محاضرة التاسعة ٩ / ٤ / ٢٠١٧

9 - 1

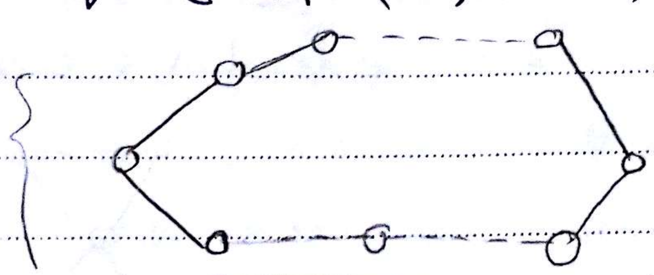
ليكن لدينا $G=(V,E)$ مترابط إذا وجد عقدتين $x,y\in V$ بحيث $x\neq y$

ووجد ممرين W_1, W_2 غير متساويين بين x و y عندئذٍ G يحوي دائرة.

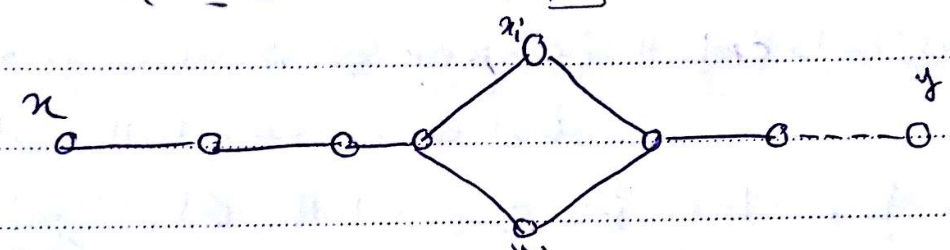
سوف نميز عدة حالات:

[1] $\forall v\in W_1=\langle x,\dots,y\rangle;\ v\neq x\wedge v\neq y$

بحيث أنه لا يوجد لا عقدة مشتركة بين W_1 و W_2

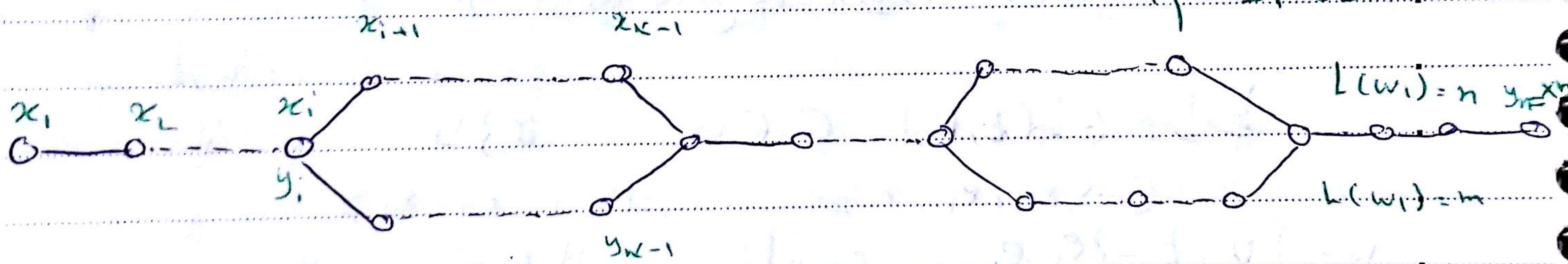


[2] $L(W_1)=L(W_2)$; $W_1\neq W_2$ (يعني على الأقل يوجد عقدتين مختلفتين



على الأقل: $\exists x_i\in W_1\wedge x_i\notin W_2\wedge y_i\in W_2\wedge y_i\notin W_1$

الحالة الأعم:



لأن W_1 و W_2 مختلفين عن بعضهما $A=\{t:1\le t\le n\wedge 1\le t\le m;\ x_t\neq y_t\}\neq\emptyset$

$A_1=\{s,f:\ t<s\le n\wedge t<f\le m:\ x_s\neq y_f\wedge x_{s+1}\neq y_{f+1}\}$

وهذه المجموعة $\neq\emptyset$ لأن $A\neq\emptyset$

$x_{t-1}=y_{t-1}=v\wedge x_{s+1}=y_{f+1}=u$

$\Rightarrow u\neq v$ ويوجد بينهما ممرين متقاطعين

عدا عقدة البداية و عقدة النهاية $\Leftarrow$ البيان يحوي دائرة.

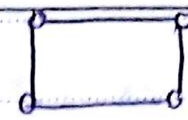
نتيجة: إذا كان البيان مترابط ولا يحوي دائرة فإن أي عقدتين من البيان مختلفتين يوجد ممر وحيد بينهما.

دائرة أويلر: هي دائرة تحوي جميع عقد البيان وأضلاعه (يمكن عندها تكرار العقد فقط)

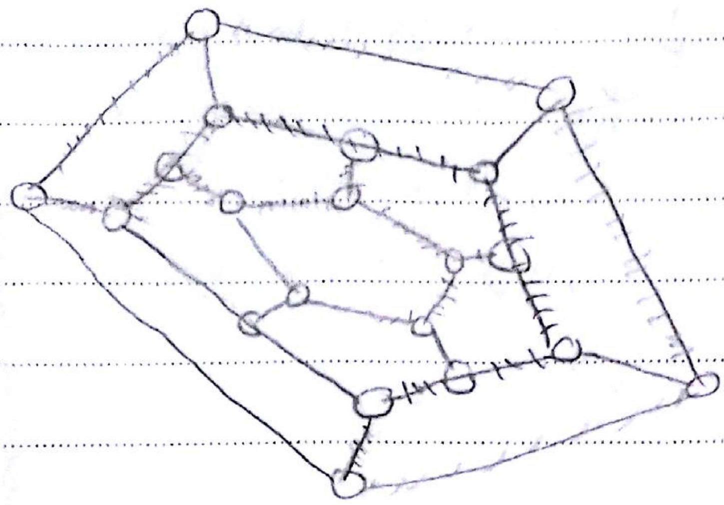
دائرة هاملتون: هي دائرة تحوي جميع عقد البيان لا يسمح فيها تكرار العقد قد لا تحوي أضلاع.

9 - 2

مثال على دائرة أويلر :



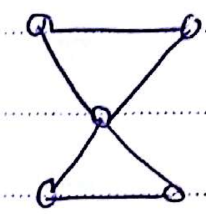
دائرة هاملتون :



هذا البيان منتظم

هذا البيان يملك دائرة أويلر

مثال على البيان يحوي دائرة أويلر ولا يحوي دائرة هاملتون :



تعريف : إذا وجد مسار يحوي جميع عقد البيان بإضلاعه فإن هذا المسار هو مسار أويلر والبيان هو نصف أويلر.

تعريف ملاحظة : إذا كان البيان يحوي دائرة هاملتون فإن البيان هو بيان هاملتون

* إذا حوى البيان مسار أويلر فإن البيان هو نصف أويلر.

* » » » مسار يحوي جميع عقد البيان فإن البيان هو بيان نصف هاملتوني

نظرية :

ليكن لدينا $G=(E,V)$ مترابط ; $C \in G$ دائرة

$$C=\langle x_1, e_1, x_2, \dots, e_{n-1}, x_n=x_1\rangle$$

ولنكن البيان $H \subset G$ حيث : $H=[V, E-\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}]$

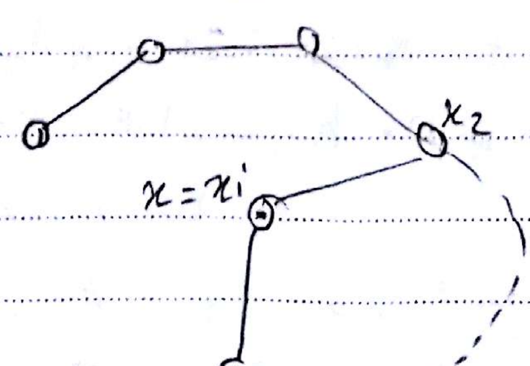
ولنكن $G'=[V', E-\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}]$

$V'=\{ v \in V$: v عقدة غير معزولة في $H \}$

عندئذ : فإن التقاطع $V' \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \emptyset$

الإثبات : كون البيان G بيان مترابط يوجد ممر بين x و y هو w_1

حيث x يرتبط بـ y ولنكن طول هذا الممر : $L(w_1)=m_1$



يوجد عدد صحيح أعظمي بحيث يكون $1 < r < m$ (قمنا بترقيم عقد البيان)

فالـ r هي أكبر عدد صحيح أعظمي بحيث يكون x_r من مجموعة عقد البيان:

$$x_r \in \{x_1, \_\_\_\_ x_n\}$$

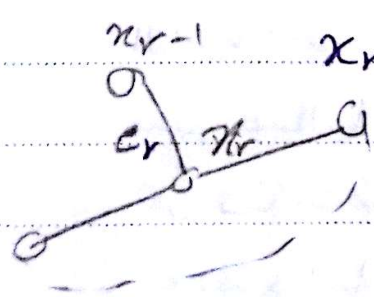
سوف نميز حالتين $\boxed{1}$ $\left(x_n \in \bar{V} \wedge \{x_1, \dots x_n\} \ni x_r : r = m : \mathrm{I}\right)$

لأن X_r غير معزولة $(x_r \in W_1)$

$$V' \cap \{x_1, \dots x_n\} \neq \emptyset$$

$\boxed{2}$ $r < m$ حسب تعريف r سيكون لدينا ما يلي:

$$x_r \in \{x_1, \_\_\_ x_n\} \wedge x_{r+1} \notin \{x_1, \dots x_n\}$$



$\Leftarrow$ الضلع ينتج e_r لا ينتمي لمجموعة الأضلاع

معزولة لأن $x_{r-1} \in \bar{V}$

$$e_r \notin \{e_1, e_2 \dots e_n\}$$

نستنتج: إن $\exists\, x_r$ $\bar{V}$ لأنها غير معزولة،

$$\bar{V} \cap \{x_1, x_2, \dots x_n\} \neq \emptyset$$

مبرهنة:

إذا كان البيان البسيط ومترابط وجميع عقده زوجية فإن البيان لا يحوي جسر.

١٥ - ١

لتكن لدينا البيان $G(V,E)$ جميع عقده زوجية فإن البيان G لا يحتوي على جسور.

إثبات المبرهنة السابقة:

$G=(V,E)$; $\forall x \in V$; $\deg(x) \geq 2$

عقدة زوجية

لننشأ دائرة من أي عقدة $\forall x \in V : C=<x,\dots,x>$

$<x,e,x_1,e_1,\dots,e_{n-1},x_n ; x_n=x>$

الدارة وفق المسار $x, x_1, \dots$

عدد عقد البيان منتهية (بما أنها منتهية) فإنه بتكرار هذه العملية سوف نعود بعد عدد منتهي من الخطوات

مجموعة الأضلاع في الدارة $\{e,e_1,\dots,e_{n-1}\}$

في هذه الدارة ربما تكون العقدة مكررة لكنه لا يمكن أن يوجد أضلاع مكررة لأنها مقامة على المسار

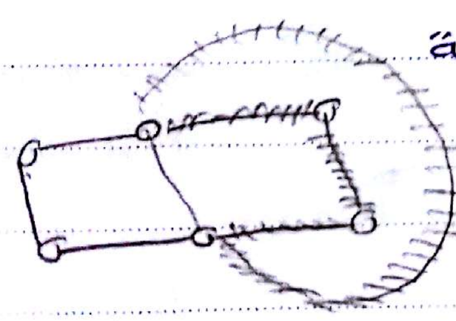
ولنأخذ البيان $H=\{V, E-\{e,e_1,\dots,e_{n-1}\}\}$ هذا البيان

ليس شرطاً أن يكون مترابط

إن كل ضلع ينتمي للدارة هو ليس جسر وكل عقدة تنتمي للدارة تتأثر في عدد زوجي من الأضلاع.

ولنأخذ: $G_1=(V', E-\{e,\dots,e_{n-1}\})$

العقد غير معزولة



G_1 مترابط قدرة أي عقدة فيه زوجية

ننشأ في G_1 بنفس الطريقة دارة

وبنفس الطريقة نحلل البيان جديد أي عقدة فيه هي عقدة زوجية

وبعد عدة خطوات نحلل البيان الناتج (الحاكي)

في كل بيان G عقده زوجية ليس جسر

مبرهنة:

لتكن G بيان بسيط ومترابط $G=(V,E)$ يكون G بيان أويلر $\Leftrightarrow$ جميع عقد البيان زوجية

/ /

2 - 10

الإثبات:

لزوم الشرط: نفرض أن G إيلر ⇐

$\forall x \in V ; deg(x) = 2i \quad : i \in N$

G إيلر ⇐ يوجد دائرة $C = <x, \dots, x>$

دائرة إيلر تحوي جميع عقد البيان وجميع أضلاعه أن أي عقدة من هذه الدائرة تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع.

تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع : $\forall v \in G$

⇐ إن أي عقدة في G هي عقدة زوجية.

كفاية الشرط:

نفرض أي عقدة في البيان زوجية.

يتم الإثبات وفق الخطوات: $\forall x \in G$ بحيث $deg(x) \geq 2$

⇐ يوجد ضلع يربط هذه العقدة بعقدة أخرى (لا الأضلاع الحلقية)

نحصل على الآتي: $x, e=(x,x_1), x_1$

من العقدة x_1 يوجد ضلع يربطها بعقدة أخرى (حتما ليس x)

وبذلك نحصل على المسار $w = <x, e_1, x_1, \dots, e_{n-1}, x_n>$ يمكن أن يكون منه تكرار عقد وأضلاع.

إذا كان هذا المسار أعظمياً ومغلقة فإننا قد حصلنا على دائرة أويلر.

إذا لم يكن هذا المسار أعظمياً (لا يحوي جميع أضلاع البيان) ولكنه مغلق ⇐ فهو دائرة

ننشأ البيان $G_1 = <V_1, E - \{e_1 \dots e_{n-1}\}>$

إن V_1 جميع عقدها غير معزولة أي:

$\forall y \in V_1 . \; deg\, y = 2i \quad , i \in N$

نحصل على مسار مغلق (دائرة) ونضيف هذه الدائرة للدائرة السابقة

ونتابع وبعد عدة خطوات نحصل على دائرة أويلر.

مبرهنة: ليكن $G=(V,E)$ بسيطاً ومترابطاً

نقول عن G إنه نصف إيلر ⇐ G يحوي عقدتين فرديتين فقط.

الإثبات:

/ /

10 - 3

لزوم الشرط: G نصف أويلر ⇐ يوجد مسار:

$W = \langle x, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n = y \rangle$: $x \neq y$

$\forall v \in W : v \neq x \wedge v \neq y$

فإنها تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع.

⇐ يبقى عقدتين وهما x, y عقد فردية

كفاية الشرط: G يكون فقط عقدتين فرديتين وأي جميع عقد البيان زوجية

باستثناء عقدتين نضيف للبيان $e = (x, y)$ يصبح $G' = (V, E \cup \{e\})$

بيان جميع عقده زوجية ⇐ G' دارة أويلر

ولنكن $C = \langle x_1, e_1, \ldots, x, e, y \ldots x_n \rangle$ بحذف الضلع e يكون المسار:

$W = \langle x_1, e_1, \ldots, y \rangle$

مسار يحوي جميع عقد البيان وجميع أضلاعه ⇐ مسار أويلري بـ G

⇐ G نصف أويلر.

خوارزمية Fleury Algorithm

لإنشاء دارة أويلر

[1] جميع عقد البيان زوجية (أويلر)

[2] فقط عقدتين فرديتين (حسب المبرهنة السابقة) (نصف أويلر)

إذا كانت جميع عقد البيان زوجية،

الخوارزمية الأولى الخطوة الأولى:

نختار x_0 عقدة مكونة $W_0 = \langle x_0 \rangle$

② ننشئ مسار ضمن G دون ما يصيبه $W_1 = \langle x_0, \ldots, x_i \rangle$

بحيث يكون يغطي جميع الأضلاع.

لدينا الحالات: ① حصلنا بالمسار مغلقة ولم أغطي ⇐ دارة ⇐

ننشئ $G_1 = (V_1, E - \{e \in W_n)$

ثم ننشئ مسار في هذا البيان،

بعدة عدة خطوات نحصل بالمسار ~~...~~ أويلر.

الحالة الثانية: المسار أعطى (كون جميع أضلاع البيان تم الدارة

دارة أويلر.

/ /

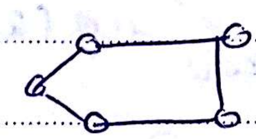
15 - ٦

ملاحظة: لا يوجد خوارزمية ذات كلفة معقولة لإيجاد دارة هاملتونية في هذا البيان

مبرهنة: ليكن لدينا $G=(V,E)$; $|V| = n \geq 3$

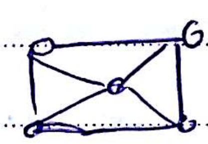
$\forall x,y \in V$, $deg(x) + deg(y) \geq n$

فإن البيان هو بيان هاملتوني



عدد عقد 5 ودرجة أي عقدة 2 وهو بيان هاملتوني، ولكنه لا يحقق الشرط مبرهنة.

مثال:



عدد العقد 5 ومجموع أي عقدتين ≥ 5 أي تحقق الشرط المبرهنة $\Leftarrow$ البيان هو بيان هاملتوني.

2017/4/19 محاضرة الحادية عشر

1 - 11

نقول عن البيان G انه منتظم من الدرجة r و $G=(V,E)$

اذا تحقق مايلي $\forall v \in V : deg(v) = r$

مبرهنة : ليكن $G=(V,E)$ بيان منتظم من الدرجة r

وليكن $|V| = n$ عندئذٍ فإن $|E| = r * \frac{n}{2}$

البرهان :

$$\sum_{x \in V} deg(x)$$

$$\sum_{x \in V} r = 2|E|$$

$$n*r = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{n*r}{2}$$

نتيجة : ليكن هذا $G=(V,E)$ البيان تام بحيث $|V| = n$

فيكون عدد الأضلاع $|E| = \frac{n*(n-1)}{2}$

تعريف البيان متعدد الأجزاء

ليكن لدينا البيان G مجموعة عقده $G=(V_1,V_2,\dots,V_n,E)$

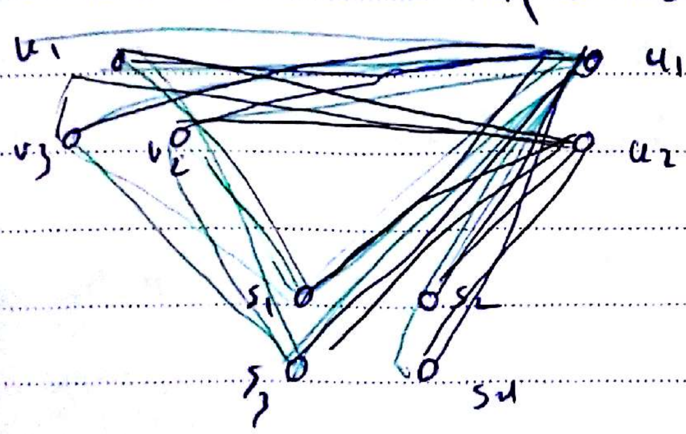
بحيث يتحقق مايلي : $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = V$

$V_i \cap V_j = \emptyset \; ; \; i \neq j$

$\forall x,y \in V_i , i=1 \dots n \Rightarrow e(x,y) \notin E$ // لنه أي عقدتين بنفس المجموعة لا يوجد ضلع يربط بينها //

عندئذٍ نحصل على البيان متعدد الأجزاء

أجعل البيان السابق البيان تام.



$$2(2\times3)+2(2\times4)+2(3\times4)=2|E|$$

$$2\times3+2\times4+3\times4=|E|$$

$$26=|E|$$

نتيجة: إذا كان البيان ثنائي التجزئة وإذا كان عندي عدد عناصر المجموعة الأولى $V_1=n$

، ، ، ، ، الثانية $V_2=m$

$$|V_1|=n,\quad |V_2|=m$$

$$|E|=m\times n$$

مفهوم المسافة بين عقدتين البيان:

ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$

نعرف مفهوم المسافة بين عقدتين وفق ما يلي:

$$\forall x,y\in V\ ;\ x\neq y$$

نعرف المسافة بين عقدتين ~~هي أقصر مسافة~~ عبارة عن أقصر ممر بين العقدتين x و y

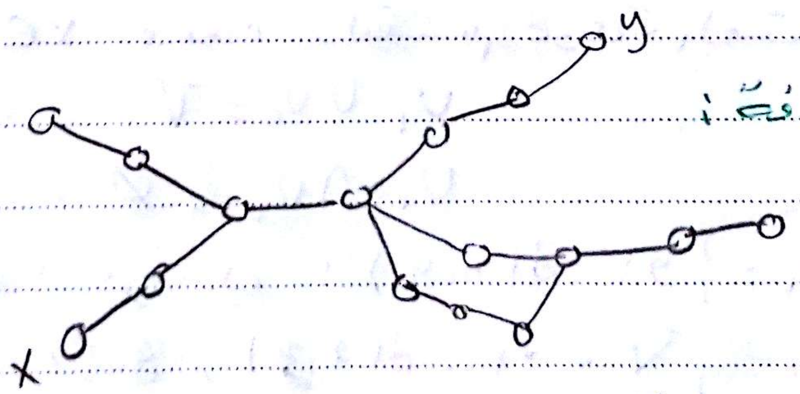
$$d(x,y)=\min\{L(w):\ \text{w ممر من x إلى y}\}$$

ملاحظة:

$$d(x,x)=0\ ,\quad d(x,y)=\infty \iff x\neq y$$

ممر من x إلى y ; $\nexists\ w$

مثال عن المسافة:



$$d(x,y)=6$$

ليكن $G=(V,E)$; $|\bar{V}|=n$, $|\bar{U}|=m$

البيان G زوجي (ثنائي التجزئة) $\iff$ $\nexists\ C\subseteq G$; C دائرة فردية

الإثبات:

G زوجي ونثبت أنه لا يحوي أي دائرة فردية

ليكن لدينا الدائرة التالية $C=\langle v_1,e_1,\ldots,e_{k-1},v_k=v_1\rangle$

/ /

٣ - ١١

بحيث $C \subset G$ ولنثبت ان هذه الدائرة إما زوجية أم ليست فردية

نفرض أنه $v_1 \in \bar{V}_1$ و $v_2 \in \bar{V}_2$ وهكذا بالتناوب

$v_i \in \bar{V}_1 \Leftrightarrow$ i فردي

$v_j \in \bar{V}_j \Leftrightarrow$ j زوجية

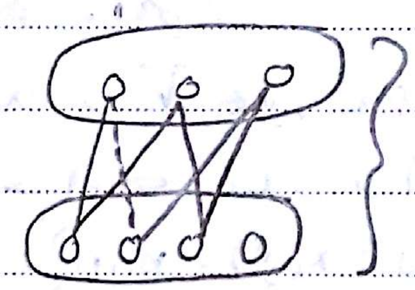
$v_{k-1} \in \bar{V}_2$

$W = \langle v_1 \ldots\ldots v_{k-1} \rangle$

$L(W) = k-2$ عدد فردي

$L(W) \cup \{e_{k-1}\} = k-1$ عدد زوجي

$\underbrace{W \cup \{e_{k-1}\}}_{\text{دائرة}} \subseteq G$



صفات دائرة زوجية

لنثبت ان البيان G زوجي $\Rightarrow \forall C \subset G$: دائرة زوجية

الاثبات :

لنفرض ان $x \in \bar{V}$ عقدة ولنقسم مجموعة العقد الى V_1 و V_2

بحيث $V_1 \cup V_2 = \bar{V}$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 = \{y : d(x,y)$ ؛ فردي $: y \in \bar{V}\}$

$V_2 = \{\bar{V} - V_1 : d(x,z)$ ؛ زوجي $; z \in \bar{V}\}$

ووضوحاً $V_1 \cup V_2 = \bar{V} \wedge$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

لدينا V_1 تحوي المسافات الفردية و V_2 تحوي المسافات الزوجية

بحيث يجب ان نبرهن ان أي عقدتين ينتمو لنفس المجموعة لا يوجد بينهما ضلع

$\forall x,y \in V_1 , e(x,y) \notin E$

وبنفس الطريقة :

$\forall r,s \in V_2 , e(r,s) \notin E$

لنأخذ الدائرة C مجموعة إضلاعها

$C = \langle x_1, e_1, \dots, e_{k-1}, x_k = x_1 \rangle$

ونعتبر $x, y \in V_2$ ، $x \neq y$

ولنثبت أن العقدتين x و y غير متجاورتين $C(x,y) \notin E$

لنعتبر $z \in V_1$

$\exists w_1 = \langle x \dots z \rangle$

$\exists w_2 = \langle z \dots y \rangle$

$w = w_1 \cup w_2$ ، $x \neq y$

سوف نعتبر w_1 أصغري

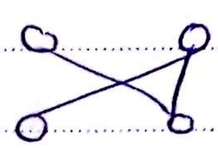
و w_2 أصغري

$w = \langle x \dots y \rangle$

نعتبر الحالات الآتية :

أولاً إن يكون الممرين منفصلين تماماً في هذه الحالة يكون w ممراً أصغري

بين x و y ويلزم أن يكون $L(w_1) =$ فردي



$L(w_2) =$ فردي

إذا كانت $w_1 \cap w_2 = \emptyset$

عندئذ سيكون مايلي

$C = w \cup \{e = (x,y)\}$

$= w_1 \cup w_2 \cup \{e(x,y)\}$

$L(C) =$ فردي + فردي + 1 = فردي

وهذا تناقض

الحالة الثانية : $w_1 \cap w_2 \neq \emptyset$

يعني يوجد عقد مشتركة

في هذه الحالة يوجد عدد صحيح $1 \le i \le n$

هذه i تحقق $x_i = y_j$

نحسب i أكبر عدد صحيح يحقق العلاقة السابقة سوف نبرهن أن $i \neq j$

/ /

٥ - ١١

w_1 أصغر من w_2 أصغر سوف نميز حالتين :

(٢) نفرض أن $i > j$ سيكون لدينا الأثر مسار سلسلة حالياً :

$\$ = w_1 \cup w_2$

$w_1 = \langle x_1 \ldots \ldots z \rangle \cup w = \langle z \ldots \ldots y \rangle$

وسيكون لدينا مسار لأنه في عقد غير متكرر

$w_1' = \langle x_i \ldots \ldots z \rangle$

$w_2' = \langle y_j \ldots \ldots y \rangle$

$w_1' \cup w_2' = w_2'' \subset w_2$

$L(w_2'') < L(w_2)$

وفي الحالتين حصلنا على تناقض وبالتالي فإن البيان لا يكون له دوائر فردية