الموضوع: المحاضرة الثانية

1- مقدمة في التحليل -5-

1- تعريف الدوال ذات التغير المحدود
2- خواص الدوال ذات التغير المحدود
3- معايير الدوال ذات التغير المحدود
4- تطبيقات ..
5- التجزئة.
6- التجزئة الأدق / الأخشن
7- نظيم التجزئة.
8- تعريف د.ت.م
9- نتائج د.ت.م

1- التجزئة:

إذا كان $[a,b]$ مجالاً حيث $a<b$
نقول عن $P[a,b]$ أنها تجزئة لـ$[a,b]$
إذا كتبت بالشكل

$$P[a,b] = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b;$$

$$x_i \in [a,b] \; ; \; i = \overline{0,n}$$

مثال:

إذا كان $[0,1]$ مجالاً من R فإن التجزئة

$$P[0,1] = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\} = P_1$$

$$P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

$$P_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$$

$P[a,b]$ (مجموعة جميع التجزئات للمجال $[a,b]$)

$$\Rightarrow P \in P[a,b]$$

2- التجزئة الأدق:

نقول عن التجزئة P' أنها تجزئة أدق من التجزئة P إذا كان $P \subset P'$

$$P_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

$$P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

إن التجزئة P_2 أدق من التجزئة P_1 وذلك لأن التجزئة P_2 تحوي P_1

3- نظيم التجزئة:

P تجزئة للمجال $[a,b]$ فإنه

$$\lambda p = \Delta p = \|p\|$$

$$\Delta p = \max (x_i - x_{i-1}) , \; i = \overline{1,n}$$

أصغر طول max للمسافة $\Delta P_1 = \frac{1}{2}$
بين الأعداد (النقاط المتتالية)

$\Delta P_2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \Delta p' < \Delta p$

تعريف الدالة ذات التغير المحدود:

إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ وكانت $\mathbb{P}[a,b]$ مجموعة جميع التجزئات للمجال $[a,b]$ ولتكن $p \in \mathbb{P}[a,b]$ (تجزئة لا على التعيين) بحيث:

$$p = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

نأخذ المجموع

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots$$

$$\dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{p \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,p)$$

إذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ فإن الدالة f تكون

دالة ذات تغير محدود

معنى $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ هذا يعني أنه يوجد M حيث $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq M$

ندعو $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ التغير الكلي للدالة على $[a,b]$

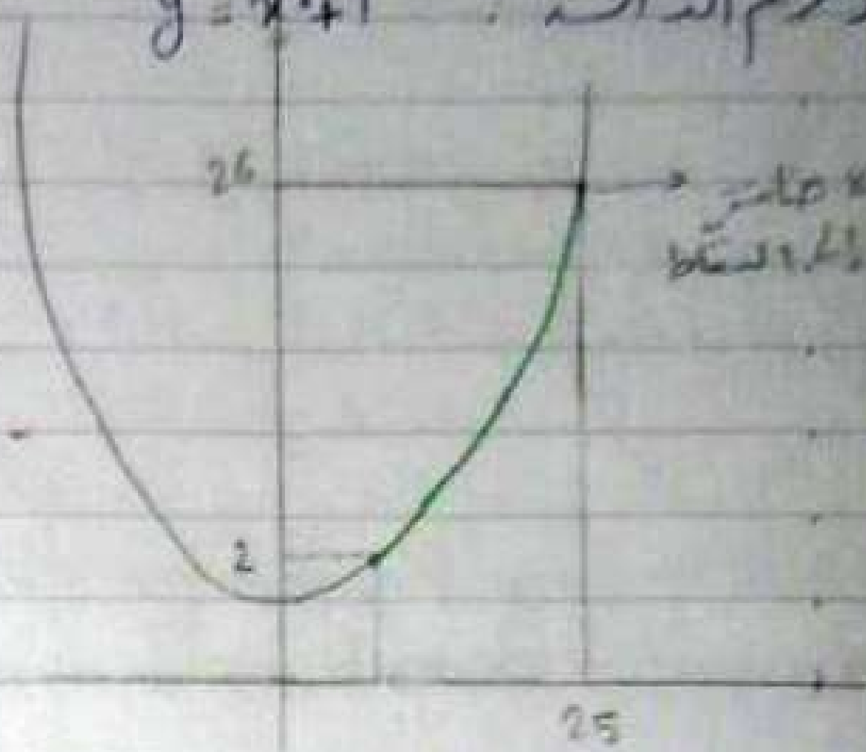
* إذا كانت $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \infty$ فإن f ليست دالة ذات تغير محدود

- وجود القيمة المطلقة يعني أن التغير الكلي أكبر أو يساوي الصفر.
- هي الدالة الوحيدة التي تغيرها الكلي صفر. بمعنى أنه إذا كان مجموع التجزئة معدوم والـ sup معدوم أي هي الدالة الثابتة أي هي دالة ذات تغير كلي = 0.

مثال: أوجد التغير الكلي للدالة f المعرّفة على $[1,5]$ علماً أن f معطاة بالشكل $f(x) = x^2 + 1$
هل f دالة ذات تغير محدود أم لا؟!

سؤال: أوجد التغير الكلي وبين أنها ذات تغير محدود

نرسم الدالة . $y = x^2+1$



لتكن P تجزئة لـ $[1,5]$ بالشكل التالي

$P = \{x_0=1 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n=5\}$

تجزئة لمجال التعريف

- نأخذ المجموع:

$V(f,P) = |f(x_1)-f(x_0)| + |f(x_2)-f(x_1)| + \dots + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$

$f(x_0) = f(1) = 1^2+1 = 2$

$f(x_1) = x_1^2+1 \ , \ f(x_n) = f(5)$

$= 25+1 = 26$

$V(f,P) = |x_1^2+1-2| + |x_2^2+1-x_1^2-1| + \dots + |26 - x_{n-1}^2 - 1|$

$V(f,P) = (x_1^2-1) + (x_2^2-x_1^2) + \dots + (x_3^2 - x_2^2) + (25 - x_{n-1}^2)$

$= -1 + 25$

$V(f,P) = 24 < \infty$

⇐ f دالة ذات تغير محدود

[illegible]

أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة على $[0,1]$ حيث أن f معطاة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x=0 \\ 1-x & ; 0<x<1 \\ 5 & ; x=1 \end{cases}$$

حلول

هل f ذات تغير محدود أم لا؟!

- أسئلة الامتحان