حل أسئلة الدروات

أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول(40 درجة) :

١- بين أن كل نظيم مولد من جداء داخلي يحقق مساواة متوازي الأضلاع ، ثم أعط مثالاً على دالة نظيم لا تولد من دالة جداء داخلي

٢- لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$ ،

فإذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

عندئذ : $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = A + B$

السؤال الثاني(60 درجة) :

١- اكتب الحدود الثلاثة الأولى من منشور الدالة f المعرفة بالشكل $f(x,y) = e^x \sin y$ و فق متسلسلة تايلور في جوار النقطة $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

٢- ادرس قابلية الاشتقاق في النقطة $(0,0)$ للدالة الحقيقية المعرفة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

٣- لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بالدستور :

$$f(x,y) = e^{xy}$$

أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة و ادرس امكان كون كل منها نقطة قصوى نسبية للدالة المعطاة

انتهت الأسئلة ☺

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق   أ. هدى الشماط

حل أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول :

١- بين أن كل نظيم مولد من جداء داخلي يحقق مساواة متوازي الأضلاع ، ثم أعط مثالاً على دالة نظيم لا تولد من دالة جداء داخلي .

الحل :

كل نظيم مولد من جداء داخلي يحقق المساواة التالية (مساواة متوازي الأضلاع)

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

برهان هذه المساواة :

$$\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=<x,x>+2<x,y>+<y,y>$$
$$\|x-y\|^2=<x-y,x-y>=<x,x>-2<x,y>+<y,y>$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2<x,x>+2<y,y>$$

مثال معاكس : ليكن R2 فضاء متجهي ولنعرف الدالة $\|.\|: R^2 \to R$

$$x\to\|x\|=|x_1|+|x_2|$$

$$x=(x_1,x_2)\in R^2$$

فنجد أنها دالة نظيم بسبب ما يلي :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha\in\mathbb{R}$$
$$1)\ |x_i|\geq 0, i=1,2\Rightarrow |x_1|+|x_2|\geq 0\Longrightarrow \|x\|\geq 0$$
(بما أن القيمة المطلقة لكل مركبات العنصر x أي الأعداد $|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|$ هي غير سالبة فإن مجموعها حتماً سيكون غير سالب)
$$2)\ \|x\|=0\Leftrightarrow |x_1|+|x_2|=0$$
(مجموع مقادير موجبة يساوي الصفر إذاً كل من هذه المقادير يساوي الصفر)
$$\Leftrightarrow |x_i|=0\ ,(i=1,2)\ \Leftrightarrow x_i=0,(i=1,2)$$
$$\Leftrightarrow x_1=0,x_2=0\Leftrightarrow x=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}$$
$$3)\|\alpha x\|=|\alpha x_1|+|\alpha x_2|=|\alpha||x_1|+|\alpha||x_2|=|\alpha|(|x_1|+|x_2|)=|\alpha|.\|x\|$$
$$4)\|x+y\|=|x_1+y_1|+|x_2+y_2|\leq|x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|=\|x\|+\|y\|$$
نستنتج $\Leftarrow$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$
حقّق الشروط الأربعة إذاً $\|.\|$ دالة نظيم

- و لكن لنأخذ مثلاً :

$x = (1,1), y = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$

$\|x\| = \|(1,1)\| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \|x\|^2 = 4$

$\|y\| = \|(1,-1)\| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \|y\|^2 = 4$

$\|x + y\| = \|(2,0)\| = 2 \Rightarrow \|x + y\|^2 = 4$

$\|x - y\| = \|(0,+2)\| = 2 \Rightarrow \|x - y\|^2 = 4$

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 8 \;,\; 2[\|x\|^2 + \|y\|^2] = 2[8] = 16$

$8 \neq 16$

فهي لم تحقق مساواة متوازي الأضلاع و بالتالي لا تولد من جداء داخلي .

٢- لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$ ،

فإذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

عندئذ : $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = A + B$

الحل :

حسب الفرضيات يمكن أن نكتب:

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0: \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$
$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0: \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

بالاستفادة من المتراجحتين السابقتين:

$$|f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - A + g(x) - B| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 \,, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow |(f + g)(x) - (A + B)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = A + B$$

السؤال الثاني :

١- اكتب الحدود الثلاثة الأولى من منشور الدالة f المعرفة بالشكل $f(x,y)=e^x\sin y$ و فق متسلسلة تايلور في جوار النقطة $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

الحل :

لدينا

$$f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=e$$

$$f_x\,(x,y)=e^x\sin y \quad\Rightarrow f_x\,\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=e$$

$$f_{xx}(x,y)=e^x\sin y\Rightarrow f_{xx}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=e$$

$$f_{xy}(x,y)=\cos y\,e^x\Rightarrow f_{xy}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f_y\,(x,y)=\cos y\,e^x\Rightarrow f_y\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f_{yy}(x,y)=-\sin y\,e^x\Rightarrow f_{yy}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=-e$$

$$f_{yx}(x,y)=\cos y\,e^x\Rightarrow f_{yx}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية لـ f من جميع المراتب موجودة كما أن $R_m\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

$$f(\underbrace{x}_{a+h},\underbrace{y}_{b+k})-f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^x\sin x-e=\frac{1}{1!}\left[(x-1)e+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)0\right]+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2e+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)(-e)\right]$$

حيث: $x=a+h\Rightarrow h=x-1,\quad y=b+k\Rightarrow k=y-\frac{\pi}{2}$

لأن $(a,b)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$

$$e^x\sin x-e=(x-1)e+\frac{e}{2}\left((x-1)^2-\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow e^x\sin x=ex+e\frac{(x-1)^2}{2}-e\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

٢- ادرس قابلية الاشتقاق في النقطة (0,0) للدالة الحقيقية المعرفة بالشكل :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل :

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0-0)}{h}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0-0)}{h}=0$$
$$f(h+0,k+0)-f(0,0)=hf_x+kf_y+\mu\sqrt{h^2+k^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\log(1+h^2k^2)}{h^2+k^2}=\mu\sqrt{h^2+k^2}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mu=\frac{\log(1+h^2k^2)}{(h+k^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

إن المتراجحة $\log(1+t)\le t$ محققة حيث $t\ge 0$ وستفيدنا في الحل، وصحتها تُبرهن بالاعتماد على نظريةالقيمة الوسطى التي تنصّ: إذا كان التابع

$$\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$$

مستمرّاً على $[a,b]$، وقابلاً للاشتقاق على $]a,b[$ فإنّ:

$$\exists c\in]a,b[;\ \ \varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c)$$

إذاً بوضع $\varphi(x)=\log(1+x)$ مستمر على المجال $[0,t]$ واشتقاقي على $]0,t[$ حيث $t>0$،
و $a=0,\ \ b=t$ حسب نظرية القيمة الوسطى نجد أن: يوجد c بحيث $0<c<t$ وتحقق:

$$\underbrace{\log(1+t)}_{\varphi(b)=\varphi(t)}-\underbrace{\log(1+0)}_{\varphi(a)=\varphi(0)}=\underbrace{(1+t-1)}_{b-a}\varphi'(c)=t.\frac{1}{1+c}=\frac{t}{1+c}$$
$$\Rightarrow \log(1+t)=\frac{t}{1+c}\le t$$

وهي المتراجحة المطلوبة، الآن لندرس سعي η نحو ٠ حسب التعريف: (وباعتبار $h^2k^2=t$)

$$\left|\frac{\log(1+h^2k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}-0\right|\le\frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{(h^2+k^2).(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{(h^2+k^2)}<\delta$$

إذاً يقابل كل ε موجبة عدد $\delta=\varepsilon>0$ بحيث:

$$\|(h,k)\|<\delta\Rightarrow|\eta-0|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق في $(0,0)$.

نوهت الدكتورة أنه لا داعي لإثبات صحة المتراجحة حسب نظرية القيمة الوسطى و إنما يكفي أن نذكر أنها صحيحة حسب نظرية القيمة الوسطى دون إثبات

٣- لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بالدستور :

$$f(x,y)=e^{xy}$$

أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة و ادرس امكان كون كل منها نقطة قصوى نسبية للدالة المعطاة

الحل:

$$f_x(x,y)=ye^{xy}=0\Longrightarrow y=0\qquad :\ (e^{xy}>0)$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

و بالتالي هنالك نقطة حرجة وحيدة هي $(0,0)$ و لنرى فيما إذا كانت قصوى:

$$f_{xx}(x,y) = y^2e^{xy} \Longrightarrow f_{xx}(0,0) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = x^2e^{xy} \Longrightarrow f_y(0,0) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \Longrightarrow f_{xy}(0,0) = 1$$
$$f_{yx}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \Longrightarrow f_{yx}(0,0) = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

و بالتالي هي ليست قصوى

انتهى حل الدورة التكميلية ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول (40 درجة):

١- لتكن $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، لتكن x_0 نقطة حدية لـT، ولنفرض $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ عندئذ:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} \quad , \qquad (\, g(x) \neq 0 \, , B \neq 0)$$

٢- برهن أنه إذا كان X فضاء جداء داخلي فعندئذٍ تكون متراجحة كوشي شفارتز التالية : $x, y \in V$ عندئذٍ:

$$< x, y >^2 \leq < x, x > < y, y >$$

محققة و ذلك أياً كان $x, y \in X$.

السؤال الثاني (60 درجة) :

١- ادرس قابلية الاشتقاق في النقطة $(0,0)$ للدالة الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

٢- أوجد المشتق الاتجاهي للدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بـ:

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

في النقطة $(1,1)$ وفق الاتجاه $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

٣- لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ وبيانها :

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

برهن أن $(0,0)$و $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ هي نقاط حرجة للدالة f ، ثم بين فيما إذا كانت كل منها هي نقاط قيم قصوى نسبية للدالة f.

انتهت الأسئلة ☺

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق أ. هدى الشماط

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول :

١- لتكن $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، لتكن x_0 نقطة حدية لـT، ولنفرض $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ عندئذ:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} \ , \qquad (g(x) \neq 0 , B \neq 0)$$

الحل :

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$$

الآن نأخذ:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x).B}\right| < \frac{\varepsilon}{|g(x)|.|B|} \dots\dots\dots (*)$$

و ذلك بسبب ما يلي :

$$|g(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow |-[g(x) - B]| < \varepsilon \Rightarrow |B - g(x)| < \varepsilon$$

أيضاً لدينا :

$$|B| = |B - g(x) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \varepsilon + |g(x)|$$
$$\Rightarrow |B| - \varepsilon < |g(x)|$$
$$\underset{\text{نقلب}}{\Rightarrow} \frac{1}{|B| - \varepsilon} > \frac{1}{|g(x)|} \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B| - \varepsilon}$$

نعوض في (*) فنجد أن:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon}{|B|(|B| - \varepsilon)}$$

وبما أن ε عدد موجب اختياري ، نختار $\varepsilon = \frac{|B|}{2} \dots (**)$ بالتعويض نجد:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[|B| - \frac{|B|}{2}\right]} < \frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[\frac{|B|}{2}\right]} = \frac{1}{|B|} \underset{(**)\text{حسب}}{=} \frac{1}{2\varepsilon}$$

ومنه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta , \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

٢- برهن أنه إذا كان X فضاء جداء داخلي فعندئذٍ تكون متراجحة كوشي شفارتز التالية :
$x, y \in V$ عندئذٍ:

$$< x,y >^2 \leq < x,x > < y,y >$$

محققة و ذلك أياً كان $x,y \in X$.

الحل :

لنميز حالتين :

الحالة الأولى :لنفرض أن $x = 0_X$

$$< x.y > = < 0_X, y >=< 0_R.x, y >= 0_R < x.y >= 0_R$$

من جهة أخرى

$$< x, x >=< 0_X.0_X >=< 0_R.x, 0_R.x >= (0_R)^2$$

و بالتالي :

$$0_X =< x, y > \leq < x, x >< y, y >= 0_R$$

الحالة الثانية إذا كانت $x \neq 0_X$ فإنه من أجل أي عدد حقيقي $\propto$

$$0 \leq <\propto x - y, \propto x - y >=<\propto x, \propto x > + <\propto x, -y > + < -y, \alpha x > + < -y, -y >$$

$$0 \leq \propto^2 < x, x > -\propto < x, y > -\propto < y, x > + < y, y >$$

$$0 \leq \propto^2 < x, x > -2 < x, y > \propto + < y, y >$$

لنأخذ $\propto = \frac{<x,y>}{<x,x>}$ حيث $x \neq 0_X$

$$0 \leq \frac{< x, y >^2}{< x, x >^2} < x, x > -2\frac{< x, y >^2}{< x, x >} + < y, y >$$

$$0 \leq \frac{< x, y >^2}{< x, x >} - 2\frac{< x, y >^2}{< x, x >} + < y, y >$$

نختزل ثم نضرب بالمقام المشترك طرفي المتراجحة :

$$0 \leq -\frac{< x, y >^2}{< x, x >} + < y, y >$$

$$< x, y >^2 \leq < x, x >. < y, y >$$

فالمتراجحة محققة .

السؤال الثاني:

١- ادرس قابلية الاشتقاق في النقطة $(0,0)$ للدالة الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل :

حتى تكون الدالة $f(x,y)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $(0,0)$ يجب أن يتحقق أنه :

$$f(0+h,0+k)-f(0,0)=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}k+\mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

شريطة أن يكون $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\mu(h,k)=0$ لنحسب المقادير اللازم تعويضها في التعريف السابق :

$$f(0+h,0+k)=f(h,k)=h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}$$

$$f(0,0)=0$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h(h^2-0)}{h^2}-0}{h}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

نعوض :

$$h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}=h+\mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=h\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-1\right)=h\left(-\frac{2k^2}{h^2+k^2}\right)=-\frac{2hk^2}{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow\mu(h,k)=-\frac{2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

و بقي أن نختبر فيما إذا كان $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu(h,k)=0$ فنلاحظ أنه لو أخذنا $h=k^2$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu(h,k)=\lim_{k\to 0}\mu(k^2,k)=\lim_{k\to 0}-\frac{2k^3}{(k^4+k^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}=-2\neq 0$$

فالدالة غير قابلة للاشتقاق عند المبدأ .

٢- أوجد المشتق الاتجاهي للدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ و المحددة بـ:

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

في النقطة $(1,1)$ وفق الاتجاه $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل :

بداية لنتحقق من كون طويلة الشعاع u تساوي الواحد ، أي $||u||=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$ ،

الآن نعلم أن مشتق التابع $f(x,y)$ باتجاه الشعاع u و الذي يحقق أن $||u||=1$ في النقطة $c=(1,1)$ يعطى بالشكل :

$$\frac{\partial f(c)}{\partial u}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

$$c+hu=(1,1)+h\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2},1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(c+hu)=f\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2},1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\sqrt{2}h+h^2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(h+\sqrt{2}\right)^2\right)=\ln(h+\sqrt{2})$$

$$f(c)=\ln\left(\sqrt{1+1}\right)=\ln\sqrt{2}$$

نعوض :

$$\frac{\partial f(c)}{\partial u}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}=\frac{\partial f(c)}{\partial u}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+\sqrt{2})-\ln\sqrt{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}\frac{h}{\sqrt{2}}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

٣- لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ وبيانها : $f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$

برهن أن $(0,0)$و $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ هي نقاط حرجة للدالة f ، ثم بين فيما إذا كانت كل منها هي نقاط قيم قصوى نسبية للدالة f.

الحل:

لنحسب المشتقات الصرفة من المرتبة الأولى و نعوض النقاط

$$f_x(x,y) = 2xy - y^2 + y \Longrightarrow f_x(0,0) = 0$$
$$f_y(x,y) = x^2 - 2xy + x \Longrightarrow f_y(0,0) = 0$$

فالنقطة $(0,0)$ نقطة حرجة ، أما من أجل النقطة $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ فنلاحظ أنه:

$$f_x(x,y) = 2xy - y^2 + y \Longrightarrow f_x\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = 0$$
$$= f_y\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow \text{حرجة}$$

-الآن لنختبر فيما إذا كانت النقطة $(0,0)$ قصوى !

$$f_{xx}(x,y) = 2y \Longrightarrow f_{xx}(0,0) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = -2x \Longrightarrow f_{yy}(0,0) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x - 2y + 1 \Longrightarrow f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \;(\text{ليست قصوى})$$

أما من أجل النقطة $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.،

$$0 < f_{xx}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = f_{yy}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$
$$f_{xy}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = f_{yx}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

فهي صغرى نسبية

انتهى حل الدورة الفصلية الثانية ☺

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول (40 درجة):

I) عرف ما يلي :

المجموعة المترابطة ، المجموعة المتراصة ، التغطية المفتوحة ، متتالية كوشي في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

II) بين أن كل دالة مسافة مولدة من دالة نظيم على فضاء متجهي X يحقق الشرطين التاليين :

$$1)\ x,y,z \in X:\ d(x+x, y+z) = d(x,y)$$

$$2)\ x,y \in X, \alpha \in \mathbb{R}:\ d(\alpha x. \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$$

ثم أعط مثالاً على دالة مسافة غير مولدة من دالة نظيم (مع الإثبات) .

السؤال الثاني : (60 درجة):

I) لتكن الدالة الحقيقة f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ والمحددة بالدستور :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1} - 1)}{x^2+(y-2)^2} & \text{من أجل} \quad (x,y) \neq (0,2) \\ 0 & \text{من أجل} \quad (x,y) = (0,2) \end{cases}$$

١- أثبت أن نهاية الدالة f في النقطة $(0,2)$ تساوي $\frac{1}{2}$ وذلك حسب التعريف بلغة (ε, δ)

٢- ادرس استمرار الدالة f في النقطة $(0,2)$

II) لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^n$ والمحددة بالدستور :

$$f(x,y) = e^x . \arctan y$$

اكتب الحدود الثلاثة الأولى من منشور الدالة f في النقطة $(0,1)$

III) لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^n$ بيانها :

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$$

برهن أن $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f ، ثم برهن أن $(0,0)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبياً لمقصور f على أي مستقيم مار بهذه النقطة .

انتهى حل الأسئلة ☺

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق أ. هدى الشماط

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول :

I) عرف ما يلي : المجموعة المترابطة ، المجموعة المتراصة ، التغطية المفتوحة ، متتالية كوشي في الفضاء الإقليدي

الحل:

المجموعة المترابطة: نقول عن المجموعة $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ بأنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان u,v مفتوحتان غير خاليتين بحيث:

$$u \cap S \neq \phi \qquad v \cap S \neq \phi$$
$$(u \cap S) \cap (v \cap S) = \phi$$
$$(u \cap S) \cup (v \cap S) = S$$

عندئذ نسمي u , v بفصل المجموعة S.

المجموعة المتراصّة: نقول عن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مجموعة متراصّة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ S تغطية جزئية منتهية .

التغطية: لتكن $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن $\{u_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات المنتهية أو غير المنتهية، نقول عن هذه الجماعة أنها تشكل تغطية لـ S إذا تحقق:

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} u_i$$

وتكون هذه التغطية مفتوحة إذا كانت الجماعة $\{u_i : i \in I\}$ عبارة عن مجموعات مفتوحة.

متتالية كوشي :

نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ إنها متتالية كوشي في $\mathbb{R}^n$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, m, k \geq n_\varepsilon \Rightarrow ||x_m - x_k|| < \varepsilon$$

II) بين أن كل دالة مسافة مولدة من دالة نظيم على فضاء متجهي X يحقق الشرطين التاليين :

$$1)\ x,y,z \in X : \ d(x+x, y+z) = d(x,y)$$
$$2)\ x,y \in X, \alpha \in \mathbb{R} : d(\alpha x . \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$$

ثم أعط مثالاً على دالة مسافة غير مولدة من دالة نظيم (مع الإثبات)

الحل :

ليكن d مترك مولد من نظيم على فضاء متجهي X عندئذٍ :

$$1)\ d(x+z\,,y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

وذلك لأن كل نظيم على فضاء متجهي يحدد متركاً معرفاً بالشكل :

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

$$2)\ d(\alpha x,\alpha y) = \|\alpha x,\alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|.\|x-y\| = |\alpha|.d(x,y)$$

إن الشرطين السابقين محققين من أجل :

$$x,y,z \in X\,,\alpha \in \mathbb{R}$$

لنأخذ مثالاً على دالة مسافة غير مولدة من دالة نظيم :

لتكن S مجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحددة والغير محددة ولنعرف الدالة :

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.\frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

حيث :

$$x = \{x_i\}\,,y = \{y_i\}$$

إن d هي دالة مسافة ولنثبت أنها غير مولدة من نظيم :

لتكن d مولدة من نظيم يجب أن يتحقق الشرطين الواردين في المبرهنة أعلاه معاً

ولكن نجد أن :

$$d(\alpha x,\alpha y) \neq |\alpha| d(x,y)$$

وذلك لأن :

$$l_1 = d(\alpha x,\alpha y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.\frac{|\alpha x_i - \alpha y_i|}{1+|\alpha x_i - \alpha y_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.\frac{|\alpha|.|x_i - y_i|}{1+|\alpha||x_i - y_i|}$$

لا يمكن إخراج $|\alpha|$ عامل مشترك من المجموع لأن مقام الحد العام للمجموع مؤلف من حدين أحدهما (1) لا يحوي القيمة $|\alpha|$

ولدينا :

$$l_2 = |\alpha|.d(x,y) = |\alpha|.\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}.\frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

من الواضح أن $l_1 \neq l_2$ من أجل : $\alpha > 1$

ويكفي عدم تحقق أحد الشرطين لذلك لا داعي لمناقشة الشرط الأول

ومنه d دالة مسافة غير مولدة من نظيم ..

السؤال الثاني :

I)لتكن الدالة الحقيقة f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ والمحددة بالدستور :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1} - 1)}{x^2+(y-2)^2} & (x,y) \neq (0,2) \text{ من أجل } \\ 0 & (x,y) = (0,2) \text{ من أجل } \end{cases}$$

أثبت أن نهاية الدالة f في النقطة $(0,2)$ تساوي $\frac{1}{2}$ وذلك حسب التعريف بلغة (ε, δ)

ادرس استمرار الدالة f في النقطة $(0,2)$

الحل :

١- لنثبت حسب التعريف أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 ; 0 < \|(x,y) - (0,2)\| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

ولنضع للسهولة $a = x^2 + (y-2)^2$:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{a+1}}{a}$$

ولنأخذ لأجل ذلك $(x,y) \neq (0,2)$ عندئذٍ :

$$\left|f(x,y) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{a+1}}{a} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{a+1} - 2 - a}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{a+1}-1-1-a}{2a}\right|=\left|\frac{-(1+a)+2\sqrt{a+1}-1}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}{2a}\right|=\frac{\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}{2a}\quad :\ 0<a$$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط : $\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2$ فنجد أن :

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\frac{\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2.\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}{2a.\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}=\frac{(a+1-1)^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}$$

$$=\frac{a^2}{2a.\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}=\frac{2}{2.\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}<\frac{a}{2}$$

ولدينا:

$$\|(x,y)-(0,2)\|<\delta\ \Rightarrow\|(x-0\ ,y-2)\|<\delta$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}<\delta$$

$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2<\delta^2\ \ \Rightarrow a<\delta^2$$

ومنه يكون :

$$\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}$$

أصبح لدينا :

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}$$

باختيار $\varepsilon=\frac{\delta^2}{2}$ لأجله يوجد : $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$ ومنه :

$$\forall\varepsilon=\frac{\delta^2}{2}>:\exists\delta=\sqrt{2\varepsilon}\,;0<\|(x,y)-(0,2)\|<\delta\ \Rightarrow\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

أي أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}f(x,y)=\frac{1}{2}$$

محققة ..

٢- إن الدالة $f(x,y)$ عند النقطة $(0,2)$ لأنها نقطة حدية قيمة الدالة عندها لا تساوي النهاية أي :

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f(0,2) = 0$$

II) لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^n$ والمحددة بالدستور :

$$f(x,y) = e^x.\arctan y$$

اكتب الحدود الثلاثة الأولى من منشور الدالة f في النقطة $(0,1)$

الحل :

لدينا هنا النشر في جوار النقطة : $(a,b) = (0,1)$ ومنه يكون :

$$f(a,b) = f(0,1) = e^0 \arctan(1) = 1.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

ونعلم أن منشور تايلور للدالة $f(x,y)$ دالة بمتغيرين يعطى بالدستور :

$$f(a+h\,,b+k) - f(a,b) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n .f(a,b) + R_{m+1}$$

بحيث :

$$x = a + h \Rightarrow h = x - a = x - 0 = x \qquad : a = 0$$

$$y = b + k \Rightarrow k = y - b = y - 1 \qquad : b = 1$$

كما أن :

$$f_x = e^x.\arctan(y) \Rightarrow f_x(0,1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{xx} = e^x.\arctan(y) \Rightarrow f_{xx}(0,1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_y = e^x.\frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f_y(0,1) = \frac{1}{2}$$

$$f_{yy} = e^x.\frac{-2y}{(1+y^2)^2} \Rightarrow f_{yy}(0,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{yx} = e^x.\frac{1}{1+y^2} = f_{xy} \Rightarrow f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = \frac{1}{2}$$

ونلاحظ أن المشتقات الجزئية ل f من جميع المراتب موجودة كما أن :

$$R_{m+1} \underbrace{\longrightarrow}_{m\to\infty} 0$$

ومن أجل ذلك يصبح منشور تايلور لـِ f بالشكل :

$$f(x,y) - f(0,1) = \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial f(0,1)}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial f(0,1)}{\partial y}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x,y) = e^x.\arctan(y) \\ &= \frac{\pi}{4} + xf_x(0,1) + (y-1)f_y(0,1) \\ &+ \frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}(0,1) + 2x(y-1)f_{xy}(0,1) + (y-1)^2f_{yy}(0,1)\right)\end{aligned}$$

نعوض :

$$\Rightarrow e^x.\arctan(y) = \frac{\pi}{4} + x\frac{\pi}{4} + (y-1)\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}.\frac{\pi}{4} + 2x(y-1)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x + \frac{(y-1)}{2} + \frac{\pi}{8}x^2 + x(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}$$

III) لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^n$ بيانها :

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$$

برهن أن (0,0) هي نقطة حرجة للدالة f ، ثم برهن أن (0,0) هي نقطة قيمة صغرى نسبياً لمقصور f على أي مستقيم مار بهذه النقطة .

الحل :

لنثبت أولاً أن (0,0) نقطة حرجة لـ f بحيث لدينا :

$$f_x(x,y) = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2)$$

$$f_y(x,y) = (y-2x^2) + (y-x^2)$$

نلاحظ أن :

$$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f ..

من جهة اخرى :

لنفرض أن $y = \alpha x$ وهي معادلة مستقيم (أي مستقيم)مار بـ $(0,0)$ لنعوض بالدالة f نجد :

$$f(x, \alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 2x^2)$$

$$= \alpha^2 x^2 - 2\alpha x^3 - \alpha x^3 + 2x^4$$

$$= 2x^4 - 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2$$

ولدينا :

$$f_x(x, \alpha x) = 8x^3 - 9\alpha x^2 + 2\alpha^2 x$$

$$f_{xx}(\alpha, \alpha x) = 24x^2 - 18\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2\alpha^2 > 0$$

نلاحظ أن المشتق الثاني للمتحول الأول موجب ومنه النقطة $(0,0)$ هي قيمة صغرى نسبياً بالنسبة لمقصور f على أي مستقيم $y = \alpha x$ مار منها

انتهى حل الدورة الفصلية الثانية ☺

أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٤-٢٠١٥) :

السؤال الأول (40 درجة) :

١- لتكن f دالة حقيقية معرفة على D حيث $(D \subseteq R^n)$ و لتكن c نقطة داخلية في D ، و لنفرض أن f قابلة للاشتقاق في c ، عندئذٍ يوجد عددان موجبان k, δ بحيث إذا تحقق الشرط $||x - c|| < \delta$ فإن :

$$|f(x) - f(c)| < k||x - c||$$

٢- أثبت أن الفضاء المتجهي $C[a, b]$ و المزود بالدالة $||.||$ المعرفة بالشكل :

$$||x|| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

هو فضاء منظم ، ثم أثبت أن هذا النظيم غير مولد من جداء داخلي .

السؤال الثاني (60 درجة) :

١- انشر حسب قوى x, y (أي بجوار $(0,0)$) الدالة:

$$f(x, y) = \ln(1 - x - y + xy)$$

٢- لتكن الدالة الحقيقية المعرفة على R^2 بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & : (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

ادرس استمرار و قابلية الاشتقاق للدالة f في النقطة $(0,0)$ (حسب تعريف الاستمرار و قابلية الاشتقاق)

٣- لتكن الدالة الحقيقية المعرفة على R^2 بالشكل :

$$f(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$$

برهن أن $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f ثم برهن أن $(0,0)$ هي نقطة صغرى نسبياً لمقصور f على أي مستقيم مار من هذه النقطة

انتهى حل الأسئلة ☺

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق أ. هدى الشماط

حل أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٤-٢٠١٥) :

السؤال الأول :

١- لتكن f دالة حقيقية معرفة على D حيث $(D \subseteq R^n)$ و لتكن c نقطة داخلية في D ، و لنفرض أن f قابلة للاشتقاق في c ، عندئذٍ يوجد عددان موجبان k, δ بحيث إذا تحقق الشرط $||x-c|| < \delta$ فإن :

$$|f(x)-f(c)| < k||x-c||$$

الحل :

بما أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $c = (c_1, c_2 \dots, c_n)$ فيوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إذا كان $||h|| < \delta_1$ فهنالك $A = (A_1, A_2, \dots A_n) \in \mathbb{R}^n$ وتحقق

$$f(c+h)-f(c) =: A_1h_1 +: A_2h_2 \dots + A_nh_n + \mu||h||$$

بشرط:

$$\lim_{||h||\to 0} \mu = 0$$

الآن لنبدأ من المقدار $|f(c+h)-f(c)|$

$$|f(c+h)-f(c)| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_ih_i + \mu\,||h||\right|$$

$$\underbrace{\leq}_{|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|} \left|\sum_{i=1}^{n} A_ih_i\right| + |\mu|\,||h|| \underbrace{\leq}_{|\sum c_n|\leq\sum|c_n|} \sum_{i=1}^{n}|A_i||h_i| + |\mu|\,||h||$$

مع الانتباه أن : $h_i \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2 \dots h_n^2}$ لكل $1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow |f(c+h)-f(c)| \leq \sum_{i=1}^{n}|A_i|||h|| + |\mu|\,||h|| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|A_i| + \mu\right)||h||$$

لكن الدالة قابلة للاشتقاق أي أن $\lim_{||h||\to 0} \mu = 0$

و بالتالي حسب تعريف النهاية : ومن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ (سنختار $\varepsilon = 1$) يوجد δ_2

$$0 < ||h-0|| < \delta_2 \Rightarrow |\mu| < \varepsilon = 1$$

وبالتالي

$$\Rightarrow |f(c+h)-f(c)| < \left(\sum_{i=1}^{n}|A_i| + 1\right)||h|| \dots (*)$$

لنسمي كل c+h بـ x و لنضع $\sum_{i=1}^{n}|A_i| + 1 = k > 0$ عندئذٍ تصبح العلاقة (*) :

$$|f(x)-f(c)| < k||x-c||$$

أي يوجد $k > 0$ و يوجد $0 < \delta = \min(\delta_2, \delta_1)$ بحيث عندما يكون $||h|| = ||x-c|| < \delta$ فإن :

$$|f(x) - f(c)| < k||x - c||$$

وهو المطلوب

٢- أثبت أن الفضاء المتجهي $C[a,b]$ و المزود بالدالة $\|.\|$ المعرفة بالشكل :

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b}\{|x(t)|\}$$

هو فضاء منظم ، ثم أثبت أن هذا النظيم غير مولد من جداء داخلي .

الحل :

ليكن $x, y \in C[a,b]$ (تابعان) و ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$:

الشرط الأول : لدينا $|x(t)| \geq 0 \,, \forall t \in [a,b]$ و بالتالي يكون:

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b}|x(t)| \geq |x(t)| \geq 0$$

الشرط الثاني :

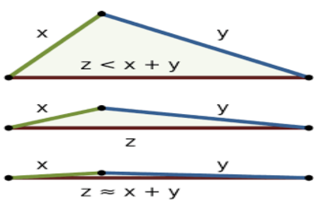
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max_{a\le t\le b}|x(t)| = 0$$

و لكن $0 \le |x(t)| \le \max_{a\le t\le b}|x(t)| = 0$ و بالتالي $x(t) = 0$ لكل $t \in [a,b]$ و هذا يبين أن : $x = 0$
فالشرط الثاني محقق

الشرط الثالث :

$$\|\alpha x\| = \max_{a\le t\le b}|\alpha x(t)| = |\alpha| \max_{a\le t\le b}|x(t)| = |\alpha|\|x\|$$

الشرط الرابع : (متراجحة المثلث)



$$\|x+y\| = \max_{a\le t\le b}|x(t) + y(t)|$$

عندئذٍ يوجد نقطة $c \in [a,b]$ بحيث تكون $|x(c) + y(c)| = \max_{a\le t\le b}|x(t) + y(t)|$ ((أي أن c هي النقطة التي تبلغ عندها الدالة $|x(t) + y(t)|$ قيمتها العظمى))

الآن :

$$\|x+y\| = \max_{a\le t\le b}|x(t) + y(t)| = |x(c) + y(c)| \le |x(c)| + |y(c)| \le \max_{a\le t\le b}|x(t)| + \max_{a\le t\le b}|y(t)| = \|x\| + \|y\|$$

مما سبق نجد أن الدالة هي دالة نظيم

-إلا أن هذا النظيم غير مولد من جداء داخلي إذ أنه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع فمثلاً لو أخذنا

$$x(t) = 2 + t \quad , \quad y(t) = -t$$

فنجد :

$$T_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|2\|^2 + \|2+2t\|^2 = 4 + (2+2b)^2$$
$$4 + 4 + 8b + 4b^2 = 4b^2 + 8b + 8$$

$$T_2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2[(2+b)^2 + (-a)^2] = 2(4 + 4b + b^2 + a^2)$$
$$= 8 + 8b + 2b^2 + 2a^2$$

لو كان $T_1 = T_2$ فإنه $4b^2 + 8b + 8 = 2b^2 + 8b + 8 + 2a^2$ أي $b^2 = a^2$ و هذا غير ممكن لأن $a \neq b$

إذاً مساواة متوازي الاضلاع غير محققة و بالتالي هذا النظيم غير مولد من جداء داخلي .

السؤال الثاني :

١- نشر حسب قوى x,y (أي بجوار $(0,0)$) الدالة: $f(x,y) = \ln(1-x-y+xy)$

الحل:

$$f(x,y) = \ln(1-x-y+xy) = \ln\big((1-x)(1-y)\big) = \ln(1-x) + \ln(1-y)$$

مجموعة تعريف ما ضمن اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر أي $(1-x)(1-y) > 0$ فإما :

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \text{و} \Leftarrow \begin{cases} 1 > x \\ 1 > y \end{cases} \Leftarrow 2 > y^2 + x^2$$

أي داخل دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

أو :

$$\begin{cases} 1-x < 0 \\ 1-y < 0 \end{cases} \text{و} \Leftarrow \begin{cases} 1 < x \\ 1 < y \end{cases} \Leftarrow 2 < y^2 + x^2$$

و لكن في هذه الحالة النقطة $(0,0)$ لا تنتمي ، لذا سنأخذ المجموعة الأولى :

$$f(x,y) = \ln(1-x) + \ln(1-y) \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{1-x} \Rightarrow f_x(0,0) = -1$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$$

$$f_{xxx}(x,y) = -\frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = -2 = -2!$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = -\frac{2(3)}{(1-x)^4} \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = -2.3 = -3!$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0,0) = -(n-1)!$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) = -\frac{(n-1)!}{(1-y)^n} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(0,0) = -(n-1)!$$

وجميع المشتقات الجزئية المختلطة تساوي الصفر لأنه عند الاشتقاق بالنسبة لـ x لن يبقى مقادير تحوي y فالاشتقاق لـ y عندئذٍ معدوم ، و كذلك لـ x

$$f(x,y) - f(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0).$$

$$= -(x+y) - \frac{1}{2!}(x^2+y^2) - \frac{2!}{3!}(x^3+y^3) - \dots - \frac{(n-1)!}{n!}(x^n+y^n) + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1-x-y+xy) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{x^n+y^n}{n}\right)}$$

٢- لتكن الدالة الحقيقية المعرفة على R^2 بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ادرس استمرار و قابلية الاشتقاق للدالة f في النقطة (0,0) (حسب تعريف الاستمرار و قابلية الاشتقاق)

الحل:

حتى تكون الدالة مستمرة عند النقطة (0,0) يجب تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

و لكن نلاحظ أنه من أجل $\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ فنجد أن $\left\|\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) - (0,0)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ و يوجد $\varepsilon = \frac{1}{2}$

بحيث : $\left|f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) - f(0,0)\right| = \left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right| = 1 \nless \varepsilon = \frac{1}{2}$ و بالتالي هي غير مستمرة عند المبدأ و بالتالي لن تكون اشتقاقية عند المبدأ.

٣- لتكن الدالة الحقيقية المعرفة على R^2 بالشكل :

$$f(x,y) = (x-y^2)(x-2y^2)$$

برهن أن (0,0) نقطة حرجة لـ f ثم برهن أن (0,0) هي نقطة صغرى نسبياً لمقصور f على أي مستقيم مار من هذه النقطة

الحل:

لدينا :

$$f_x(x,y) = (x - 2y^2) + (x - y^2)$$
$$f_x(0,0) = 0$$
$$f_y(x,y) = -2y(x - y^2) + 4y(x - 2y^2)$$
$$f_y(0,0) = 0$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f.

الآن لنفرض أن $y = \alpha x$ (مستقيماً ماراً من المبدأ)

$$f(x,\alpha x) = (x - \alpha^2 x^2)(x - 2\alpha^2 x^2)$$
$$= x^2 - 2\alpha^2 x^3 - \alpha^2 x^3 + 2\alpha^4 x^4 = 2\alpha^4 x^4 - 3\alpha^2 x^3 + x^2$$
$$f_x(x,\alpha x) = 8\alpha^4 x^3 - 9\alpha^2 x^2 + 2x$$
$$f_{xx}(x,\alpha x) = 24\alpha^4 x^2 - 18\alpha^2 x + 2$$
$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

ومنه $(0,0)$ هي صغرى نسبية بالنسبة لمقصور f على أي مستقيم $y = \alpha x$ مار من المبدأ.

انتهى حل الأسئلة ☺

إعداد : منى شغل – ماريا بري –نذير تيناوي ✍