z_1)$$
$$\vdots$$

مسألة :

تبلغ ميزانية شركة 5 مليون ترد توزيعها على أربعة مشاريع استثمارية مختلفة ، فإذا علمت أن لكل استثمار مردودية معينة مقابلة لكل مبلغ واحد مليون وهي موضحة في الجدول التالي :

المشاريع / المبالغ	$F_1(x_1)$	$F_2(x_2)$	$F_3(x_3)$	$F_4(x_4)$
0	0	0	0	0
1	0.56	0.5	0.3	0.4
2	0.9	0.82	0.5	0.66
3	1.3	1.1	0.8	0.84
4	1.56	1.3	1.00	0.96
5	1.8	1.5	0.24	1.06

المطلوب : إيجاد التوزيع الأمثل للميزانية بين المشاريع الأربعة بحيث نحصل على مردودية عظمى.

الحل :

نفرض x_i التي تعرض المبالغ المخصصة لكل مشروع من المشاريع

(هي متغيرات قرار)

/ /

Z_i هي تابع الحالة في كل مرحلة من المراحل و يعطى بالعلاقة :

$$Z_i = x_i + Z_{i-1}$$

إن قيمة Z_i تعبر عن المبلغ المخصص للمرحلة i ، و جميع المراحل معادلاتها بالشكل التالي :

$$G_n^*(Z_n) = \underset{x_n}{\text{Opt}}\left[F_n(x_n) + G_{n-1}^*(Z_{n-1})\right]$$

$$G_0^*(Z_0) = 0$$

$$G_1^*(Z_1) = F_1(x_1)$$

$$G_2^*(Z_2) = \underset{x_2}{\text{Max}}\left[F_2(x_2) + G_1^*(Z_1)\right]$$

$$G_3^*(Z_3) = \underset{x_3}{\text{Max}}\left[F_3(x_3) + G_2^*(Z_2)\right]$$

$$G_4^*(Z_4) = \underset{x_4}{\text{Max}}\left[F_4(x_4) + G_3^*(Z_3)\right]$$

(Z_1 المرحلة) : $Z_1 = x_1 + Z_0$

Z_1	x_1	$G_1^*(Z_1) = F_1(x_1)$
0	0	0
1	1	0.56
2	2	0.9
3	3	1.3
4	4	1.56
5	5	1.8

أكبر ربح

/ /

Z_2 : $Z_2 = x_2 + Z_1$

+

Z_2	x_2	$F_2(x_2)$	Z_1	$G_1^*(Z_1)$	$G_2^*(Z_2)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0.56	$\boxed{0.56}$
	1	0.5	0	0	0.5
2	2	0.82	0	0	0.82
	1	0.5	1	0.56	$\boxed{1.06}$
	0	0	2	0.9	0.9
3	3	1.1	0	0	1.1
	2	0.82	1	0.56	1.38
	1	0.5	2	0.9	$\boxed{1.4}$
	0	0	3	1.3	1.3
4	4	1.3	0	0	1.3
	3	1.1	1	0.56	1.66
	2	0.82	2	0.9	1.72
	1	0.5	3	1.3	$\boxed{1.8}$
	0	0	4	1.56	1.56
5	5	1.5	0	0	1.5
	4	1.3	1	0.56	1.86
	3	1.1	2	0.9	2
	2	0.82	3	1.3	$\boxed{2.12}$
	1	0.5	4	1.56	2.06
	0	0	5	1.8	1.8

نلخص الجدول السابق بجدول الحل الأمثل فقط لـ Z_2 كالآتي

Z_2	x_2	$G_2^*(Z_2)$
0	0	0
1	0	0.56
2	1	1.06
3	1	1.4
4	1	1.8
5	2	2.12

وكما الطريقة السابقة نستنتج الجدول المختصر لـ Z_3

Z_3	x_3	$G_3^*(Z_3)$
0	0	0
1	0	0.56
2	0	1.06
3	0	1.4
4	0	1.8
5	0	2.12

إنّ Z_4 هي المرحلة الأخيرة, لذلك نأخذ القيمة العظمى $Z_4 = 5$

فيكون:

/ /

Z_4	x_4	$F_4(x_4)$	Z_3	$G^*_4(Z_4)$
	0	0	5	2.12
	1	0.4	4	2.2
5	2	0.66	3	2.06
	3	0.84	2	1.90
	4	0.96	1	1.52
	5	1.06	0	1.06

وبالتالي

[illegible]

$Z_4 = 5$, $x_4 = 1$

$\Rightarrow Z_3 = 4$, $x_3 = 0$ — $Z_4 = x_4 + Z_3 \Rightarrow Z_3 = 5 - 1 = 4$

$\Rightarrow Z_2 = 4$, $x_2 = 1$

$\Rightarrow Z_1 = 3$, $x_1 = 3$ (ثلاثة ملايين للمشروع الأول)

إذن $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ (مليون)

وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل تكون $= 2.2$

مسألة:

لدى شركة إنتاجية ثلاثة أقسام مختلفة تريد تخصيصها لستة مهندسين فإذا علمت أنه من كل قسم مردودية معينة من جراء التعيين لأي مهندس فيه ، وهذا الربح معطى في الجدول التالي:

عدد المهندسين / الأقسام	0	1	2	3	4	5	6
I	19	20	24	29	33	36	42
II	20	21	25	30	33	37	47
III	30	32	34	34	45	51	55

المطلوب: توزيع المهندسين الستة على الأقسام الثلاثة بحيث نحصل على أكبر مردودية ممكنة، مع الشروط التالية:

1) تحرص الشركة على تعيين ثلاثة مهندسين على الأكثر في القسم الثالث.

2) في القسمين الأول والثاني يجب ألا يقل عدد المهندسين عن 2 في كل منهما.

الحل:

نفرض x_1 ، x_2 ، x_3 عدد المهندسين في كل قسم من الأقسام على الترتيب.

القيود على x_1 ، x_2 ، x_3 هي كالآتي:

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

(تابع الحالة:)

$$Z_i = x_i + Z_{i-1}$$

(معادلات الحل:)

$$G_1^*(Z_1) = F_1(x_1)$$

/ /

$$G_2^*(Z_2) = \underset{x_2}{Max}\,[F_2(x_2) + G_1^*(Z_1)]$$

$$G_3^*(Z_3) = \underset{x_3}{Max}\,[F_3(x_3) + G_2^*(Z_2)]$$

Z_1: $Z_1 = x_1 + Z_0$

Z_1	x_1	$G_1^*(Z_1)$
2	2	24
3	3	29
4	4	33

علماً أن $x_1 \geq 2$ فيمكن لـ x_1
أن تأخذ القيم 2,3,4,5,6
ولكن في حال كانت $x_1=5$ فإنه
سيكون لدينا مخزون واحد فقط لباقي
الأقسام وهذا غير ممكن لأن $x_2 \geq 2$
وكذلك في حال كانت $x_1=6$

$\Leftarrow$ يمكن لـ x_1 أن تأخذ القيم 2,3,4 والتي تكون مساوية لقيم Z_1 لدينا

Z_2: $Z_2 = x_2 + Z_1$

Z_2	x_2	$F_2(x_2)$	Z_1	$G_1^*(Z_1)$	$G_2(Z_2)$
4	2	25	2	24	49
5	2	25	3	29	54
	3	30	2	24	54
6	2	25	4	33	58
	3	30	3	29	59
	4	33	2	24	57

/ /

Z_3 : $Z_3 = x_3 + Z_2$

إن المرحلة Z_3 هي المرحلة الأخيرة , لذلك نأخذ القيمة العظمى

$Z_3 = 6$, فيكون :

Z_3	x_3	$F_3(x_3)$	Z_2	$G_2^*(Z_2)$	$G_3(Z_3)$
	0	30	6	59	89
6	1	32	5	54	86
	2	34	4	49	83

ويكون الحل الأمثل :

$Z_3 = 6$, $x_3 = 0$ (الشعبة الثالثة 0 مهندس)

$\Rightarrow Z_2 = 6$, $x_2 = 3$

$\Rightarrow Z_1 = 3$, $x_1 = 3$

نلاحظ أن $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

وبذلك تم توزيع المهندسين بمردودية عظمى وتحقيق شروط المسألة

والمردودية تساوي 89 .

انتهت .

#good_luck ^^

#Razan_Azizieh