الفصل الخامس

أو الصف المطرد الأصغري

مبرهنة الصفوف المطردة الأولى : ((مبرهنة هامة جداً))

أثبت أن أصغر صف مطرد يحوي جبراً معطى هو أصغر جبر تام يولده ذلك الجبر.

__الاثبات__ : لنفرض أن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة كل المجموعات الجزئية من X

$\mathcal{A}$ جبر كيفي من اجزاء X ولنثبت أن :

$$\underbrace{\mathcal{M}(\mathcal{A})}_{\text{أصغر صف مطرد يحوي الجبر } \mathcal{A}} = \underbrace{\hat{\mathcal{A}}}_{\text{أصغر جبر تام يحوي الجبر } \mathcal{A}}$$

بما أن $\hat{\mathcal{A}}$ جبر تام يحوي الجبر $\mathcal{A}$ فهو صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$

« حسب المبرهنة التي تقول : $\mathcal{A}$ جبر تام $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ جبر + صف مطرد » (★)

وبما أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أصغر صف مطرد يحوي الجبر $\mathcal{A}$ فإن :

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \hat{\mathcal{A}} \quad \ldots (1)$$

ثم يتم المطلوب بجب برهان الاحتواء المعاكس $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{M}(A)$ وهذا يتم إذا أثبتنا أن $\mathcal{M}(A)$ جبر تام ولكن باعتبار $\mathcal{M}(A)$ صف مطرد حسب (★) فيكفي إثبات أن $\mathcal{M}(A)$ جبر ;

أي نثبت أن :

1) $\emptyset \in \mathcal{M}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(A)$

3) $\forall A, B \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}(A)$

$\underbrace{\emptyset \in \mathcal{A}}_{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر}} \xRightarrow[\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})]{} \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$:لنثبت (1)

لنثبت (2): أولاً لنعرف الصف التالي:

$\tau_c : \{ A \subseteq X : A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \}$ من اجزاء X

ولنثبت أن: τ_c صف مطرد من اجزاء X ${}^{(1')}$ ويحوي $\mathcal{A}$ ${}^{(2')}$

لنثبت $(1')$:

س 1: $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow X^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$\underset{\text{من تعريف } \tau_c}{\Longrightarrow} X \in \tau_c$

س 2: لنفرض أن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر الصف τ_c

أي: $A_n \in \tau_c \quad \& \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad ; \forall n \geq 1$

وبالتالي حسب تعريف عناصر τ_c:

$A_n^c \in \tau_c \quad \& \quad A_{n+1}^c \subseteq A_n^c \quad ; \quad \forall n \geq 1$

أي: $\{A_n^c\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متناقصة من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ وبما أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

صف مطرد فإن تقاطع تلك المتتالية هو عنصر من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أي:

$\bigcap_{n\geq 1} A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \underset{\text{حسب دومورغان}}{\Longrightarrow} \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup A_n \in \tau_c$

س 3: لنفرض أن $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متناقصة من عناصر الصف τ_c أي

$B_n \in \tau_c \quad \& \quad B_{n+1} \subseteq B_n \quad ; \forall n \geq 1$

وبالتالي حسب تعريف عناصر τ_c:

$B_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad \& \quad B_n^c \subseteq B_{n+1}^c \quad ; \forall n \geq 1$

أي $\{B_n^c\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ وبما أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ صف مطرد فإن اتحاد تلك المتتالية هو عنصر من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أي:

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \tau_c$$

ومنه τ_c صف مطرد من اجزاء X

لنثبت (2):

$$\forall \boxed{A \in \mathcal{A}} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A} \underset{\mathcal{A}\subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{M}(A) \underset{\text{من تعريف } \tau_c}{\Longrightarrow} \boxed{A \in \tau_c}$$

ومنه: $\mathcal{A} \subseteq \tau_c$

أصبح لدينا $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A) \subseteq \tau_c \Longleftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \tau_c$ & τ_c صف مطرد

ومنه: $\forall E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \mathcal{A}\subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \tau_c} E_0 \in \tau_c \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من تعريف } \tau_c} E_0^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

وهو المطلوب

لنثبت (3): لنفرض أن G_0 مجموعة جزئية مثبتة ولنعرف الصف:

$\tau_{G_0} = \{A \subseteq X \ ; \ A \cup G_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ من اجزاء X

لنثبت انه صف مطرد من اجزاء X

ش 1: $X \in \mathcal{A} \underbrace{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}\subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})} X \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \underbrace{\Longrightarrow}_{X \cup G_0 = X} X \cup G_0 \in \mathcal{M}(A)$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من تعريف } \tau_{G_0}} X \in \tau_{G_0}$$

مما سبق نستنتج أن τ_{G_0} غير خالي.

س2: لنفرض أن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر τ_{G_0} أي

$$A_n \in \tau_{G_0} \;\&\; A_n \subseteq A_{n+1} \;:\; \forall n\geq 1$$

وبالتالي حسب تعريف عناصر الصف τ_{G_0} :

$$A_n \cup G_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad \& \quad A_n \cup G_0 \subseteq A_{n+1} \cup G_0 \quad ; \forall n\geq 1$$

أي $\{A_n \cup G_0\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ وبما أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ صف مطرد فإن اتحاد تلك المتتالية هو عنصر من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أي :

$$\bigcup_{n\geq 1} (A_n \cup G_0) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \cup G_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \tau_{G_0}$$

س3 : بأسلوب مشابه لما سبق

ومنه نستنتج τ_{G_0} صف مطرد من اجزاء X .

من أجل أي مجموعة جزئية G_0 مثبتة من X وجدنا أن الصف τ_{G_0} صف مطرد من اجزاء X $\Longleftarrow$ من اجل أي مجموعة مثبتة A_0 حيث $A_0 \in \mathcal{A}$ يكون

$$\tau_{A_0} = \{A \subseteq X \;:\; A \cup A_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

صفاً مطرداً و لأكثر من ذلك يحوي $\mathcal{A}$ لأن :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A}} \underset{\substack{\text{كون } \mathcal{A} \ni A_0 \\ \text{و } \mathcal{A} \text{ جبر}}}{\Longrightarrow} A \cup A_0 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup A_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \boxed{A \in \tau_{A_0}}$$

أي $\mathcal{A} \subseteq \tau_{A_0}$

أصبح لدينا : τ_{A_0} صف مطرد $\& \; \mathcal{A} \subseteq \tau_{A_0} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \tau_{A_0}$

مما سبق نستنتج أنه إذا كانت :

$$(\heartsuit)\;\; \forall E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \;;\; E_0 \in \tau_{A_0} \;;\; E_0 \cup A_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

الآن: لنفرض أن F_0 ، E_0 عنصرين كيفيين من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ولنثبت أن: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni E_0 \cup F_0$.

- من أجل أي مجموعة جزئية G_0 مثبتة من X وجدنا أن الصف τ_{G_0} هو صف مطرد من اجزاء X وبالتالي:

من أجل $\boxed{E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})}$ يكون:

$$\tau_{E_0} = \{A \subseteq X \;:\; A \cup E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

صفاً مطرداً والأكثر من ذلك يحوي $\mathcal{A}$ لأن:

$$\boxed{\forall A_0 \in \mathcal{A}} \;,\; \forall E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \underset{\text{تعريف}}{\Longrightarrow} A_0 \cup E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$$\underset{\tau_{E_0}\ \text{حسب}}{\Longrightarrow} \boxed{A_0 \in \tau_{E_0}} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \subseteq \tau_{E_0}$$

أصبح لدينا:

$$\tau_{E_0} \text{ صف مطرد } \& \; \mathcal{A} \subseteq \tau_{E_0} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \tau_{E_0}$$

وبما أن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni F_0$ و $\tau_{E_0} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \tau_{E_0} \ni F_0$

وحسب تعريف عناصر τ_{E_0} يكون:

$$F_0 \cup E_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

وهو المطلوب.

مبرهنة لنفرض أن (Y, τ) ، (X, S) فضاءان قيوسان.

من أجل كل A من S ، ومن أجل كل B من τ

نسمي المجموعة الجزئية $A \times B \subseteq X \times Y$ مستطيلاً قيوساً.

إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة كل الاجتماعات المنتهية للمستطيلات القيوسة فإننا نسمي $\sigma(\mathcal{A})$ الجبر التام الجداء أو σ-جبر الجداء

ويرمز له بـ $\sigma(\mathcal{A}) = S \otimes \tau$

فضاء الجداء

Cartesian Product

والثبت أن $\mathcal{A}$ جبر.

الاثبات:

1- إن $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي لأن: الاجتماع المنتهي لعناصر من $\mathcal{A}$ هو عنصر من $\mathcal{A}$.

2- لنثبت أن $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للتتميم:

(سنبرهن أولاً أن تتمة أي مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$)

نفرض أن $A \times B$ مستطيل قيوس في $X \times Y$ ومنه

$$(A \times B)^c = (X \times Y) \setminus (A \times B) =$$

$$= ((X \setminus A) \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times B) \cup (A \times (Y \setminus B))$$

ومنه هو اجتماع ثلاث مستطيلات قيوسة ومن ثم فهو من $\mathcal{A}$.

أي أن تتمة مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$.

مقطع (قصة) مجموعة

(section of set)

بفرض أن Y و X مجموعتين غير خاليتين و $E \subseteq X \times Y$

- تعريف $_xE$ (قصة المجموعة E عند x): لنفرض أن $x \in X$ عندئذ ندعو المجموعة:

$$_xE = \{ y \in Y : (x, y) \in E \}$$

نقصة المجموعة E عند x

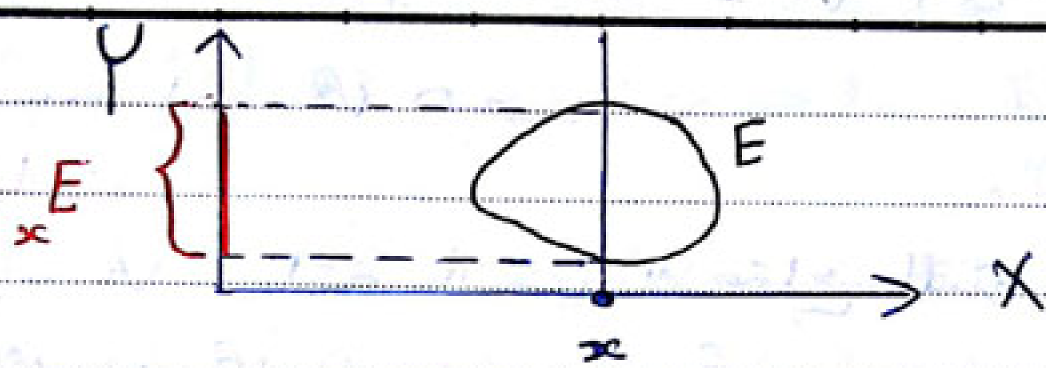
- تعريف E_y: إذا كان $y \in Y$ عندئذ ندعو المجموعة:

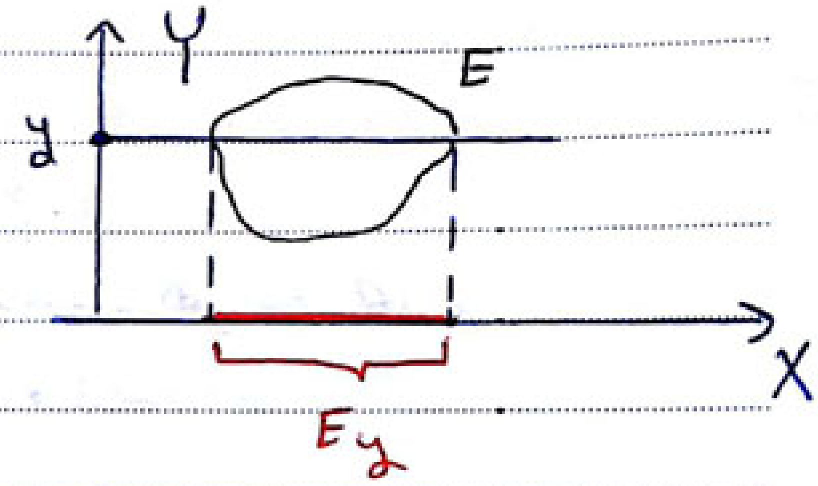
$$E_y = \{ x \in X : (x, y) \in E \}$$

بقصة المجموعة E عند y

فضاء الجداء

لنراها في الرسم :





(بعض الملاحظات)

ليكن $(X, \mathcal{A})$ و $(Y, \mathcal{T})$ فضاءين قيوسين

لنعرف الصف $\mathcal{R}$ من أجزاء $X\times Y$ بالشكل:

$$\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{T} = \{A\times B = S : A\in\mathcal{A} , B\in\mathcal{T}\}$$

إن الصف $\mathcal{R}$ نصف جبر من اجزاء $X\times Y$ ونسميها: صف المستطيلات القيوسة

أصغر جبر K يحوي نصف الجبر $\mathcal{R}$ هو: صف الاتحادات المنتهية لعناصر $\mathcal{R}$ (أي أصغر جبر يحوي نصف الجبر $\mathcal{R}$ هو:

"مجموعة ابتدائية" $$K = \{S_1\cup S_2\cup\dots\cup S_n \; ; \; S_1, S_2, \dots, S_n\in\mathcal{R} , \; n\geq 1\}$$

((عناصر K هي عبارة عن الاتحادات المنتهية لعناصر نصف الجبر $\mathcal{R}$))

إن الصف K هو جبر من اجزاء $X\times Y$

وأصغر جبر تام يحوي الجبر K هو: الجبر التام المولد بالجبر K

أي هو: $\sigma(K) = \hat{\mathcal{R}}$

فضاء الجداء

والجبر التام المولد بالجبر K هو أصغر صف مطرد يحوي الجبر K

أي: $\underbrace{\sigma(K)}_{\text{أصغر جبر تام يحوي الجبر } K} = \underbrace{\mathcal{M}(K)}_{\text{أصغر صف مطرد يحوي الجبر } K}$

$\sigma(K) = \mathcal{M}(K) = \hat{K}$

- ونسمي $\sigma(K) = \hat{K} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ كما سميناه سابقاً بالجبر التام الجداء أو اسم جبر الجداء

- الثنائية $(X \times Y , \mathcal{A} \otimes \mathcal{T})$ فضاء قيوسي يسمى بـ فضاء الجداء القيوسي للفضائين القيوسين $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{T})$

- نسمي كل عنصر E من $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ مجموعة قيوسة في فضاء الجداء القيوسي
- نسمي كل عنصر من الجبر K بـ مجموعة قيوسة ابتدائية في فضاء الجداء القيوسي
- نسمي كل عنصر من نصف الجبر R بـ مستطيلاً قيوساً في فضاء الجداء القيوسي

توطئة: ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس بحيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$ وليكن $(Y, \mathcal{B})$ فضاء قيوس آخر بحيث $\mathcal{B}$ جبر تام على $Y \neq \emptyset$ ولنفرض أن $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ عندئذ:

1- أثبت أن $E_x \in \mathcal{B}$ لكل $x \in X$

2- أثبت أن $E_y \in \mathcal{A}$ لكل y من Y

أو نقول بشكل آخر:

أثبت أن مقطع أي مجموعة قيوسة في الفضاء القيوسي $(X \times Y , \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ وفق x تكون مجموعة قيوسة في الفضاء $(Y, \mathcal{B})$
وأن مقطعها وفق y تكون مجموعة قيوسة في الفضاء $(X, \mathcal{A})$ وذلك لكل x, y من X, Y على الترتيب.

الاثبات : أولاً قبل الاثبات بفرض $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ نريد أن نثبت

أن $E_x \in \mathcal{B}$ لكل x من X

فنقوم أولاً بما يلي :

من أجل كل $x \in X$ لنعرف الصف $\mathcal{U}$ من أجزاء $X \times Y$ بالشكل :

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq X \times Y \ : \ E_x \in \mathcal{B}\}$$

لنثبت أولاً أن $\mathcal{U}$ صف مطرداً ولنثبت ثانياً أن $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$

« حيث $\mathcal{K}$: هو الجبر الذي ولّد الجبر التام الجداء $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ »

ونعلم أن عناصر الجبر $\mathcal{K}$ هي :

الاتحاد المنتهي لعناصر نصف الجبر $\mathcal{R}$ حيث $\mathcal{R}$ هي :

$$(*) \ \mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{S = A \times B \ : \ A \in \mathcal{A} \ , \ B \in \mathcal{B}\}$$

أي $\mathcal{K}$ هي :

$$\mathcal{K} = \{\bigcup_{1 \le i \le n} S_i \ : \ S_1, S_2, \dots S_n \in \mathcal{R} \ , \ n \geq 1\}$$

لنثبت أن $\mathcal{U}$ صف مطرد :

1 ـ $\mathcal{U}$ صف غير خال

2 ـ إن الصف $\mathcal{U}$ مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود المتزايد لأن :

لنفرض $\{E_n\}_{n \geq 1}$ متتالية مجموعاتية كيفية ومتزايدة من عناصر $\mathcal{U}$ ولنثبت أن :

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \overset{?}{\in} \mathcal{U}$$

بما أن $\{E_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{U}$ حسب تعريف $\mathcal{U}$:

$$\{E_{n_x}\}_{n \geq 1} \in \mathcal{B}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\bigcup_{n \geq 1} E_{n_x} \in \mathcal{B}}_{\text{كون } \mathcal{B} \text{ جبر تام}} \Longrightarrow \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right)_x \in \mathcal{B} \Longrightarrow E_x \in \mathcal{B}$$

أصبح لدينا
$$\left.\begin{array}{l} E = \bigcup E_n \subseteq X \times Y \\ \& \\ E_x \in \mathcal{B} \end{array}\right\} \underset{\text{من تعريف } \mathcal{U}}{\Longrightarrow} E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{U}$$

د- بأسلوب مشابه لما سبق نجد أن الصف $\mathcal{U}$ مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود المتناقص.

ومنه نستنتج أن $\mathcal{U}$ صف مطرد من اجزاء $X \times Y$

لنثبت ثانياً أن الصف المطرد $\mathcal{U}$ يحوي الجبر $\mathcal{K}$

من أجل ذلك نثبت أولاً أن الصف $\mathcal{U}$ يحوي نصف الجبر $\mathcal{R}$

أي لنثبت أن كل مستطيل متوسس هو عنصر من الصف المطرد

لنفرض أن $S = A \times B$ عنصر من $\mathcal{R}$ ولنثبت أن S عنصر من $\mathcal{U}$

أي نثبت أن $_x(A \times B) \in \mathcal{B}$ حتى يكون $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$

بما أن $\mathcal{R} \ni S = A \times B$ استناداً لتعريف عناصر $\mathcal{R}$ يكون $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

لنثبت أن $_x(A \times B) \in \mathcal{B}$ نميز هنا الامر عند حالتين ;

إذا كانت $x \in A$ فإن

$$_x(A \times B) = \{y \in Y : (x, y) \in A \times B\} = \{y \in Y : x \in A , y \in B\}$$
$$= \{y \in Y : x \in A\} \cap \{y \in Y : y \in B\} \underset{x \in A}{=} Y \cap (Y \cap B)$$
$$= B \in \mathcal{B}$$

$$\longrightarrow {_x(A \times B)} \in \mathcal{B}$$

إذا كانت $x \notin A$ فإن:

$$(A \times B) = \{y \in Y : (x, y) \in A \times B\} = \{y \in Y : x \in A , y \in B\}$$
$$= \{y \in Y : x \in A\} \cap \{y \in Y : y \in B\} \underset{x \notin A}{=} \emptyset \cap (Y \cap B) = \emptyset \in B$$

$$\longrightarrow {_x(A \times B)} \in \mathcal{B}$$

أي من كلا الحالتين نجد أن $_x(A \times B) \in \mathcal{B}$

فضاء الجداء

$$\left.\begin{array}{l} A\times B \subseteq X\times Y \\ (A\times B) \in \mathcal{B} \end{array}\right\}$$ أصبح لدينا $\underset{\text{من تعريف } \mathcal{U}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{A\times B = S \in \mathcal{U}}$ ♥♥

ومنه من ♥ و ♥♥ نجد:

$$R \subseteq \mathcal{U}$$

ننتقل للمرحلة الثانية: (أ)

لنفرض أن $\boxed{m \text{ عنصر كيفي من الجبر } \mathcal{K}}$ عندئذ:

$$m = \bigcup_{1\le i\le n} S_i \quad ; \quad S_1, S_2, \dots, S_n \in R \quad , \quad n \geqslant 1$$

$$\underset{R\subseteq \mathcal{U}}{\Longrightarrow} S_1, S_2, \dots S_n \in \mathcal{U}$$

ومن ثم حسب تعريف عناصر $\mathcal{U}$ يكون:

$$S_1, S_2, \dots S_n \in \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup_{1\le i\le n} S_i \in \mathcal{B} \Longrightarrow \left(\bigcup_{1\le i\le n} S_i\right) \in \mathcal{B}$$

$$\Longrightarrow m \in \mathcal{B}$$

$$\left.\begin{array}{c} m \subseteq X\times Y \\ \& \\ m \subseteq \mathcal{B} \end{array}\right\}$$ أصبح لدينا $\Longrightarrow \boxed{m \in \mathcal{U}}$ (ب)

من أ و ب نجد $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{U} \text{ صف مطرد من اجزاء } X\times Y \\ \& \\ \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U} \end{array}\right\}$$ أصبح لدينا $\underset{\text{كون } \mathcal{M}(\mathcal{K}) \text{ اصغر صف مطرد يحوي الجبر } \mathcal{K}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{U}$

$$\underset{\mathcal{M}(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K})}{\Longrightarrow} \sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{U} \underset{\sigma(\mathcal{K}) = A\otimes B}{\Longrightarrow} A\otimes B \subseteq \mathcal{U}$$

من الاحتواء السابق نستنتج:

انه اذا كان E من $A\otimes B$ فإن E من $\mathcal{U}$ وحسب تعريف $\mathcal{U}$ نجد:

أن E من $\mathcal{B}$ # بنفس الاسلوب نثبت رقم (2)

مبرهنة: (تعريف ثاني للقياس الموجب الجداء لقياسين موجبين محدودين)

لتكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس وحيث μ قياس موجب منتهي على الجبر التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $X \neq \emptyset$ وليكن $(Y, \mathcal{B}, \upsilon)$ فضاء مقيس آخر وحيث υ قياس موجب منتهي على الجبر التام $\mathcal{B}$ من أجزاء $Y \neq \emptyset$ عندئذ:

يوجد قياس وحيد λ على على الجبر التام الجداء $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ومعرف بالشكل:

$$\lambda : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{+} = [0, +\infty]$$

$$E \longmapsto \lambda(E) = \int_X \upsilon(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\upsilon(y)$$

وهو يحقق:

$$\lambda(A \times B) = (\mu \otimes \upsilon)(A \times B) = \mu(A) . \upsilon(B)$$

$\forall A \times B \in \mathcal{R}$ ، حيث $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ صف المستطيلات المقيوسة.

تعريف: يسمى القياس λ على $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ الجداء الشعوري للقياسين μ, υ كما يسمى احياناً القياس الجداء ويرمز له ب $\mu \times \upsilon$ أو $(\mu \otimes \upsilon)$ ويحقق الخاصة:

$$(\mu \times \upsilon)(A \times B) = \mu(A) . \upsilon(B)$$

تعريف: (مقطع دالة):

لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين ولتكن:

$$f : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

ولنفرض أن $x \in X$ عندئذ

فضاء الجداء

ندعو الدالة:

$$ {}_x f : Y \to \mathbb{R} $$
$$ y \mapsto {}_x f(y) = f(x,y) $$

مقطع (عمقطع) الدالة f عند x

وإذا كان y عنصر كيفي من Y فعندئذ ندعو الدالة:

$$ f_y : X \to \mathbb{R} $$
$$ x \mapsto f_y(x) = f(x,y) $$

مقطع (عمقطع) الدالة f عند y

مبرهنة: مقطع أي دالة قيوسة هي دالة قيوسة

الإثبات: لنفرض أن (X, A) فضاء قيوس وحيث A جبر تام من اجزاء $X \neq \emptyset$ وأن (Y, B) فضاء قيوس آخر وحيث B جبر تام من اجزاء $Y \neq \emptyset$ ولنفرض:

$$ f : X \times Y \to \mathbb{R} $$

هي دالة قيوسة (بالنسبة للجبر التام $A \otimes B$ الجداء) كيفية ولنفرض أن x عنصر من X ولنثبت أن الدالة

$$ {}_x f : Y \to \mathbb{R} $$ (مقطع الدالة القيوسة f عند x)
$$ y \mapsto {}_x f(y) = f(x,y) $$

قيوسة بالنسبة للجبر التام B.

ومن اجل ذلك يكفي إثبات أن الصورة العكسية وفق ${}_x f$ لأي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau)$ هي مجموعة قيوسة:

أي يكفي إثبات أن:

$$ ({}_x f)^{-1}(O) \in B \quad ; \forall O \in \tau $$

لدينا $({}_x f)^{-1}(\theta) = \{y \in Y \,:\, {}_x f(y) \in \theta\}$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من قاعدة } {}_x f \text{ ربطا}} ({}_x f)^{-1}(\theta) = \{y \in Y \,:\, f(x,y) \in \theta\} \quad \star$$

بما أن f قيوسة فرضاً (بالنسبة للجبر التام الجداء)

فإن:

$$E = f^{-1}(\theta) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad ; \forall \theta \in \tau$$

$$\Longrightarrow E = \{(x,y) \in X \times Y \,:\, f(x,y) \in \theta\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \ ; \forall \theta \in \tau$$

إن المجموعة E قيوسة في فضاء الجداء $\Longleftarrow$ ${}_x E$ سوف تكون مجموعة قيوسة في الفضاء $(Y, \mathcal{B})$ أي

$${}_x E \in \mathcal{B} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من تعريف } {}_x E} \{y \in Y \,:\, (x,y) \in E\} \in \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من تعريف } E} \{y \in Y \,:\, f(x,y) \in \theta\} \in \mathcal{B} \ ; \ \forall \theta \in \tau$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{بالعودة إلى } \star} ({}_x f)^{-1}(\theta) \in \mathcal{B} \quad ; \forall \theta \in \tau$$

وبالمثل نجد الطلب الثاني

توطئة تونلي فوبيني: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس وبحيث μ قياس موجب على الجبر التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $X \neq \emptyset$

وليكن $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ فضاء مقيس آخر وبحيث ν قياس موجب منتهي على الجبر التام $\mathcal{B}$ من اجزاء $Y \neq \emptyset$

ولنفرض أن $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ أي E مجموعة قيوسة في فضاء الجداء

فإن التطبيقين: $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \mapsto \mu(E_y)$ $\qquad$ $x \mapsto \nu({}_x E)$

قيوسان وجوصان ومحدودان

وبأن : $\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y)$

فكرة الاثبات : نعرف الصف $\mathcal{U}$ من اجزاء $X \times Y$ بالشكل .

$$\mathcal{U} = \left\{ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \;:\; \begin{array}{l} x \xrightarrow{\varphi} \nu(E_x) \\ y \xrightarrow{\psi} \mu(E_y) \\ \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y) \end{array} \right.$$

صف كل المجموعات القيوسة أي فضاء الجداء والمحققة لشروط الض

نثبت أن $\mathcal{U}$ صف مطرد من اجزاء $X \times Y$ وأنه يحوي الجبر $\mathcal{K}$

وحيث أن $\mathcal{K}$ هو الجبر الذي ولد الجبر التام الجداء $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

ونعلم أن عناصر الجبر $\mathcal{K}$ هي عبارة عن الاتحاد المنتهي لعناصر نصف الجبر $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \{ S = A \times B \;:\; A \in \mathcal{A} ,\, B \in \mathcal{B} \}$$

أي هو :

$$\mathcal{K} = \{ \cup S_i \;:\; S_1, \dots, S_n \in \mathcal{R} ,\; n \geq 1 \}$$

يصبح لدينا
$$\left. \begin{array}{c} \mathcal{U} \text{ صف مطرد من اجزاء } X\times Y \\ \text{و} \\ \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U} \end{array} \right] \begin{array}{l} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{U} \\ \Longrightarrow \sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{U} \\ \Longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U} \quad (1) \end{array}$$

وواضح من تعريف $\mathcal{U}$ أن $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ (2)

من (1) و (2) نجد $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \mathcal{U}$

من المساواة السابقة نستنتج أنه أياً كان العنصر E من $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ فإن E من $\mathcal{U}$ واستناداً لتعريف عناصر $\mathcal{U}$ نجد أن E القيوسة الكمية تحقق الشروط الموجودة في نص التوطئة

"ممكن أن يأتي سؤال بالامتحان : اذكر كل ما تعرفه عن فضاء الجداء فنكتب باختصار كل ما سبق فقط الصفات المكتوب عليها "فضاء الجداء"

برهنة فوبيني (Fubini Theorem) :

لنفرض أن $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس وحيث μ قياس موجب منته على الحد التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $\mathcal{X} \neq \emptyset$

وأن $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ فضاء مقيس آخر وحيث ν قياس موجب منته على الحيد التام $\mathcal{B}$ من اجزاء $\mathcal{Y} \neq \emptyset$

وأن $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ الحيد التام الجداء وهو أصغر حيد تام يحوي الصف

$$\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ S = A \times B \; : A \in \mathcal{A} , B \in \mathcal{B} \}$$

ولنفرض $\lambda = \mu \otimes \nu$ القياس الموجب الجداء على الحيد التام الجداء $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

ولنفرض أن :

$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قيوسة كمية وموجبة

ونعلم أن f_x دالة قيوسة موجبة و f_y دالة قيوسة

وذلك لكل x من $\mathcal{X}$ و y من Y.

فإذا عرفنا الدالتين ψ ، φ بالشكل:

$$\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f_x(y) \, d\nu(y)$$

$$= \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$$

$$\psi : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \psi(y) = \int_X f_y \, d\mu = \int_X f_y(x) \, d\mu(x) = \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$$

فإن φ دالة قيوسة موجبة و ψ قيوسة موجبة ونحقق :

$$\int_{X \times Y} f \, d\lambda = \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

أو

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \, d\lambda(x,y) = \int_X \left[\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left[\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

فكرة الإثبات : يتم إنجاز الإثبات لمبرهنة فوبيني بـ ثلاث خطوات :

1- نثبت صحتها عندما تكون f دالة مميزة لمجموعة قيوسة في فضاء الجداء $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \lambda)$

2- نثبت صحتها عندما تكون f دالة درجية موجبة معرفة على فضاء الجداء

3- نثبت نهائيا أي نثبت صحتها من أجل الدالة $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ القيوسة الموجبة بالنسبة للجبر التام $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ الجداء

نبدأ بـ (1) : لنفرض أن $f = \chi_E$ حيث $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

ونعلم أن f في هذه الحالة هي دالة قيوسة موجبة لأنها دالة مميزة

لنفرض أن

$$f = \chi_E : X \times Y \to \{0, 1\}$$

$$(x,y) \mapsto \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in E \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin E \end{cases}$$

من أجل كل $x \in X$ فيكون لقاعدة ربط الدالة ε الموجودة في نص المبرهنة الشكل

$$\varepsilon(x) = \int_Y {}_x\chi_E \, d\upsilon$$

لكن نستنتج أن $\quad {}_x\chi_E = \chi_{{}_xE}$

ومنه : $\quad$ (1) $\varepsilon(x) = \int_Y \chi_{{}_xE} \, d\upsilon = \upsilon({}_xE) \quad ; \quad \forall x \in X$

بالمثل سوف نجد فمن أجل كل $y \in Y$

أن لقاعدة ربط الدالة ψ الموجودة في نص المبرهنة الشكل :

(2) $\quad \psi(y) = \mu(E_y) \quad ; \quad \forall y \in Y$

من (1) و (2) واستناداً لتوطئة تونللي فوبيني نجد أن :

الدالة ε متوسطة وموجبة وأن الدالة ψ متوسطة وموجبة وأن :

$$\int_X \varepsilon \, d\mu = \int_Y \psi \, d\upsilon \Leftrightarrow \int_X \varepsilon(x) \, d\mu(x) = \int_Y \psi(y) \, d\upsilon(y)$$

$$\underset{\text{بالتعويض من (1) و (2)}}{\Leftrightarrow} \int_X \upsilon({}_xE) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) \, d\upsilon(y)$$

بما أن E مجموعة متوسطة كيفية في فضاء الجداء أي $(E \in A \otimes B)$ فنجد

حسب المبرهنة في الصفحة 12 أن

$$\lambda(E) = \int_X \upsilon({}_xE) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) \, d\upsilon(y)$$

أي : $\quad \lambda(E) = \int_X \varepsilon \, d\mu = \int_Y \psi \, d\upsilon$

وواضحاً $\quad \int_{X \times Y} f \, d\lambda = \int_{X \times Y} \chi_E \, d\lambda = \lambda(E)$

وبالتالي $\quad \boxed{\int_X \varepsilon \, d\mu = \int_Y \psi \, d\upsilon = \lambda(E) = \int_{X \times Y} f \, d\lambda = \int_{X \times Y} \chi_E \, d\lambda}$

الخطوة الثانية: نفترض $f=\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j}$ دالة درجية قيوسة موجبة

حيث $c_j \in \mathbb{R}$ لكل $j=1,\dots,n$ و $\{E_i\}_{i=1}^{i=n} \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ تشكل تجزئة لـ $X\times Y$

ومن ثم نتحقق من صحة طلبات المبرهنة

الخطوة الثالثة: نفترض أن f دالة قيوسة موجبة فعندئذ توجد متتالية متزايدة $\{f_n\}_{n\geq 1}$ من الدوال الدرجية الموجبة

التي تتقارب نقطياً نحو f:

$$\forall (x,y)\in X\times Y \quad : f_n(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,y)$$

وإذا وضعنا:

$$\varepsilon_n(x)=\int_Y f_n(x,y)\,d\nu(y)$$

$$\psi_n(y)=\int_X f_n(x,y)\,d\mu(x)$$

أمكن أن نثبت باستخدام مبرهنة التقارب المطرد (لوبيغ الأولى)

$$\varepsilon_n \to \varepsilon \quad , \quad \psi_n \to \psi$$

وأن

$$\int_X \varepsilon_n\,d\mu \to \int_X \varepsilon\,d\mu \quad , \quad \int_Y \psi_n\,d\nu \to \int_Y \psi\,d\nu$$

$$\int_{X\times Y} f_n\,d\lambda \to \int_{X\times Y} f\,d\lambda$$

ولما كانت الخطوة الثانية تؤكد أن:

$$\int_X \varepsilon_n\,d\mu = \int_{X\times Y} f_n\,d\lambda$$

بأخذ النهايات نجد

$$\int_X \varepsilon\,d\mu = \int_{X\times Y} f\,d\lambda$$

وبالطريقة نفسها نجد: $\int_Y \psi\,d\nu = \int_{X\times Y} f\,d\lambda$

ملاحظة: إذا كان التطبيق $f: X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ مكمولاً عندئذٍ $\int_{X\times Y} |f| d\lambda < \infty$
فإن المساواتان ♡ محققة.

بعض خواص المقصة:

1) $(A \cap B)_x = A_x \cap B_x$

2) $(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$

لنثبت الخاصة 2:

$(A \cup B)_x = \{ y \in Y \ ; \ (x,y) \in A \cup B \}$

$A_x = \{ y \in Y : (x,y) \in A \}$

$B_x = \{ x \in X : (x,y) \in B \}$

$y \in (A \cup B)_x \iff (x,y) \in A \cup B \iff (x,y) \in A$ or $(x,y) \in B$

$\iff y \in A_x$ or $y \in B_x$

$\iff y \in A_x \cup B_x$

إذاً:

$$(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$$

3) إذا كانت لدينا متتالية متزايدة $\Leftarrow$ متتاليات المقاطع ستكون متزايدة

في المبرهنة السابقة (فوبيني)

إذا كان $\int_X \varphi \, d\mu \neq \int_Y \psi \, d\nu$ فإن f ليست محولة.

وهذا ما يسمى بعكس مبرهنة فوبيني لنورد الآن مثالاً معاكساً عن فوبيني:

المثال:

لنأخذ الفضاء التبولوجي $([0,1], \tau_{[0,1]})$ الجزئي من فضاء الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R}, \tau)$ المألوف مع العلم أن:

$$\tau_{[0,1]} = \{ [0,1] \cap O \ ; \ O \in \tau \}$$

عندئذ $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ فضاء قيوس بحيث $\mathcal{B}_{[0,1]}$ هو جبر بوريل في الفضاء التبولوجي الجزئي.

سنزود $\mathcal{B}[0,1]$ بقياس لوبيغ (الذي يقيس كل مجال بطوله)

لنعرف على فضاء الجداء $[0,1] \times [0,1]$ الدالة f القيوسة بقاعدة ربط:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ولنثبت أن: $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) \, dy \right] dx \neq \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) \, dx \right] dy$

وعندها تكون الدالة f غير محولة.

لنحسب $I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right] dx$

لدينا: $\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy = \int_0^1 \frac{x^2 + y^2 - y^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy$

$$= \int_0^1 \frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\, dy \underset{\text{نب}}{=} \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1} - \frac{0}{x^2}$$

الدالة المراد تكاملها هي مشتقة الدالة $\frac{y}{x^2+y^2}$ بالنسبة لـ y

بالعودة نجد :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \underbrace{\arctan 0}_{0}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

لنحسب $I_2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right] dy$

لدينا: $\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{-y^2-x^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx$

$$= \int_0^1 \frac{-(x^2+y^2)+x(2x)}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{y^2+1} + \frac{0}{y^2}$$
$$= \frac{-1}{y^2+1}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{-1}{y^2+1} \right) dy = -[\arctan]_0^1 = -\arctan 1 + \arctan 0$$
$$= -\frac{\pi}{4}$$

نستنتج أن $I_1 \neq I_2$ ومنه أن الدالة f المأخوذة غير مكاملة

لنرى الآن مثال على فوبيني:

لنأخذ $f(x,y) = x.y \quad : \quad x \in [0,1] \quad , \quad y \in [0,1]$

نلاحظ أن :

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x.y\, dx\, dy$$

Zeina Brown

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 x y \, dy \cdot dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ومنه $I_2 = I_1$

الفصل السادس والسابع