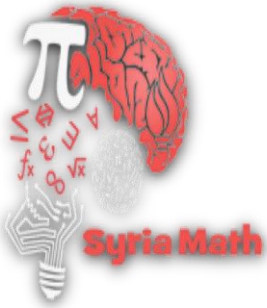

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

عملي

◄المحاضرة الرابعة (الأخيرة) عنوان المحاضرة :تمارين و تطبيقات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمبرهنة عن تكافئ مسافتين
٢ـمثال عن فضاء متري غير تام
٣ـتمارين

تمرين : لتكن $\mathbf{X}$ مجموعة غير خالية و d_1, d_2 مسافتين على $\mathbf{X}$ و لنسمي $\tau = \tau_d$, $\tau_1 = \tau_{d_1}$ ، عندئذٍ أثبت أنه إذا وجد عددان $\alpha, \beta > 0$ بحيث يكون $\alpha\, d_1(x,y) \le d(x,y) \le \beta d_1(x,y)$ فإن d_1 و d متكافئتان (أي أن $\tau_1 = \tau$)

البرهان : بداية لاحظ أن :

$$\forall a \in X\ , r > 0\ ; \begin{cases} N_d(a, \alpha r) \subseteq N_{d_1}(a, r) \\ N_{d_1}\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subseteq N_d(a, r) \end{cases}$$

$$x \in N_d(a, \alpha r) \Rightarrow d(x,a) < \alpha r$$
$$\Rightarrow d_1(x,a) \le \frac{1}{\alpha} d(x,a) < r$$
$$\Rightarrow d_1(x,a) < r \Rightarrow x \in N_{d_1}(a,r)$$

$$x \in N_{d_1}\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \Rightarrow d_1(x,a) < \frac{r}{\beta}$$
$$\Rightarrow d(x,a) \le \beta d_1(x,a) < r$$
$$\Rightarrow d(x,a) < r \Rightarrow x \in N_d(a,r)$$

لتكن θ مجموعة مفتوحة في (X, d_1) و لتكن $a \in \theta$ فإنه :

$$\exists r > 0 : N_{d_1}(a,r) \subseteq \theta$$
$$\Rightarrow \mathrm{N_d}(a, \alpha r) \subseteq N_{d_1}(a,r) \subseteq \theta$$

Syria Math Team

$$\exists \alpha r > 0 : N_d(a, \alpha r) \subseteq \theta$$

إذاً θ مفتوحة في (X, d)

◄و بالعكس :

θ مجموعة مفتوحة في (X, d) و لتكن $a \in \theta$ فإنه :

$$\exists r > 0 : N_d(a, r) \subseteq \theta$$

$$\exists \frac{r}{\beta} > 0 : N_{d_1}\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subseteq \theta$$

إذاً θ مفتوحة في (X, d_1)

مما سبق نجد أن $\theta \in \tau \iff \theta \in \tau_1$ أي $\tau = \tau_1$ فالمسافتان متكافئتان .

تذكر : نقول عن فضاء متري إنه تام إذا كانت كل متتالية كوشية فيه متقاربة

و سنأخذ الآن مثالاً عن فضاء متري غير تام:

مثال:

لنعرف على $\mathbb{R}$ التابع $d(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ ، أثبت أنه مسافة على $\mathbb{R}$ ثم بين أن المتتالية $\{n\}$ كوشية إلا أنها غير متقاربة في $(\mathbb{R}, d)$.

الحل :

إن **d** تابع مسافة لأن :

١- $d(x, y) \geq 0 \, , \forall x, y \in \mathbb{R}$

٢- $d(x, y) = 0 \iff \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| = 0 \iff \left|\frac{x}{1+|x|}\right| = \left|\frac{y}{1+|y|}\right|$

$\iff x + |x||y| = y + |y||x| \iff x = y$

٣- واضح أن $d(x, y0 = d(y, x)$

٤- ليكن $x, y, z \in R$ عندئذٍ:

Syria Math Team

$$d(x,z)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{z}{1+|z|}\right|$$
$$=\left|\left(\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right)+\left(\frac{y}{1+|y|}-\frac{z}{1+|z|}\right)\right|$$
$$\leq\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|+\left|\frac{y}{1+|y|}-\frac{z}{1+|z|}\right|=d(x,y)+d(y,z)$$

فهي مسافة،

۞من أجل إثبات أن المتتالية $\{n\}$ كوشية ، يجب أن نثبت أنه :

$$\forall\varepsilon>0\,;\exists n_0\in\mathbb{N}:n,m>n_0:d\,(x_n,x_m)<\varepsilon$$

ليكن $\varepsilon>0$ و ليكن $n_0>\frac{2}{\varepsilon}$ فنلاحظ أن :

$$d(x_n,x_m)=\left|\frac{n}{1+|n|}-\frac{m}{1+|m|}\right|=\left|\frac{n+1-1}{1+|n|}-\frac{m+1-1}{1+m}\right|$$

بالتفريق و الاختصار :

$$d(x_n,x_m)=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}=\frac{2}{n_0}<\varepsilon$$

و بالتالي هي متتالية كوشي ، إلا أنها غير متقاربة بسبب ما يلي :

لنفرض أنها متقاربة من $a\in R$ عندئذٍ: نعلم أن هذا يكافئ أن $d(x_n,a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ، من جهة أخرى :

$$d(x_n,a)=\left|\frac{n}{1+n}-\frac{a}{1+|a|}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}\left|1-\frac{a}{1+|a|}\right|\ldots(*)$$

و بالتالي :

$$\left|1-\frac{a}{1+|a|}\right|=0\Leftrightarrow 1=\frac{a}{1+|a|}\Leftrightarrow 1+|a|=a$$

و ينتج (كون $a\geq 0$) : $1+a=a$ و منه $1=0$ (مستحيل)

فالمتتالية **متباعدة** وبالتالي الفضاء $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{d})$ غير تام.

تنويه : في الفضاء $\boldsymbol{R}$ و دالة المسافة المألوفة $|x-y|$ فإن الفضاء هنا تام

Syria Math Team

مثال: ليكن (X,d) فضاء متري و $A,B\subseteq X$ أثبت أن :

١- $A\subseteq B\Rightarrow \delta(A)\leq\delta(B)$

٢- $A\cap B\neq\emptyset\Rightarrow\delta(A\cup B)\leq\delta(A)+\delta(B)$

٣- $\delta(A)=\delta(\bar{A})$

تذكر : $\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$ هو قطر المجموعة .

الحل :

- بفرض أن $A\subseteq B$ و ليكن $x,y\in A$ عندئذٍ $x,y\in B$ و بالتالي $d(x,y)\leq\delta(B)$ و ذلك أياً كان $x,y\in A$ و بالتالي $\delta(A)\leq\delta(B)$ (أصغر حد أعلى **sup**)
- لنفرض $A\cap B\neq\emptyset$ عندئذٍ يوجد $w\in A\cap B$ و ليكن $x,y\in A\cup B$:

١- $x,y\in A$ و بالتالي $d(x,y)\leq\delta(A)\leq\delta(A)+\delta(B)$

٢- $x,y\in B$ و بالتالي $d(x,y)\leq\delta(B)\leq\delta(A)+\delta(B)$

٣- $x\in A,y\in B$ عندئذٍ : $d(x,y)\leq\underbrace{d(x,w)}_{x,w\in A}+\underbrace{d(w,y)}_{w,y\in B}\leq\delta(A)+\delta(B)$

و بالتالي نجد أنه :

$$\forall x,y\in A\cup B\,;d(x,y)\leq\delta(A)+\delta(B)$$

إذاً العدد $\delta(A)+\delta(B)$ حد أعلى للمسافات $d(x,y)$ حيث $x,y\in A\cup B$، و لما كان $\delta(A\cup B)$ أصغر حد أعلى للمسافات السابقة ينتج مباشرةً أن $\delta(A\cup B)\leq\delta(A)+\delta(B)$

- بما أن $A\subseteq\bar{A}$ فإن $\delta(A)\leq\delta(\bar{A})$ و سنثبت الآن أن $\delta(\bar{A})\leq\delta(A)$:

من تعريف الـ sup : فإنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x,y\in\bar{A}$ بحيث $\delta(\bar{A})-\frac{\varepsilon}{2}<d(x,y)\ldots(1)$

من جهة أخرى فإنه إذا كان $x,y\in\bar{A}$ فإنه توجد متتاليتين x_n,y_n بحيث :

$$A\ni x_n\to x$$
$$A\ni y_n\to y$$

و لاحظ أن $x_n\ni A\cap N\left(x,\frac{1}{n}\right)\neq\emptyset$ و هذا يعني أن $d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$ و بالتالي :

$$\forall\varepsilon>0\,;\exists n_0\in\mathbb{N}:n\geq n_0\Rightarrow d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{4}$$

بالعودة إلى **(1)** :

$$\delta(\bar{A})-\frac{\varepsilon}{2}<d(x,y)$$
$$\leq \mathrm{d}(x,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y)<\frac{\varepsilon}{4}+d(x_n,y_n)+\frac{\varepsilon}{4}$$

Syria Math Team

$$\Rightarrow \delta(\bar{A}) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta(A) \Rightarrow \delta(\bar{A}) < \varepsilon + \delta(A)$$
$$\Leftrightarrow \delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$$

مما سبق نجد أن $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$

تمرين : ليكن $X = \{a, b, c\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ و أن (X, τ) فضاء طوبولوجي

أوجد $\overline{\{a\}}, \overline{\{b\}}, \overline{\{c\}}, \overline{\{b, c\}}$ و تحقق أن $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ و أن $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

الحل : إن المغلقات في هذا الفضاء هي $X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}$ و بالتالي يكون :

$$\overline{\{c\}} = \{c\} \quad , \overline{\{b, c\}} = \{b, c\}$$

(المجموعة المغلقة تساوي لصاقتها)

أما لصاقة {b} فهي أصغر مغلقة تحويها أو بمعنى أنها $\overline{\{b\}} = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

أما المغلقة الوحيدة التي تحوي {a} هي X و بالتالي $\overline{\{a\}} = X$

✓ **لاحظ أن** $\overline{\{b\}} \cup \overline{\{c\}} = \{b, c\} \cup \{c\} = \{b, c\} = \overline{\{b, c\}} = \overline{\{b\} \cup \{c\}}$

✓ **و أيضاً لاحظ أن** $\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$ و بالتالي $\overline{\{b\}} \cap \overline{\{c\}} = \{c\}$ و $\overline{\{b\} \cap \{c\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subseteq \overline{\{b\}} \cap \overline{\{c\}}$

و هو المطلوب .

انتهى المقرر... نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم المحتوى العلمي لهذا المقرر بجودة عالية و بشرح كافٍ ☺

و ندعو لكل زملائنا بالتوفيق و النجاح و نتمنى لكم امتحاناً موفقاً و مثمراً ☺

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي

Syria Math Team