(1)

الفصل الرابع

- تعريف تكامل الدالة الدرجية:

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس حيث μ قياس موجب على الجبر التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $X \neq \phi$.

ولتكن ε دالة درجية معرفة على الفضاء المقيوس $(X, \mathcal{A})$ أي

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

حيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ مختلفة لكل $i = 1, \dots, n$

و $\{E_i\}_{i=1}^{i=n} \subseteq \mathcal{A}$ وتشكل تجزئة لـ X، عندئذ نعرف تكامل الدالة الدرجية ε على X بالنسبة للقياس μ بالمساواة

$$\int_X \varepsilon \, d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \, \mu(E_i)$$

وإذا كانت F مجموعة مقيوسة ما أي $F \in \mathcal{A}$

فإننا نعرف تكامل الدالة الدرجية ε على F بالنسبة لـ μ بالمساواة

$$\int_X \varepsilon \, d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \, \mu(E_i \cap F)$$

2_ تكامل لوبيغ لـ f على X بالنسبة لـ μ :

إذا كان التطبيق $f \geq 0$ فإننا نعرف تكامل f على X بـ :

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varepsilon \, d\mu \ : \ \varepsilon \text{ دالة درجية } ,\ 0 \leq \varepsilon < f \right\}$$

3_ تكامل التطبيقات القيوسة :

أ_ تعريف تكامل دالة قيوسة كيفية (ليست بالضرورة موجبة) :

من أجل أي تطبيق f نضع $f^+ = \max\{f, 0\}$ ، $f^- = -\min\{f, 0\}$

أي انه من أجل كل x من X يكون :

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad , \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$
$$= \max\{-f(x), 0\}$$

أو بصياغة أخرى :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{if} \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{if} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

نلاحظ من التعريف أن كلا من :

$f^-(x)$ ، $f^+(x)$ غير سالب وأن :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{and} \quad |f| = f^+ + f^-$$

يسمى الـ f^+ القسم الموجب لـ f و f^- القسم السالب لـ f

ومن ثم إذا كان f قيوساً فإن f^+ ، f^- قيوسان
والعكس صحيح أيضاً كذلك فإن $|f|$ قيوس .

ـ إذا كان $\int_X f^+ d\mu < \infty$ أو $\int_X f^- d\mu < \infty$ فإننا نعرف :

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

ب ـ من الممكن كتابة $\int_X f d\mu$ على النحو :

$$\int f\, d\mu \quad \vee \quad \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad \vee \quad \int_X f(t)\, d\mu(t)$$

جـ) تعريف : إذا كان $\int_X |f|\, d\mu < \infty$ فإننا نقول أن f كمول

ونستنتج $\{f$ كمول$\}$ ، $\mathcal{L}^p = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \,،\, \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$

نأخذ $p = 1$

د) مبرهنة أساسية :

1) إذا كان $0 \le f \le g$ وكان f ، g قيوسين فإن :

$$\int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$$

2) إذا كان $f \le g$ وكان $\int_X g\, d\mu$ و $\int_X f\, d\mu$ معرفين فإن :

$$\int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$$

3) f كمول $\Longleftrightarrow$ f^+ ، f^- كمولين

4) من أجل أي تطبيق قيوس f فإن:
$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$$

- بعض خواص تكامل دالة درجية: ليكن f ، g دالتين درجيتين:

1) $\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu \Leftarrow 0 \leq g \leq f$

2) $\int f+g\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu \Leftarrow 0 \leq g, f$

- التجزئة القيوسة: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس نقول عن E_1, E_2, E_3 إنها تجزئة قيوسة لـ X إذا كانت:
((E_1, E_2, E_3 تجزئة لـ X وكانت $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{A}$))

- تعريف الدالة القيوسة المكمولة: (القابلة للمكاملة): ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس حيث μ قياس موجب على الجبر التام $\mathcal{A}$ من أجزاء $X \neq \emptyset$
ولتكن: $f: X \to \mathbb{R}$ دالة قيوسة كيفية
عندئذ:
نقول عن f إنها مكمولة إذا كان: $\int_X |f|\,d\mu < \infty$

((أهم ثلاث مبرهنات))

1- مبرهنة لوبيغ الأولى (مبرهنة التقارب المتزايد)

2- توطئة فاتو.

3- مبرهنة التقارب المرجوح.

1- مبرهنة لوبيغ الأولى (مبرهنة التقارب المتزايد)

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس حيث μ قياس موجب على $\mathcal{A}$ من أجزاء X

ولتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة ولنفرض أن:

أ) تلك المتتالية متزايدة: $\forall x: 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$

ب) وتلك المتتالية متقاربة نقطياً من f أي: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

عندئذٍ:

أ) f تطبيق قيوس

ب) $\int_X \lim f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

---

2) توطئة فاتو (Fatous lemma):

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس حيث μ قياس موجب على الجبر التام $\mathcal{A}$ من أجزاء $X \neq \emptyset$، ولتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة الموجبة

عندئذٍ: $\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \left(\int_X f_n\right) d\mu$

أي: تكامل النهاية الدنيا للمتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ لا تتجاوز النهاية الدنيا للمتتالية $\{\int_X f_n \, d\mu\}_{n\geq 1}$ (متتالية التكاملات)

اثبات توطئة فاتو: لنشكل المتتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ من الدوال القيوسة الموجبة بالشكل التالي:

$$g_1 = \inf\{f_1, f_2, \ldots\} \leq f_1$$

$$g_2 = \inf\{f_2, f_3, \ldots\} \leq f_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$g_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \ldots\} \leq f_k$$

إن المتتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة نحو متقاربة من حدها الأعلى (نهايتها) سنرمز لها بـ f أي:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$$

نلاحظ أن:

أصبح لدينا متتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة من الدوال القيوسة الموجبة متقاربة من f ومنه:

حسب لوبيغ الأولى فإن: $\int g_n \longrightarrow \int f$ أي:

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int f = \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$$

لدينا:

$\forall n\geq 1 : g_n \leq f_n$ بمكاملة الطرفين $\forall n \geq 1 : \int g_n \leq \int f_n$

بالمرور إلى النهاية الدنيا على الطرفين:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \quad \star$$

بما أن المتتالية $\{\int g_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة فإن:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

وبالعودة إلى $\star$:

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int g_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n$$

أي : $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int g_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n$ (2)

من [1] و [2] نجد : $\int f = \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n$

بعض خواص التابع الدرجي :

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$ ولتكن ψ ، ε دالتين درجيتين على الفضاء القيوس ونفترض أن ψ ، ε ممثلين على نحو نموذجي لكل منها

أي $\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \chi_{E_i}$

حيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ مختلفة لكل $i = 1, \dots, n$ و $\{E_i\}_{i=1}^{i=n} \subseteq \mathcal{A}$ وتشكل تجزئة لـ X

$$\psi = \sum_{J=1}^{J=m} B_J \chi_{F_J}$$

حيث $B_J \in \mathbb{R}$ مختلفة لكل $J = 1, \dots, m$ و $\{F_J\}_{J=1}^{J=m}$ وتشكل تجزئة لـ X

عندئذ :

$$\varepsilon + \psi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{J=1}^{J=m} (\alpha_i + B_J) \chi_{E_i \cap F_J}$$ "دالة درجية"

$$\varepsilon - \psi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{J=1}^{J=m} (\alpha_i - B_J) \chi_{E_i \cap F_J}$$ "دالة درجية"

$$\varepsilon \cdot \psi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{J=1}^{J=m} (\alpha_i \cdot B_J) \chi_{E_i \cap F_J}$$ "دالة درجية"

حيث $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$

$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$ if $E \cap F = \emptyset$

3- مبرهنة التقارب المرجوح : لتكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس

أ- ولتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال المقيسة

ب- وبفرض أن تلك المتتالية متقاربة نقطياً من f " $f_n \to f$ "

جـ- وبفرض انه توجد دالة g مكاملة ($\int_X |g| d\mu < \infty$) بحيث $|f_n| \leq g$

عندئذ :

1) f مكاملة & $|f| \leq g$

2) $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) $\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f d\mu$

الاثبات :

1) لدينا فرضاً : لكل n ، $|f_n| \leq g$

بأخذ نهاية طرفي المتراجحة السابقة :

$\lim_{n\to+\infty} |f_n| \leq g \Longrightarrow |\lim_{n\to\infty} f_n| \leq g$ *

من الفرض "ب" : $\lim_{n\to\infty} f_n \to f$ وبالعودة إلى (*) نجد $|f| \leq g$

لنثبت أن f مكاملة ، بما أن g مكاملة فهي بالأصل قيوسة ومن ثم $|g|$ قيوسة " لأن القيمة المطلقة لدالة قيوسة هي دالة قيوسة والاكثر من ذلك موجبة "

بما أن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ (الدوال القيوسة) متقاربة نقطياً من f (أي نهايتها f) فإن f دالة قيوسة ومن ثم $|f|$ تكون قيوسة موجبة.

أصبح لدينا $|f|$ قيوسة موجبة and $|g|$ قيوسة موجبة

$$\xRightarrow[\text{حسب خاصة الرتابة لتكامل الدوال القيوسة الموجبة}]{} \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X |g|\, d\mu \quad (\star)$$

لدينا فرضاً g كمولة (أي $\int_X |g|\, d\mu < \infty$) وبالعودة إلى $\star$ نجد

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty \implies f \text{ كمولة}$$

2- نريد أن نثبت أن $\lim \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$

تذكرة تفيد الاثبات: بعض خواص النهايات العليا والدنيا

1) $\overline{\lim}\,(a_n) = -\underline{\lim}\,(-a_n)$

2) $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,(a_n)$

3) $\underline{\lim}\,(a_n + b) = (\underline{\lim}\, a_n) + b$

لدينا: $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g$

$(|f| \leq g \;\&\; |f_n| \leq g)$

$$\Rightarrow 0 \leq 2g - |f_n - f| = h_n \quad (\star)$$

$(n\geq 1)$ f_n قيوسة بالتالي f و قيوسة $f_n - f$ قيوسة لكل $n\geq 1$
ومن ثم $|f_n - f|$ قيوسة لكل $n\geq 1$ ، وايضاً لدينا g قيوسة
بالتالي $2g$ قيوسة وعليه نجد

$h_n = 2g - |f_n - f|$ قيوسة لكل $n\geq 1$
والاكثر من ذلك موجبة
استناداً لـ *

أصبح لدينا $\{h_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة الموجبة استناداً لـ فاتو:

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} h_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_X h_n \, d\mu \quad (1)$$

"لنفك لوغ نربط":

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} [2g - |f_n - f|] = 2g - \lim_{n\to\infty} |f_n - f|$$

$$= 2g - |\lim_{n\to\infty} (f_n - f)| = 2g - |\lim_{n\to+\infty} f_n - f| \underbrace{=}_{\lim_{n\to\infty} f_n = f} 2g - |f - f|$$

$$= 2g - 0 = 2g$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} h_n = 2g$$

اذاً ان المتتالية $\{h_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من $2g$ وعليه:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2g$$

لنفك الطرف اليميني:

$$\int_X h_n \, d\mu = \int_X [2g - |f_n - f|] \, d\mu = 2\int_X g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

بالعودة إلى (1)

$$\int_X 2g\,d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[2\int_X g\,d\mu - \int_X |f_n - f|\,d\mu\right]$$

$$\Rightarrow 2\int_X g\,d\mu \le 2\int_X g\,d\mu + \underline{\lim}\left[-\int_X |f_n - f|\,d\mu\right]$$

$$\underset{\text{من الخاصة 2}}{\le} 2\int_X g\,d\mu - \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow 2\int_X g\,d\mu \le 2\int_X g\,d\mu - \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu$$

إن g كمولة فيمكن اختصار $2\int_X g\,d\mu$ من الطرفين:

$$\Rightarrow 0 \le -\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,d\mu \le 0$$

لكن:

$$0 \le |f_n - f| \Rightarrow 0 \le \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu \le 0$$

وعليه:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,d\mu = \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

ومن خواص النهاية العليا و الدنيا تكون :
$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$

3) نريد إثبات أن :
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

بما أن f , f_n دوال قيوسة لكل $n\geq 1$ فإن $(f_n - f)$ دالة قيوسة لكل $n\geq 1$ وعليه نجد

$$0 \leq \left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

لكل $n\geq 1$ طبيعي وعليه بأخذ النهاية عندما تسعى n إلى اللانهاية نحصل على:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu$$

لكن لدينا من الطلب السابق (2) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

وعليه نجد أن :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| = 0$$

$$\Rightarrow \left|\lim_{n\to\infty}\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X (f_n - f)\, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

تمارين الفصل الرابع

(1) إذا كانت ε دالة درجية في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و F, G مجموعتين قيوستين منفصلتين فإن:

$$\int_{F\cup G} \varepsilon \, d\mu = \int_F \varepsilon \, d\mu + \int_G \varepsilon \, d\mu$$

الحل: بما أن ε دالة درجية فإن:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

وحيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ مختلفة لكل $i = 1, .., n$

و $\{E_i\}_{i=1}^{i=n} \subseteq \mathcal{A}$ وتشكل تجزئة لـ X ،

بما أن $F, G \in \mathcal{A}$ فإن $F\cup G \in \mathcal{A}$ قيوسة وعليه حسب تعريف تكامل دالة درجية على مجموعة قيوسة نجد أن:

$$\int_{F\cup G} \varepsilon \, d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mu(E_i \cap (F \cup G))$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mu((E_i \cap F) \cup (E_i \cap G)) \qquad (1)$$

لدينا:

$$(E_i \cap F) \cap (E_i \cap G) = \underbrace{(E_i \cap E_i)}_{E_i} \cap \underbrace{(F \cap G)}_{\emptyset} = E_i \cap \emptyset = \emptyset$$

بما أن μ قياس موجب على $\mathcal{A}$ فيكون

$$\mu((E_i \cap F) \cup (E_i \cap G)) = \mu(E_i \cap F) + \mu(E_i \cap G)$$

بالعودة إلى (1):

$$\int_{F\cup G} \varepsilon \, d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i (\mu(E_i \cap F) + \mu(E_i \cap G)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap F) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap G)$$

$$\Rightarrow \int_{F\cup G} \varepsilon \, d\mu = \int_F \varepsilon \, d\mu + \int_G \varepsilon \, d\mu$$

من تعريف التكامل

نتيجة: إذا كانت $E_1, \dots, E_n$ تجزئة لـ X فإن:

$$\int_X \varepsilon\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \varepsilon\, d\mu$$

ملاحظة: إذا كانت:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_j} \quad , \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$$

حيث $E_1, \dots, E_n$ تجزئة لـ X من المجموعات القيوسة

و $F_1, \dots, F_n$ " " " "

فإنه إذا كانت $E \in \mathcal{A}$ سيكون:

$$\int_E \varepsilon\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j \cap E) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_k \cap E)$$

(2) إذا كانت ψ , ε دالتين درجيتين في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ حيث $\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_i}$ و $\psi = \sum_{j=1}^{m} B_j \chi_{F_j}$ مكتوبتان بالشكل القانوني فإن:

$$\int_X (\varepsilon + \psi)\, d\mu = \int_X \varepsilon\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$$

الحل: إذا كان $\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ و $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$

$$\varepsilon + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}$$

$$\int_X (\varepsilon + \psi)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \right) + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k) \right)$$

أي أن $\int_X (\varepsilon+\psi)\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$

$= \int_X \varepsilon\,d\mu + \int_X \psi\,d\mu$

3) إذا كان g ، f قيوسين موجبين ($f \geq 0$ ، $g \geq 0$)
في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فإن :

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

الحل: حسب المبرهنة التي تقول: كل دالة قيوسة هي نهاية لمتتالية متزايدة من التوابع الدرجية الموجبة

أي لدينا $f \geq 0$ قيوس موجب $\Longrightarrow$ يوجد متتالية متزايدة $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ من التوابع الدرجية حيث: تتقارب ε_n إلى f

لدينا $g \geq 0$ قيوسة موجبة $\Longrightarrow$ توجد متتالية متزايدة $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ من التوابع الدرجية الموجبة حيث ψ_n تتقارب إلى g

إذاً :

ستكون المتتالية $\{\varepsilon_n+\psi_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة ومتقاربة من $f+g$

باستخدام مبرهنة : لوبيغ الأولى :

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varepsilon_n+\psi_n)\,d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varepsilon_n\,d\mu + \int_X \psi_n\,d\mu \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varepsilon_n\,d\mu \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \psi\,d\mu \right)$$

$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

4) مبرهنة : (Beppo_Lévi) : إذا كانت (f_n) متتالية من التطبيقات القيوسة بحيث $f_n \geq 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن :

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$

الحل : نضع : $h_m = \sum_{n=1}^{m} f_n = f_1 + \dots + f_m$

كانت المتتالية $\{h_m\}_{m \geq 1}$ متتالية متزايدة من التوابع القيوسة الموجبة ونهايتها $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = h$

(عندما m تسعى إلى ∞) لنطبق مبرهنة لوبيغ الأولى

$$\int_X h \, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_X h_m \, d\mu = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \right)$$

ملاحظة هامة جداً :

إذا اتى في الامتحان التدريب رقم(3) فإننا نكتب مبرهنة Beppo_Lévi

---

5) إذا كان $f = g - h$ حيث g, h موجبان وقابلان للمكاملة فإن f قابل للمكاملة وإن :

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X h \, d\mu$$

الحل : بما أن كل من h و g قابلان للمكاملة وموجبان فإن :

$$\int_X |g| \, d\mu = \int_X g \, d\mu < +\infty \quad \text{و} \quad \int_X |h| \, d\mu = \int_X h \, d\mu < +\infty$$

نلاحظ أن: $f(x) = g(x) - h(x)$ $\forall x \in X$ كما أن،

$$|f(x)| = |g(x) - h(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|$$
$$= g(x) + h(x).$$

$$\Longrightarrow |f(x)| \leq g(x) + h(x)$$

ومنه؛

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X (g+h) \, d\mu = \int_X g \, d\mu + \int_X h \, d\mu < +\infty$$

إذن التطبيق f كمول.

لنثبت أن $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X h \, d\mu$

لدينا $f = g - h$ التابع f ذو إشارة كيفية ولا يمكن الجزم في إنه موجب.

إذا كان $g(x) \geq h(x)$ فإن $f(x) \geq 0$

إذا كان: $g(x) \leq h(x)$ فإن $f(x) \leq 0$

ومنه:

$$f^+ - f^- = f = g - h$$

أي f يكتب على شكل فرق دالتين موجبتين ومنه؛

$$f^+ + h = g + f^-$$

ومنه؛

$$\int_X f^+ + \int_X h = \int_X (f^+ + h) = \int_X (g + f^-) = \int_X g + \int_X f^-$$

$$\int_X f^+ + \int_X h = \int_X g + \int_X f^-$$

Zeina Brown

ومنه :
$$\int_X (f^+ - f^-) = \int_X f^+ - \int_X f^-$$
$$= \int_X g - \int_X h$$

أي :
$$\int_X f = \int_X g - \int_X h$$

6) إذا كان f و g محولين فإن
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

الحل: f, g ذو إشارة كيفية ومنه :
$$f = f^+ - f^- \quad \& \quad g = g^+ - g^-$$

لنضع :
$h = f + g$ أيضاً ذو إشارة كيفية ومنه
$$h = h^+ - h^-$$

نلاحظ :
$$h = h^+ - h^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ومنه
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

بأخذ التكامل للطرفين :
$$\int_X h^+ + \int_X f^- + \int_X g^- = \int_X f^+ + \int_X g^+ + \int_X h^-$$

أي :
$$\int_X h^+ - \int_X h^- = \int_X f^+ - \int_X f^- + \int_X g^+ - \int_X g^-$$

ومنه :
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X h\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$