حامد ع [illegible]

تمرين: ليكن X متغير عشوائي دالته المولدة للعزوم لها الشكل

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t} & ; t \neq 0 \\ 1 & ; t = 0 \end{cases}$$

اوجد $E(X)$ ، $V(X)$

واوجد $P(4.2 \leq X \leq 4.7)$

الحل: من شكل الدالة المولدة للعزوم يكون التوزيع منتظم $[a,b] = [4,5]$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} = \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t(5-4)} = \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t}$$

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$V(X) = \frac{(b-a)}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(4.2 \leq X \leq 4.7) = P(X \leq 4.7) - P(X \leq 4.2)$$

$$= F(4.7) - F(4.2) = (4.7 - 4) - (4.2 - 4)$$

$$= 0.7 - 0.2 = 0.5$$

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$$F(t)=\begin{cases}0 & ; t<a \Rightarrow t<4\\ \frac{t-a}{b-a} & ; a\le t\le b \Rightarrow 4\le t\le 5\\ 1 & ; t\ge b \Rightarrow t\ge 5\end{cases}$$

مثال: ليكن X متغير أسي بارامتر $\lambda=\frac{1}{100}$ ① جد $M_X(t), V(X), E(X)$ ثم

$P(X=20)$, $P(X<90)$

الحل:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=100 \quad , \quad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=10000$$

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}-t}=\frac{1}{1-100t} \quad ; t<\lambda$$

$$F(X)=P(X<t)=1-e^{-\lambda t} \quad ; t\ge 0$$

$$P(X<90)=F(90)=1-e^{-\frac{1}{100}t}=1-e^{-\frac{90}{100}}=1-e^{-0.9}=0.593$$

$$P(X=20)=f_X(20) \quad , \quad f_X(u)=\lambda e^{-\lambda u}=\frac{1}{100}e^{-\frac{u}{100}} \quad ; u\ge 0$$

$$=\frac{1}{100}e^{-\frac{20}{100}}=0.008$$

② عين m إذا كانت $F_X(m)=0.5$

$$0.5=1-e^{-\frac{1}{100}m}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{100}m}=1-0.5 \Rightarrow e^{-\frac{1}{100}m}=0.5 \Rightarrow -\frac{m}{100}=\ln(0.5)$$

$$\Rightarrow m=-100\ln(0.5)=-100\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-100[\ln(1)-\ln(2)]$$

$$\Rightarrow m=100\ln 2=69.3$$

مثال 3 / إذا كان $Z\sim N(0,1)$ أوجد ما يلي:

$$P(Z<2.56)=\Phi(2.56)=0.9948$$

هي القيمة الواقعة عند تقاطع السطر 2.5 والعامود 0.06 في جدول التوزيع الطبيعي

$$P(1<Z<1.33)=P(Z<1.33)-P(Z<1)$$

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$= \phi(1.33) - \phi(1) = 0.9082 - 0.8143 = 0.0669$

$- P(Z > 1.84) = 1 - P(Z < 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$

$- P(Z < -1.36) = 1 - P(Z < 1.36) = 1 - 0.9131 = 0.00869$

تمرين 4 : إذا كان $Z \sim N(0,1)$ ، كان لدينا $P(Z < a) = 0.829$

أوجد a الحل :

نبحث عن قيمة 0.829 داخل الجدول سنجد أن أقرب قيمة لها تقع في خلية العدد 0.9 ، والعدد 0.05 $\Rightarrow a = 0.95$

تمرين 5 : إذا كان $Z \sim N(0,1)$ ، كان $P(Z > a) = 0.9875$ أوجد a

الحل :

$P(Z > a) = 1 - P(Z < a) = 0.9875$

$\Rightarrow P(Z < a) = 1 - 0.9875 = 0.0125$

$\Rightarrow \phi(a) = 0.0125$ نفرض أن $a = -A$ حيث $A > 0$

$\phi(a) = \phi(-A) = 1 - \phi(A) = 0.0125 \Rightarrow \phi(A) = 0.9875$

$\Rightarrow A = 2.24 \Rightarrow a = -A = -2.24$

تمرين 6 : إذا كان متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu = 48$ وانحرافه المعياري $\sigma = 10$ أوجد $P(42 < x \leq 61)$

الحل :

$P(42 < x \leq 61) = P\left(\frac{42-48}{10} < Z < \frac{61-48}{10}\right)$

$= P(-0.6 < Z < 1.3)$

$= P(Z \leq 1.3) - P(Z \leq -0.6) = \phi(1.3) - \phi(-0.6)$

$= \phi(1.3) - 1 + \phi(0.3) = 0.9032 - 1 + 0.7257$

$= 0.6289$

انتهت الإجابة على هذه الورقة

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject:

Date : / /

محاضرة السادسة على:

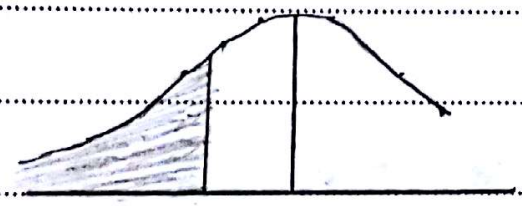
مسألة: تستخدم احدى الكليات مصابيح غازية توزع أعمارها توزيع طبيعي متوسطه $\mu=3000$ ساعة وانحراف معياري يساوي $\sigma=600$ ساعة

1) ما نسبة المصابيح التي يجب ان تبدل خلال 3350 ساعة منيرة على الاقل؟

الحل: X يساوي عمر المصباح فيكون $X\sim N(\mu=3500, \sigma^2=(600)^2)$

$$P(X<3350)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3350-3500}{600}\right)=P(Z\leq -0.25)$$

$$=1-P(Z<0.25)=0.4013$$



على الجدول

	0.05
0.2	0.5987

2) بعد كم ساعة يجب ان ينير 10% من المصابيح

الحل: $P(X\leq a)=0.1 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{a-3500}{600}\right)=0.1$

لنبرهن أن $z_\alpha>0$; $-z_\alpha=\frac{a-3500}{600}$

لأن $0.5>0.1$ إذاً تكون القيمة سالبة

$$\Rightarrow P(Z\leq -z_\alpha)=0.1 \Rightarrow 1-P(Z<z_\alpha)=0.1$$

$$\Rightarrow P(Z<z_\alpha)=0.90$$

من داخل الجدول نبحث عن القيمة 0.90

	0.08	0.09
1.2	0.8997	0.9015

لم نجد القيمة 0.90 لذا نأخذ أقرب قيمة له

0.9015 — 0.9000

0.0015

0.8997 — 0.8997

0.0003

الفرق الأصغر

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject: Date: / /

$\Rightarrow \Phi(\delta_0) = 0.90 \Rightarrow \Phi(1.28) = 0.90$

$\Rightarrow -1.28 = \frac{a-3500}{600} \Rightarrow a = 2732$

$P(Y < 2732) = 0.1$

مسألة 3 : توزع درجات مجموعة من الطلاب توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 77$ وانحراف معياري $\sigma = 7$ إذا اعتبرنا 10% من الأوائل جوائز فما أصغر درجة يمكن أن ينالها الطالب ليحصل على جائزة؟

الحل : X متحول عشوائي يدل على درجة الطالب $X \sim N(\mu = 77, \sigma^2 = 49)$

$P(X > a) = 0.1 \Rightarrow P(Z > \frac{a-77}{7}) = 0.1$

$1 - P(Z < \frac{a-77}{7}) = 0.1 \Rightarrow P(Z < \frac{a-77}{7}) = 0.9$

$\Rightarrow \Phi(\frac{a-77}{7}) = 0.9 \Rightarrow \Phi(1.28) = 0.9$

$\Rightarrow \frac{a-77}{7} = 0.9 \Rightarrow a = 85.96 \cong 86$

ملاحظة في التوزيع الطبيعي المتوسط هو نفسه الوسيط

مسألة 4 : إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكان $P(X < 10) = 0.8413$ وكان $E(X^2) = 68$ احسب كلاً من μ و σ^2

الحل :

$P(X < 10) = 0.8413 \Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10-\mu}{\sigma}) = 0.8413$

ندخل الجدول لنبحث عن قيمة 0.8413 داخل الجدول

	0.06
1.0	0.8413

$\Rightarrow \Phi(\frac{10-\mu}{\sigma}) = \Phi(1) = 0.8413$

$\Rightarrow \boxed{10 - \mu = \sigma}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = 68 - \mu^2}$

AL MARQI

Scanned by CamScanner

Subject:

Date : / /

$(10-\mu)^2 = 68-\mu^2 \Rightarrow 100-20\mu+\mu^2 = 68-\mu^2 \Rightarrow 2\mu^2-20\mu+32=0$

$\Rightarrow \mu^2-10\mu+16=0 \Rightarrow$ إما $\mu=2 \Rightarrow \sigma^2=64$ أو $\mu=8 \Rightarrow \sigma^2=4$

مسألة ٤: يغادر رجل منزله كل صباح الساعة 7 كي يصل الى عمله الساعة 8 وعندهم خلال فترة طويلة انه يتأخر عن عمله مرة كل اربعين مرة وقبل أن يغادر المنزل في الساعة 6:55 فهو خلال فترة عائلة انه يتأخر مرة كل 100 مرة بغض النظر عن الزمن الذي تستغرقه الرحلة يتبع توزيع طبيعي كم ينبغي أن يحدد موعد المغادرة بحيث لا يتأخر أكثر من مرة كل 200 مرة

الحل:

$P(X \geq 60) = \frac{1}{40} = 0.025$

$P(X \geq 65) = \frac{1}{100} = 0.01$

$\Rightarrow 1-P(X \leq 60) = 0.025 \Rightarrow P(X<60) = 0.975$

$\Rightarrow P(Z < \frac{60-\mu}{\sigma}) = 0.975 \Rightarrow \phi(\frac{60-\mu}{\sigma}) = 0.975$

$\Rightarrow \frac{60-\mu}{\sigma} = 1.96$ *

$1-P(Z < \frac{65-\mu}{\sigma}) = 0.01 \Rightarrow P(Z < \frac{65-\mu}{\sigma}) = 0.99$

$\Rightarrow \frac{65-\mu}{\sigma} = 2.33$ **

بحل * و ** هل حتى لك بناء

$\mu \simeq 33.54$ ، $\sigma \simeq 13.5$

$\Rightarrow X \sim N(33.54, (13.5)^2)$

$P(X > a) \leq \frac{1}{200} = 0.005$

$\Rightarrow P(Z > \frac{a-33.54}{13.5}) \leq 0.005 \Rightarrow 1-P(Z < \frac{a-33.54}{13.5}) \leq 0.005$

$\Rightarrow P(Z < \frac{a-33.54}{13.5}) \geq 0.995$

$\Rightarrow \phi(\frac{a-33.54}{13.5}) \geq \phi(2.575)$

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$\frac{q-33.54}{13.5} \geq 2.575 \Leftrightarrow q \geq 68.30$

أي يجب أن يغادر الرجل الساعة 6:50 كي لا يتأخر

كل 200 مرة مرة واحدة

على الجدول 0.8	0.07 لها البعد عنه 0.995 لذي نأخذ
2.5 المتوسط لها هو 2.575	0.9949 0.995

انتهت المحاضرة السادسة عشر

المحاضرة السابعة عشر

مسألة 1: يتم انتاج حاجيات الشاي التي تستخدم بوحدة صفيحة حديدية تصنع لنا بوصف خط الصدار X_1 كمتحول عشوائي له التوزيع الطبيعي $X_1 \sim N(3, 0.06)$ وبطريقة حديثة يتم انتاج صفائح حديدية ذات ثقوب دائرية يمكن عن قطر الثقب متحول عشوائي له التوزيع الطبيعي $X_2 \sim N(3.2, 0.01)$ حيث القياس بالسنتيمتر المطلوب

1) ما احتمال أن يناسب الصدار ثقب الصفيحة

الحل: X_1 و X_2 متحولان عشوائيان طبيعيان مستقلان واحتمال تناسب الصدار مع الثقب هو $P(X_1 < X_2) = P(X_1 - X_2 < 0)$

وبما أن X_1 و X_2 متحولة عشوائيان طبيعيان مستقلان

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \sim N(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2, \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2)$

$\Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$X = X_1 - X_2 \sim N(3 - 3.2, 0.04 + 0.01)$

$X \sim N(-0.2, 0.05)$

وبهذا الاحتمال المطلوب $P(X_1 < X_2) = P(X < 0)$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0-(-0.2)}{\sqrt{0.05}}\right) = P(Z < 0.894)$

$= \Phi(0.894) = 0.814$

Subject:

Date : / /

من الجدول	0.00	0.09
0.8		0.8133
0.9	0.8159	

$\frac{0.8133+0.8159}{2}=0.8146$

2) إذا اخترنا أربعة أزواج (حماد وصفية) فما هو احتمال أن يكون زوجان مرضا على الأقل حتما بان

الحل: يمكننا عد تناسب حماد وصفية تجربة ذوالية إما أن يتناسبا باحتمال $P=0.8146$ أذا لا يتناسبا باحتمال $q=1-P=0.186$ فإذا رمزنا بـ U لعدد الأزواج المتناسبة من بين 4 أزواج فيكون U تتبع هذا التوزيع بالوسيطين $n=4$ ، $P=0.8146$ فيكون لـ U دالة الاحتمال التالية

$$f_U(u)=P(U=u)=C_n^u P^u q^{n-u}$$

$$P(U\geq 2)=1-[P(U=0)+P(U=1)]$$

$$=1-[C_4^0(0.814)^0(0.186)^{4-0}+C_4^1(0.814)^1(0.186)^3]$$

$$=0.978$$

مسألة 2: في لعبة الحظ توجد 6 ملفات متماثلة في الشكل ويوجد داخل كل درج بطاقة تدل على عدد الجنيهات عند سحب الملف فإذا كان كل من الملفين الأول والثاني يحويه بطاقة بـ 15 جنيه ويحوي الملف الثالث بطاقة تحمل 10 جنيه والرابع يحوي بطاقة بـ 20 جنيه ويحوي الخامس والسادس بطاقة بـ 0 جنيه

1) إذا قام شخص بـ 36 علبة حسب مع أعادة فما هو احتمال أن يجمع مبلغ يزيد على 350 جنيه

الحل: بما أن الملفات متماثلة فيكون لكل درج نفس الفرصة في حب أي $\frac{1}{6}$ لكل درج فإذا دل X على عدد الجنيهات التي يكسبها اللاعب عند حبه للملف فيكون لـ X جدول التوزيع الاحتمالي التالي

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

X_i	0	10	15	20	Σ
$f(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

بما ان الصب 36 خلفة (صب ج اعادة) هو تماما صب عينة عشوائية حجمها $n=36$ من مجتمع له توزيع المتحول العشوائي X فاذا فرضنا ان $X_1, X_2, \dots, X_{36}$ عينة عشوائية لـ X ($X_1, \dots, X_{36}$ عوضناها بالعينة العشوائية لان لهم نفس التوزيع حسب قانون) واذا فرضنا T متحول عشوائي $T = X_1 + X_2 + \dots + X_{36}$ مجموع الكميات التي جمعها اللاعب عندما يقوم اللاعب بـ 36 عملية لعب

وحسب مرهنة النهاية المركزية وبالملاحظة ان $n = 36 > 30$ فانه يكون لدينا العشوائي T وبالتالي يكون لمتغير العشوائي T تقريبا T توزيع طبيعي

$T = \sum_{i=1}^{36} X_i \sim N$; $T \sim N(n\mu_x, n\sigma_x^2) \Rightarrow T \sim N(36\mu_x, 36\sigma_x^2)$

$\mu_x = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 0\left(\frac{2}{6}\right) + 1\left(\frac{10}{6}\right) + 2\left(\frac{15}{6}\right) + 1\left(\frac{20}{6}\right) = 10$

$\sigma_x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f_x(x_i)$

$= (0-10)^2\left(\frac{2}{6}\right) + (10-10)^2\frac{1}{6} + (15-10)^2\frac{2}{6} + (20-10)^2\frac{1}{6} = 58.33$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{58.33} = 7.64$

$\Rightarrow T \sim N(36(10), 36(58.33))$

$T \sim N(360, (45.83)^2)$

$P(T > 350) = P\left(Z > \frac{350-360}{45.83}\right) = P(Z > -0.22)$

$= P(Z < +0.22) = \phi(0.22) = 0.5871$

2) ما هو اصغر مبلغ يمكن ان يحصل عليه اللاعب باحتمال 95%

الحل : نفرض ان T_1 هو اصغر مبلغ يمكن الحصول عليه باحتمال 0.95 وبالتالي يكون احتمال الزائد

$P(T \geq T_1) = 0.95$

$P\left(Z > \frac{T_1 - 360}{45.83}\right) = 0.95 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{T-360}{45.83}\right)$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{T_1 - 360}{45.83}\right) = 1 - 0.95 = 0.05$

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$$\phi\left(\frac{T_1-360}{45.83}\right) = \phi(-\delta_0) = 0.05$$

$$P\left(Z < \frac{T_1-360}{45.83}\right) = P(Z < -\delta_0) = 1 - P(Z < \delta_0) = 0.05$$

$$\Rightarrow P(Z < \delta_0) = 0.95 = \phi(\delta_0) = \phi(1.645)$$

$$\Rightarrow \frac{T_1-360}{45.83} = -\delta_0 = -1.645 \Rightarrow T_1 = 284.61$$

أنتهت الإجابة النموذجية

Scanned by CamScanner

المحاضرة الثامنة عشر :

تمرين (1) : تدعي شركة لصنع الأدوية بأن احد الأدوية التي تنتجها تؤدي إلى شفاء 80% من المرضى الذين يعالجون به. والاختبار هذا الادعاء أخذت عينة عشوائية من 100 مريض عولجوا بهذا الدواء واتخذ قرار بقبول هذا الادعاء إذا شفي ما لا يقل عن 76 مريض أو أكثر.

ما احتمال رفض ادعاء الشركة إذا كان احتمال الشفاء باستخدام هذا الدواء هو 0,80

n كبيرة و P صغيرة نقرب من ذات الى البواسوني

n كبيرة و P كبيرة نقرب من ذات الى الطبيعي

$P=0.80$ و $n=100$ ، النموذج يتبع التوزيع الثنائي كون التجربة ثنائية (شفاء أو عدم شفاء) وتكرر تكرارا "احتمالا" $n=100$ مرة فيكون X هو عدد المرضى الذين تم شفاؤهم نتبع استخدام هذا الدواء فيكون لـ X توزيع ذات بارنوسيلي $P=0.80$ و $n=100$ وكون n كبيرة حيث يمكن احتمال التقريب التوزيع ذات إلى التوزيع الطبيعي فيكون $X \sim N(\mu=EX=np, \sigma^2=npq)$

$E(X)=np=0.80\times100=80$ ، $\sigma^2=npq=80\times0.20=16$

والادعاء يفرض أن ذاكان عدد الذين تم شفاؤهم أقل من 75

$$P(X<75)=P(X-\tfrac{1}{2})=P(X<74,5)=P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}<\frac{74.5-80}{4}\right)$$

(بسبب عامل التصحيح)

$$=P(Z<-13.8)=1-P(Z<1.38)=1-\Phi(1.38)=0.0853$$

2- ما احتمال فشل الشركة للادعاء إذا كان احتمال الشفاء لا يتجاوز 0,70 ؟

$\mu=np=70$ ، $\sigma^2=npq=21$ $\Rightarrow$ $X \sim (\mu=70, \sigma^2=21)$

AL MARJI

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$P(X>75) = P(X>75-\frac{1}{2}) = 1-P(X<74.5) = 1-P(Z<0.982)$

$= 1-\Phi(0.982) = 1-0.8365 = 0.1635$

ترين 2 : ليكن X متحول عشوائي منتظم التوزيع على المجال $[0,1]$ ، ولتكن لدينا عينة عشوائية لـ X حجمها 75 (1) احسب احتمال $P(0.45<\overline{X}<0.55)$

ملاحظة: اذا كانت العينات طبيعية تحقق شرط مبرهنة النهاية المركزية لما حجم العينة تحقق $n \geq 30$

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ، $\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

بما ان: $n=75 \geq 30$ ، العينة مستقلة و (بما نفس تابع التوزيع (توزيع منتظم))

فانه حسب مبرهنة النهاية المركزية يكون $\overline{X} \sim N(\mu = EX, \frac{\sigma^2}{n})$

$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ، $\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1-0}{12} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \overline{X} \sim N(\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{12}}{75}) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\frac{1}{2}, 0.0011)$

$P(0.45<\overline{X}<0.55) = P(\frac{0.45-0.5}{0.033} < Z < \frac{0.55-0.5}{0.033})$

$= P(-15.2 < Z < 0.55)$

$= 2P(15.2) - 1 = 2\Phi(15.2) - 1 = 2X(0.9357) - 1$

$= 0.8714$

انتهت الخاصة الثانية على

Scanned by CamScanner