(1) / /

التعريفات

الصف المطرد (Monotone Class): لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة أجزاء X
وليكن $\mathcal{C}$ صفاً غير خالٍ من أجزاء X $(\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq P(X))$
عندئذ نقول عن الصف $\mathcal{C}$ انه صف مطرد من اجزاء X إذا
حقق الشرطين التاليين :

1) $\mathcal{C} \neq \emptyset$

2) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{C} : A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = A \in \mathcal{C}$

"أي أن الصف $\mathcal{C}$ مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود المتزايد"

3) $\forall B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{C} : B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} B_n = B \in \mathcal{C}$

"أي أن الصف $\mathcal{C}$ مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود المتناقص"

الحلقة (Ring): لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة اجزاء X ولتكن $\mathcal{R}$
جماعة من المجموعات الجزئية من X $(\mathcal{R} \subseteq P(X))$
عندئذ نقول عن $\mathcal{R}$ انها حلقة بوليانية من اجزاء X إذا حققت $\mathcal{R}$
مايلي من الشروط :

1) $\emptyset \in \mathcal{R}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R} \ , \ A - B \in \mathcal{R} \ , \ A \cap B \in \mathcal{R}$

(Algebra)

1- الجبر: لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة اجزاء X ولتكن $\mathcal{A}$ جماعة من المجموعات الجزئية من X ($\mathcal{A} \subseteq P(X)$) عندئذ نقول: عن $\mathcal{A}$ انها جبر بوليانى من اجزاء X إذا حققت الشروط:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, $A - B \in \mathcal{A}$

3) $X \in \mathcal{A}$ "$\mathcal{A}$ الشاملة عنصر من الجماعة"

2- الجبر التام (σ - Algebra) : لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة اجزاء X ولتكن $\mathcal{A}$ جبر من اجزاء X . عندئذ نقول عن $\mathcal{A}$ انها جبر تام من اجزاء X إذا حققت $\mathcal{A}$ "الشرط σ" الآتي:

1) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = A \in \mathcal{A}$

بالإضافة إلى:

2) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, $A - B \in \mathcal{A}$

3) $X \in \mathcal{A}$

3. الحلقة التامة (σ - Ring) : لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ مجاعة اجزاء X ولتكن τ حلقة من أجزاء X . عندئذ نقول عن τ أنها حلقة تامة ما اجزاء X ، إذا" حققت τ الشرط الآتي :

1) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \tau \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n = A \in \tau$

بالاضافة إلى الشروط التالية :

2) $\emptyset \in \tau$

3) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau \;,\; A - B \in \tau$

((كل جبر هو حلقة ، كل جبر تام هو حلقة تامة))

4. نصف الحلقة : (Semi - Ring) : لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ مجاعة اجزاء X ولتكن $\mathcal{C}$ مجاعة من المجموعات الجزئية من X $(\mathcal{C} \subseteq P(X))$ عندئذ نقول عن $\mathcal{C}$ إنها نصف حلقة من أجزاء X إذا" حققت $\mathcal{C}$ مايلي :

1) $\emptyset \in \mathcal{C}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$

3) $\forall A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists \underbrace{C_1, C_2, \dots, C_n}_{\text{منفصلة مثنى مثنى}} \in \mathcal{C}$

فإن إما :

$A - B = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = \bigcup_{1\leq i\leq n} C_i \in \mathcal{C}$

أو $A - B \in \mathcal{C}$

5- نصف الجبر (Semi_Algebra) ، لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ مجاميع
من أجزاء X ولتكن e مجموعة من المجموعات الجزئية من X
عندئذ نقول عن e إنها نصف جبر من أجزاء X إذا كانت:
((e نصف حلقة وتحوي المجموعة الشاملة أي $X \in e$))

((كل حلقة من أجزاء X هي نصف حلقة))
((وكل جبر من أجزاء X هو نصف جبر))

ثالثاً تعريفات أخرى للحلقة :

لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ مجاميع أجزاء X ، ولتكن τ مجاميع
من المجموعات الجزئية من X ، عندئذ نقول عن τ إنها حلقة
من أجزاء X إذا حققت τ مايلي :

1) أ) $\emptyset \in \tau$ ، ب) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow \begin{cases} A \Delta B \in \tau \\ A \cap B \in \tau \end{cases}$

2) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow \begin{cases} A \Delta B \in \tau \\ A \cup B \in \tau \end{cases}$

3) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow \begin{cases} A \Delta B \in \tau \\ A - B \in \tau \end{cases}$

تعريف آخر للجبر :

R جبر من أجزاء $X \neq \emptyset$ إذا :

أ) R حلقة تحقق :

$$\forall A \in R \Rightarrow X - A = A^c \in R$$

ب) $X \in R$

تعريف آخر للجبر :

لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ جماعة أجزاء X ولتكن $\mathcal{A}$ جماعة من المجموعات الجزئية من X ($\mathcal{A} \subseteq P(X)$) عندئذ :

نقول عن $\mathcal{A}$ إنها جبر من أجزاء X إذا حققت $\mathcal{A}$ ما يلي من الشروط :

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(جبر بوريل)

تعريف جبر بوريل في أي فضاء تبولوجي : ليكن (X, τ) ف.ط حيث τ تبولوجيا على $X \neq \emptyset$

ومنه إن أصغر جبر تام يحوي τ هو الجبر التام المولد بـ τ نرمز له بـ $\hat{\tau}$ أو بـ $\sigma(\tau)$ ونسميه جبر بوريل في X

من هنا الصفوف المولدة لجبر بوريل :

1- إن جماعة المجالات المفتوحة والمحدودة في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بالرمز J_1 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if $J_1 = \{]a,b[\; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; , a \leq b \}$ then $\hat{J_1} = B_{\mathbb{R}}$

2- إن جماعة المجالات المغلقة والمحدودة في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بالرمز J_2 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if : $J_2 = \{ [a,b] \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; , a \leq b \}$ then $\hat{J_2} = B_{\mathbb{R}}$

3- إن جماعة المجالات المغلقة من اليسار والمفتوحة من اليمين في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها J_3 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if $J_3 = \{ [a,b[\; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; , a \leq b \}$ then $\hat{J_3} = B_{\mathbb{R}}$

4- إن جماعة المجالات المفتوحة من اليسار والمغلقة من اليمين في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بـ J_4 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if $J_4 = \{]a,b] \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; , a \leq b \}$ then $\hat{J_4} = B_{\mathbb{R}}$

5- إن جماعة المجالات المفتوحة والممتدة من اليمين في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بـ J_5 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if $J_5 = \{]a,+\infty \; ; \; a \in \mathbb{R} \}$ then $\hat{J_5} = B_{\mathbb{R}}$

6- إن جماعة المجالات المغلقة والممتدة إلى اليمين في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بـ J_6 تولّد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

if $J_6 = \{ [a,+\infty[\; ; \; a \in \mathbb{R} \}$ then $\hat{J_6} = B_{\mathbb{R}}$

7- إن جماعة المجالات المفتوحة والممتدة إلى اليسار في $\mathbb{R}$ نرمز لها بـ $\mathcal{J}_7$ تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

if $\mathcal{J}_7 = \{\,]-\infty, b[\;;\; b \in \mathbb{R} \,\}$ then $\hat{\mathcal{J}}_7 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

8- إن جماعة المجالات المغلقة والممتدة إلى اليسار في $\mathbb{R}$ نرمز لها بـ $\mathcal{J}_8$ تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

if $\mathcal{J}_8 = \{\,]-\infty, b] \;;\; b \in \mathbb{R} \,\}$ then $\hat{\mathcal{J}}_8 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

جبر بوريل في $\mathbb{R}$: في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ المزود بالتبولوجيا المألوفة (حيث كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لمجالات مفتوحة) يكون:

1- كل مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ هو مجموعة بوريلية

2- كل المجالات مغلقة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة بوريلية

3- كل مجال نصف مغلق من النمط $[a, b[$ هو مجموعة بوريلية

4- كل مجال نصف مفتوح من النمط $]a, b]$ هو مجموعة بوريلية

5- كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية

إذا كان (X, d) فضاء متريا و $\mathcal{T}$ صف المفتوحات فيه ناقش صحة أو خطأ ما يلي

1- كل مجموعة وحيدة العنصر تكون بوريلية.

2- كل مجموعة متراصة تكون بوريلية

3- كل كرة مغلقة تكون بوريلية

4- كل كرة مفتوحة تكون بوريلية

5_ كل مجموعة تكون اتحاداً متتالية من المغلقات هي بوريلية "من النمط F_σ"

6_ كل مجموعة تكون تقاطعاً لمتتالية من المفتوحات هي بوريلية "من النمط G_δ"

الاثبات: ليكن (X, d) فضاءً مترياً وليكن (X, τ_d) الفضاء الطوبولوجي الناتج من (X, d)

ونعلم أن أصغر جبر يحوي τ_d يسمى جبر بوريل، وتسمى كل مجموعة من عناصره مجموعة بوريلية، وعليه فإن المجموعات المفتوحة بوريلية

ونعلم أنه جبر التام متمم كل مجموعة منه ينتمي إليه، أي متممات المفتوحات والتي هي المغلقات ستكون بوريلية فإن من:

1_ إن المجموعة وحيدة العنصر في $\mathbb{R}$ يمكن كتابتها على الشكل $[a, a]$ وبالتالي هي بوريلية

2_ المجموعة المتراصة تكون مغلقة ومحددة فهي بوريلية

3_ كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة فهي بوريلية

4_ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة فهي بوريلية

5 + 6_ الجبر التام مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود ومغلق بالنسبة للاتحاد المعدود ومنه كون المفتوحات و المغلقات بوريلية فاتحاد متتالية من المغلقات وتقاطع متتالية من المفتوحات سيكون بوريلية.

اذكر تعاريف لجبر بوريل في $\mathbb{R}$:

1_ أصغر جبر تام يحوي صف المجالات

2_ أصغر جبر تام يحوي صف المجالات من النمط $]a, b[$

3- أصغر جبر تام يولده صف المجالات المغلقة

4- أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$

5- أصغر جبر تام يولده صف المجالات من النمط $]a, +\infty[$.

ملاحظة: 1- ليس كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ هي بوريلية

2- أصغر حلقة تحوي صف المجالات تسمى الحلقة المولدة لصف المجالات

3- تعريف أصغر حلقة تحوي صف غير خال:

لتكن $X \neq \emptyset$ وليكن S صفاً غير خالٍ من اجزاء X عندئذ أصغر حلقة من أجزاء X وتحوي S هي جماعة τ من اجزاء X تحقق الشرطين الآتيين:

1) $S \subseteq \tau$

2) أي حلقة τ_1 من اجزاء X وتحوي S فإنها تحوي τ أي:

$$\forall \underset{\text{حلقة}}{\tau_1} \subseteq P(X) \ ; \ S \subseteq \tau_1 \Rightarrow \tau \subseteq \tau_1$$

4- إن أصغر جبر تام يحوي صفاً معطى $e \subseteq P(\Omega)$ يسمى: الجبر المولد بـ e

أو يسمى بـ: الجبر التام الذي يولده e

يرمز له بـ $\sigma(e)$ أو بـ $\hat{e}$

5- e جبر وصف مطرد $\Longleftarrow$ e جبر تام

6- ليست كل مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$ هي مجموعة مفتوحة

7 ليس صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو صف مطرد

~~8- كل صف حلقة تولد حلقة~~

أمثلة متنوعة

ص14 من الكتاب

1- إذا كانت $X \neq \emptyset$ فإن $P(X)$ جماعة أجزاء X هي :

جبر تام - جبر - حلقة تامة - حلقة .

2- إذا كانت $X \neq \emptyset$ فإن الجماعة $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ هي :

جبر تام - جبر - حلقة تامة - حلقة .

3- إذا كانت X مجموعة نتائج رمي حجر نرد مرة واحدة فقط أي :

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فإن :

$\tau_1 = P(X)$ حلقة من اجزاء X

$\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ حلقة من اجزاء X

أما :

$\tau_3 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ ليست حلقة من اجزاء X

وذلك لأن ، $\{1,2\} - \{2,3\} = \{1\}$

$\{1\} \notin \tau_3$ أي τ_3 ليست مغلقة بالنسبة لعملية الفرق

4- إذا كانت $X \neq \emptyset$ وكانت :

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : \underbrace{E^c}_{\text{محدودة أو منتهية}} \vee \underbrace{E}_{\text{محدودة أو منتهية}}\}$$

فإن $\mathcal{A}$ (جبر تام - جبر - حلقة تامة - حلقة) من اجزاء X

5- إذا كانت $X \neq \emptyset$ وكانت $E \subseteq X$ فإن :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, E, E^c, X\}$$

(جبر تام - جبر - حلقة تامة - حلقة) من اجزاء X

6- إذا كانت $X = \mathbb{R}$ وكانت،

$\mathcal{A} = \{E \subseteq X \quad : \quad E^c \text{ منتهية أو } E \text{ منتهية}\}$

$\mathcal{A}$ جبر - حلقة من اجزاء X فقط.

ص13 من الكتاب.

تدريب (2): لنأخذ $X = \mathbb{R}$ مزودة بالتبولوجيا τ المألوفة حيث أن كل مجموعة مفتوحة هي إما مجال مفتوح أو محدود او اتحاد لمجالات مفتوحة ومحدودة: المطلوب:

1- هل صف المجالات المحدودة في $\mathbb{R}$ والمفتوحة من اليمين والمغلقة من اليسار حلقة؟ جبر؟ صف مطرد؟

الحل: لنرمز بـ $\mathcal{A}_0$ لصف كل المجالات المحدودة في $\mathbb{R}$ والمفتوحة من اليمين والمغلقة من اليسار أي:

$$\mathcal{A}_0 = \{[a, b[\quad ; a \leq b \quad , a, b \in \mathbb{R}\}.$$

إن $\mathcal{A}_0$ ليس حلقة لأنه:

هذا الصف ليس مغلقاً بالنسبة لعملية الاتحاد $\bigcup [a + \frac{1}{n}, b[=]a, b[$

حيث ان اتحاد مجالين من ذلك النمط ليس بالضرورة مجالاً.

بما أن $\mathcal{A}_0$ ليس حلقة فهو ليس جبر وليس جبر تام

وليس صفاً مطرداً لأنه، لنأخذ مثلاً:

$$A_n = [0, n[\in \mathcal{A}_0 \qquad n \geq 1$$

$$[0, 1[\subseteq [0, 2[\subseteq \dots \subseteq [0, n[\subseteq \dots$$

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} [0, n[= [0, +\infty[\notin \mathcal{A}_0$$

2- هل صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ حلقة ؟ هل هو جبر ؟

الحل: لنفرض أن $\mathcal{B}$ هو صف كل المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ أي :

$$\mathcal{B} = \{ B \subseteq \mathbb{R} \quad : \text{ محدودة في } \mathbb{R} \; B \}$$

مع العلم أن :

$$\exists M > 0 \; ; |x| \leq M \quad , \forall x \in B \iff \text{ محدودة في } \mathbb{R} \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

$$\iff -M \leq x \leq M \quad , \quad \forall x \in B \iff x \in [-M, M]$$

$$, \forall x \in B \iff B \subseteq [-M, M]$$

أصبح لدينا :

$$\mathcal{B} = \{ B \subseteq \mathbb{R} \quad : \underbrace{\exists M}_{\text{حقيقي}} > 0 \quad : B \subseteq [-M, M] \}$$

إن المجموعة الخالية $\emptyset$ محتواة في أي مجال من الشكل $[-M, M]$

بالتالي $\emptyset$ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$ أي $\emptyset \in \mathcal{B}$

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \underset{\mathcal{B} \text{ حسب تعريف عناصر}}{\Longrightarrow} \exists M_1, M_2 > 0 \quad ; \quad B_1 \subseteq [-M_1, M_1] \text{ و } B_2 \subseteq [-M_2, M_2]$$

$$\Rightarrow B_1 - B_2 \subseteq B_1 \subseteq [-M_1, M_1] \Rightarrow B_1 - B_2 \subseteq [-M_1, M_1]$$

$$\underset{\mathcal{B} \text{ حسب تعريف عناصر}}{\Longrightarrow} B_1 - B \in \mathcal{B}$$

بأخذ $M = \max\{M_1, M_2\}$

$$B_1 \cup B_2 \subseteq [-M_1, M] \underset{\mathcal{B} \text{ حسب تعريف عناصر}}{\Longrightarrow} B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$$

ومنه نستنتج أن B صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ هو حلقة من اجزائها ولكنه ليس جبر لأنه لو كان جبراً لكان حوى $\mathbb{R}$ ولكن $\mathbb{R}$ ليست محدودة.

3- هل صف المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$ حلقة ؟ هل هو جبر ؟ صف مطرد ؟

ليس حلقة لأن فرق مجموعتين مغلقتين ليس بالضرورة مغلقة

وبالتالي ليس جبر

وليس صف مطرد لأن : لنأخذ مثلاً :

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right] \quad ; n \geq 1$$

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right] =]0,2[$$

وإن $]0,2[$ ليست مجموعة مغلقة لأن متممتها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$

4- هل صف كل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ حلقة ؟ جبر ؟ صف مطرد ؟

الحل : لنأخذ :

$$\bigcup_{n\geq 1}]1-n, 1[=]-\infty, 1[$$

ليكن τ هو صف كل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

$$]1-n, 1[\in \tau \quad \forall n \geq 1 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \tau \text{ تبولوجيا فهي مغلقة بالنسبة للاتحاد}} \bigcup]1-n, 1[\in \tau \Rightarrow]-\infty, 1[\in \tau$$

ولدينا $\mathbb{R} \in \tau$ لأن τ تبولوجيا على $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} -]-\infty, 1[= [1, +\infty[\notin \tau$$

وهي ليست مجموعة مفتوحة ومنه ليست مغلقة بالنسبة لعملية الفرق

ومنه τ ليس حلقة وليس جبر وليس جبر تام

ليس صف مطرد لـ $\mathcal{B}$ ؛ لتكن:

$$\tau \ni A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\quad ; n \geq 1$$

$$]-1,1[\supseteq]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\supseteq \ldots \supseteq]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\supseteq \ldots$$

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} \notin \tau$$

$= [0,0]$

5- هل صف المجموعات المنتهية في أي مجموعة غير خالية Ω حلقة؟ جبر؟ مطرد؟

الحل: لنفرض أن $\mathcal{A}$ هو صف كل المجموعات المنتهية في Ω أي:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega \ : A \text{ منتهية}\} = \{A \subseteq \Omega \ : |A| = n \ ; n \in \mathbb{N}\}$$

إن المجموعة الخالية $\emptyset$ تعريفاً هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر أي:

$$|\emptyset| = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب تعريف عناصر } \mathcal{A}} \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب تعريف عناصر } \mathcal{A}} \exists\, n, m \geq 0 : \begin{matrix} |A_1| = n \\ \& \\ |A_2| = m \end{matrix}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{A_1 - A_2 \subseteq A_1} |A_1 - A_2| \leq |A_1| \Rightarrow |A_1 - A_2| \leq n \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب تعريف عناصر } \mathcal{A}} A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$$

$|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2| \Longrightarrow |A_1 \cup A_2| \leq n + m$

$\Longrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

من كل ما سبق نستنتج أن $\mathcal{A}$ صف من المجموعات المنتهية في Ω حسب تعريف ع...

هو حلقة من اجزائها

وهو ليس جبر لأن Ω لا تنتمي إلى $\mathcal{A}$ إلا إذا كانت Ω منتهية فتكون صفاً جبر من اجزائها

ليس بالضرورة صفاً مطرداً لأنه لو أخذنا $\Omega = \mathbb{N}$ فإنه توجد متتالية :

$\mathcal{A} \ni A_n = \{1, 2, \dots, n\} \quad ; \quad n \geq 1$

$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \{1, \dots, 2, n\} = \mathbb{N}^*$

والمجموعة $\mathbb{N}^*$ ليست منتهية.

ليست بالضرورة حلقة تامة وليست جبر تام

6- إن صف كل المجموعات المنتهية في أي مجموعة غير خالية Ω ومنتهية يشكل جبر تام ومن ثم يشكل حلقة تامة من اجزاء Ω.

7- هل صف المجموعات المتراصة في $(\mathbb{R}, \tau)$ حلقة ؟ جبر ؟ جبر تام ؟ صف مطرد ؟

الحل :

لنفرض أن $\mathcal{B}$ هو صف كل المجموعات المتراصة في $(\mathbb{R}, \tau)$ المألوف أي

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq \mathbb{R} : (\mathbb{R}, \tau) \text{ متراصة في } B\}$$

(مع العلم : B مغلقة ومحدودة في $(\mathbb{R}, \tau) \Longleftrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ متراصة في $(\mathbb{R}, \tau)$)

لنأخذ $B_1 = [0,4]$, $B_2 = [1,4]$ مجموعتين تراصتين في $(\mathbb{R}, \tau)$

فإن $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ إلا أن

$$B_1 - B_2 = [0,4] - [1,4] = [0,1[\notin \mathcal{B}$$

ومنه ليس مغلق بالنسبة لعملية الفرق

فهو ليس حلقة وليس حلقة تامة وليس جبر تام وليس جبر

وليس صف مطرد لأن :

$$\mathcal{B} \ni B_n = [1,n] \quad ; n \geq 1$$

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup [1,n] = [1,+\infty[\notin \mathcal{B}$$

ليست محدودة

8- هل صف المجموعات الترابطة في $(\mathbb{R}, \tau)$ حلقة؟ جبر؟ حلقة تامة؟ جبر تام؟ صف مطرد؟

الحل: لنفرض أن $\mathcal{B}$ هو صف كل المجموعات الترابطة في $(\mathbb{R}, \tau)$ المألوف

أي :

$$\mathcal{B} = \{ B \subseteq \mathbb{R} \quad : \quad (\mathbb{R},\tau) \text{ مترابط في } B \}$$

(مع العلم أن : B مجالاً طبيعية $\Longleftrightarrow$ $B \subseteq \mathbb{R}$ مترابطة في $(\mathbb{R}, \tau)$)

إذا أخذنا :

$$B_1 = [0,2[\quad , B_2 = [4,6[$$

فإن $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ إلا أن

$$B_1 \cup B_2 = [0,2[\cup [4,6[\notin \mathcal{B}$$

إذن $[0,2[\cup [4,6[\notin B$ لأنها ليس مترابطة في $(\mathbb{R}, \tau)$ وبسبب أنها ليست مترابطة لأنها ليست مجالاً.

ومنه ليس حلقة وليس جبر ليس حلقة تامة ليس جبر تام

لكن الصف B هو صفاً مطرداً من أجزاء $\mathbb{R}$ والسبب هو:

- إذا أخذنا أي متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر الصف B فإن اتحادها سوف يكون مجالاً أي مجموعة مترابطة من $(\mathbb{R}, \tau)$ أي اتحادها عنصراً من B ومن ثم يكون الصف B مغلقاً بالنسبة للاتحاد المعدود المتزايد

- إذا أخذنا أي متتالية مجموعاتية متناقصة من عناصر الصف B فإن تقاطعها سوف يكون مجالاً أي مجموعة مترابطة من $(\mathbb{R}, \tau)$ أي تقاطعها عنصر من B ومن ثم يكون الصف B مغلقاً بالنسبة للتقاطع المعدود المتناقص

و- أوجد جميع الحلقات والجبور من أجزاء $\Omega = \{a, b\}$

الحل:

الحلقات:

$R_1 = \{\emptyset\}$, $R_2 = \{\emptyset, \Omega\}$, $R_3 = \{\emptyset, \{a\}\}$

$R_4 = \{\emptyset, \{b\}\}$, $R_5 = P(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}$

"وهي حلقات تامة" (لكون Ω منتهية)

جبور: $A_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $A_2 = P(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}$

بل هي "جبور تامة"

10- أوجد جميع الحلقات و الجبور الممكنة من أجزاء مجموعة القواسم الأولية للعدد 203

الحل: لنفرض أن X هي مجموعة كل القواسم للعدد 203 فيكون

$$X = \{1, 7, 29, 203\}$$

ولنفرض أن X' هي مجموعة كل القواسم الأولية للعدد 203 فيكون

$$X' = \{7, 29\}$$

الحلقات:

$R_1 = \{\emptyset\}$, $R_2 = \{\emptyset, X'\}$, $R_3 = \{\emptyset, \{7\}\}$

$R_4 = \{\emptyset, \{29\}\}$, $R_5 = P(X') = \{\emptyset, \{7\}, \{29\}, X'\}$

وهي حلقات تامة أيضاً

الجبور: $A_1 = \{\emptyset, X'\}$, $A_2 = P(X') = \{\emptyset, \{7\}, \{29\}, X'\}$

وهي جبور تامة أيضاً

11- مثال: لنأخذ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, X\}$

واضح أن τ تشكل تبولوجيا على X لكنها ليست حلقة من أجزاء X

لأن $\{1\}, X$ تنتميان إلى τ إلا أن:

$$X - \{1\} = \{2, 3, 4\} \notin \tau$$

ليست حلقة وليست جبر وليست جبر تام

وأصغر جبر تام يحوي τ "جبر بوريل"

$$B_X = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, X\}$$

عناصر τ كلا اضافة للمتمم المقابل

12- ما أصغر حلقة تحوي الصف $\tau = \{\{3\}, \{1,2\}\}$
من اجزاء المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$ ما أصغر جبر يحوي الصف τ
وما أصغر تبولوجيا تحوي τ.

الحل: أصغر حلقة: $\tau_1 = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, X\}$
أصغر جبر

أصغر تبولوجيا $\tau_3 = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$

13- برهن أن كل جبر تام من أجزاء مجموعة غير خالية هو صف مطرد من اجزاءها ثم هل العكس صحيح؟ برر.

البرهان:
لنفرض أن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، $P(X)$ جماعة كل المجموعات الجزئية من X
A جبراً تاماً من اجزاء X، ولنثبت أن A صفاً مطرداً من أجزاء X

- بما أن A جبراً تاماً فهو يحوي على الأقل الخالية والشاملة إذن هو صف غير خال، وهو شرط أساسي كي يكون A صفاً مطرداً.

- بما أن A جبراً تاماً فهو إذاً حقق "الشرط ه" الذي ينص على:
"أن اتحاد أي متتالية مجموعاتية من عناصر A هو عنصر من A"
خاصة أن اتحاد أي متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر A هو عنصر من A

- بما أن A جبراً تاماً فهو إذاً حقق "الشرط ه"

وأيضاً مغلق بالنسبة لعملية الاتمام مما يعني:
ان تقاطع أي متتالية مجموعاتية من عناصر $\mathcal{A}$ هو عنصراً من $\mathcal{A}$ ومن ثم
تقاطع أي متتالية مجموعاتية متناقصة من عناصر $\mathcal{A}$ هو عنصراً من $\mathcal{A}$.
من كل ماسبق نستنتج أن $\mathcal{A}$ صف مطرد من أجزاء X

لنضرب الآن مثلاً يبين أن ليس كل صف مطرد هو جبر تام:
لنأخذ $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية ولنأخذ الصف:

$$e = \{\emptyset , A , X\} \quad , \forall A \subseteq X$$

واضح أن e صفاً مطرداً
لكن e ليس جبراً تاماً لأن:

$$X , A \in e \quad , \quad X - A = A^c \notin e$$

ليس مغلقاً بالنسبة لعملية الاتمام

14- تمرين: إذا كان $X \neq \emptyset$ وكان $S = \{\{a\} : a \in X\}$ فبين أن
أصغر حلقة تحوي S هي صف المجموعات المنتهية في X

الحل:
تذكرة بأصغر حلقة تحوي صف بشكل عام: لتكن $X \neq \emptyset$ وليكن S صفاً بشكل عام
من أجزاء X عندئذ:
أصغر حلقة من اجزاء X وتحوي S هي جماعة τ من اجزاء X تحقق الشرطين الآتيين
1) $S \subseteq \tau$
2) $\forall \underbrace{\tau_1}_{\text{حلقة}} \subseteq P(X) \; ; \; S \subseteq \tau_1 \Rightarrow \tau \subseteq \tau_1$

ونسمي τ بالحلقة المولدة بالصف S أو الحلقة التي يولدها S

لنحل التمرين الآن:

نفرض أن τ هو صف كل المجموعات المنتهية في X وكما نعلم مما سبق "التمرين 5" فإنه τ حلقة على X وكذلك

$$S \subseteq \tau$$

لأن كل عنصر من S هو مجموعة منتهية في X أي هو عنصر من τ.

- لنفرض أن τ_1 حلقة كيفية من أجزاء X وتحوي الصف S. أي:

$$S \subseteq \underbrace{\tau_1}_{\text{حلقة كيفية}} \subseteq P(X)$$

ولنثبت أن $\tau \subseteq \tau_1$.

$$\boxed{\forall A \in \tau}^{(1)} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب تعريف عناصر } \tau} A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad ; \; a_i \in X \; , \; i = 1, \dots, n$$

$$\Longrightarrow A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

لدينا:

$$\{a_i\} \in S \quad ; \quad \forall i = 1, \dots, n \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{لأن } S \subseteq \tau_1} \{a_i\} \in \tau_1 \quad ; \; \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Longrightarrow \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_n\} \in \tau_1 \Longrightarrow \boxed{A \in \tau_1}^{(2)}$$

بما أن τ_1 حلقة فهي إذن مغلقة بالنسبة للاتحاد المنتهي

من (1) و (2) نجد $\tau \subseteq \tau_1$

وبيّن أن أصغر حلقة تحوي S هو صف المجموعات المنتهية أو التي متمماتها منتهية في X

وبيّن أن ″ جبر تام يحوي S هو صف المجموعات المعدودة على الأكثر أو التي

متمماتها معدودة على الأكثر في X

"الإثبات يتم بنفس الطريقة السابقة"

15) إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً من اجزاء $\mathbb{R}$ ويحوي جميع المجالات المحددة والمغلقة من اليسار والمفتوحة من اليمين فإن $\mathcal{A}$ سيحوي صف كل المجالات في $\mathbb{R}$ والتي هي:

$]a,b[\ ,\ ]a,b]\ ,\ [a,b]\ ,\ ]a,+\infty[\ ,\ [a,+\infty[$

$]-\infty,b[\ ,\ ]-\infty,b]\ ,\ ]-\infty,+\infty[$

<u>الحل</u>: أولاً نضع المساواة التالية قبل البدء بحل التمرين:

1) $]a,b[= \bigcup_{n\geq 1} [a+\frac{\ell}{n}, b[\quad ; \ \ell = \frac{b-a}{2}$

2) $[a,b] = \bigcap_{n\geq 1} [a, b+\frac{\ell}{n}[$

3) $]a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1}]a, a+n[$

4) $]-\infty, b[= \bigcup_{n\geq 1}]b-n, b[$

5) $[a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [a, a+n[$

6) $]-\infty,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [-n, n[$

لنبدء بالحل: ليكن $\mathcal{J}$ هو صف كل المجالات المحدودة المغلقة من اليسار والمفتوحة من اليمين

$\mathcal{J} = \{ [a,b[\ : a,b \in \mathbb{R} \ , a \leq b \}$

★ ولنفرض أن $\mathcal{A}$ الجبر التام من اجزاء $\mathbb{R}$ والحاوي لذلك الصف أي $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$

لنفرض أن $J_1 = \{]a,b[\;:\; a,b \in \mathbb{R} \;,\; a \leq b \}$

ولنثبت أن $J_1 \subseteq \mathcal{A}$

$\forall\ ]a,b[\ \in J_1 \Longrightarrow\ ]a,b[\ = \bigcup_{n \geq 1} [a+\frac{1}{n}, b[$

$[a+\frac{1}{n}, b[\ \in J \subseteq \mathcal{A} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر تام فهو مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود}} \bigcup [a+\frac{1}{n}, b[\ \in \mathcal{A}$.

$\Longrightarrow \boxed{]a,b[\ \in \mathcal{A}}$

ومنه $J_1 \subseteq \mathcal{A}$

★ لنفرض أن $J_2 = \{]a,+\infty[\;:\; a \in \mathbb{R} \}$

لنثبت أن $J_2 \subseteq \mathcal{A}$

$\forall\ ]a,+\infty[\ \in J_2 \Longrightarrow\ ]a,+\infty[\ = \bigcup_{n \geq 1}]a, a+n[$

$]a,a+n[\ \in J_1 \subseteq A \underset{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر تام فهو مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود}}{\Longrightarrow} \bigcup\ ]a,a+n[\ \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow\ ]a,+\infty[\ \in \mathcal{A}$

ومنه $J_2 \subseteq \mathcal{A}$

★ لنفرض أن $J_3 = \{]-\infty, b[\;:\; b \in \mathbb{R} \}$

ولنثبت أن $J_3 \subseteq \mathcal{A}$

$\forall\ ]-\infty, b]\ \in J_3 \Longrightarrow\ ]-\infty, b]\ = (\,]b,+\infty[\,)^c$

$]b,+\infty[\ \in J_2 \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow (\,]b,+\infty[\,)^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow\ ]-\infty, b]\ \in \mathcal{A}$

* $\mathcal{J}_4 = \{]a,b] : a,b \in \mathbb{R} , a \le b \}$

لنثبت أن $\mathcal{J}_4 \subseteq \mathcal{A}$

$\forall]a,b] \in \mathcal{J}_4 \Rightarrow]a,b] =]-\infty,b] -]-\infty,a]$

$]-\infty,a] ,]-\infty,b] \in \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow]-\infty,b]-]-\infty,a] \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow]a,b] \in \mathcal{A}$

والبقية بنفس الطريقة ...

---

16) إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً من أجزاء مجموعة منتهية X فإن $\mathcal{A}$ تبولوجيا على X. علل ذلك. هل العكس صحيح؟ برر اجابتك.

الحل: لنفرض أن $\mathcal{A}$ جبراً من أجزاء مجموعة منتهية وغير خالية X
وهذا يعني أن الآتي محقق:

1) $\emptyset , X \in \mathcal{A}$

2) $\forall A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} , A \cap B \in \mathcal{A}$

من الشرطين السابقين نستنتج أن $\mathcal{A}$ تبولوجيا على X

ـ لكن ليس كل تبولوجيا على مجموعة منتهية جبراً والمثال الآتي يوضح ذلك
لنأخذ: $X = \{1,2,3,4\}$
ولنأخذ الجماعة:

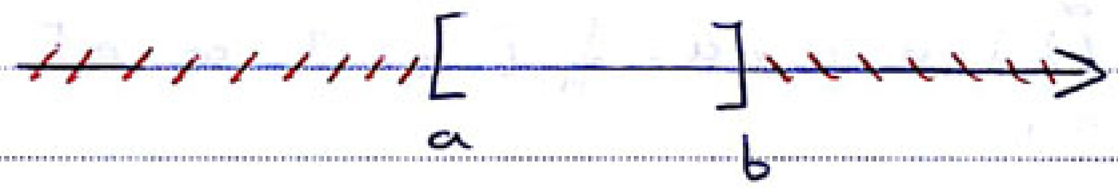
$\mathcal{A} = \{\emptyset , \{1\} , \{2\} , \{1,2\} , X\}$

إن $\mathcal{A}$ هي تبولوجيا على X إلا أن $\mathcal{A}$ ليست حلقة على X وهي ليست جبر على X لأن $X , \{2\} \in \mathcal{A}$ لكن $\Rightarrow X - \{2\} = \{1,3,4\} \notin \mathcal{A}$

17) ناقش صحة أو خطأ ما يلي :

1) $[a,b]^c =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$

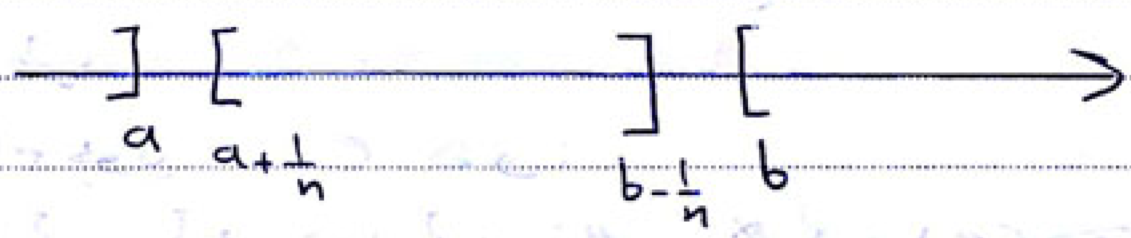
هي صحيحة لنقوم بالرسم :



"إن متممة هذا المجال هو اتحاد لمجالين مفتوحين أي مجموعة مفتوحة ومنه $[a,b]$ مجال مغلق هو مجموعة مغلقة"

2) $]a,b[= \cup [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$

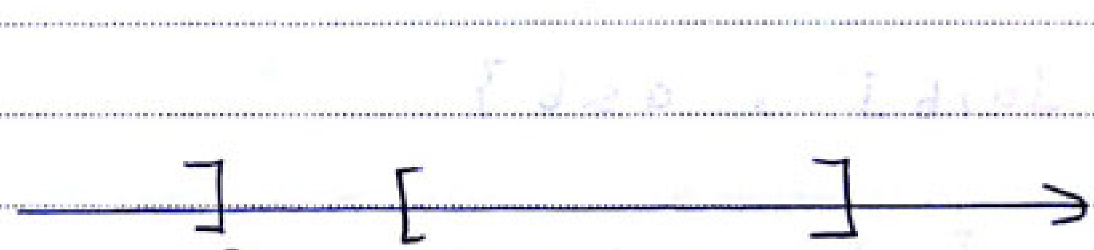
صحيحة لنقوم بالرسم :



كل مجال مفتوح هو اتحاد عدود لمجالات مغلقة.

3) $]a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b]$

صحيحة



إن أي مجال نصف مفتوح هو اتحاد عدود لمجالات مغلقة

ولاحظ أيضاً أن أي مجال نصف مفتوح هو تقاطع عدود لمجالات مفتوحة أي

$$]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\frac{1}{n}[$$

4) $]a,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a,a+n[$ صحيحة

5) $]-\infty,a] = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n-a\, ,\, a-\frac{1}{n}[$ خاطئة

لأن: $\bigcup_{n=1}^{\infty}]-n-a\, ,\, a-\frac{1}{n}[=]-\infty,a[$

---

18) أمثلة عن الصف المطرد:

1- $P(\Omega)$

2- $\{\varnothing , \Omega\}$

3) أي صف تام من أجزاء Ω هو صف مطرد

---

19) $e = \{\varnothing , \mathbb{N} , \{1,2,3\}\}$ ليست حلقة

ولكنه صف مطرد

وأصغر صف تام يحوي e هو:

$\sigma(e) = \{\varnothing , \mathbb{N} , \{1,2,3\} , \{0,4,5,\ldots\}\}$

---

20) أمثلة عن صف الحلقة:

1) $e = \{[a,b[\; ; \; a \leq b\}$

2) $\{]a,b] \; ; \; a \leq b\}$

3) $\mathcal{L} = \{I \; ; \; I$ مجال في $\mathbb{R}\}$

4) لنأخذ X المجموعة الشاملة هي المستوي ولنأخذ e صف المستطيلات التي أضلاعها توازي المحاور نلاحظ أن e صف حلقة.

إثبات (1) إنه نصف حلقة :

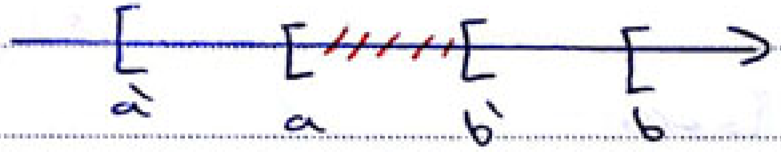
1) $[a,a[= \emptyset \Rightarrow \emptyset \in e$

2) $[a,b[\cap [a',b'[\overset{?}{\in} e$

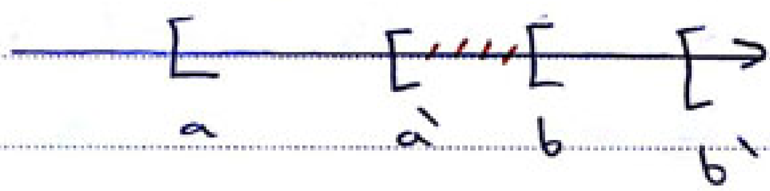
لنميز حالات :

إما) $[a,b[\cap [a',b'[= \emptyset \in e$

بالرسمة :



أو) نلاحظ من الشكل: $[a,b[\cap [a',b'[\neq \emptyset$



ومنه

$[a,b[\cap [a',b'[\in e$

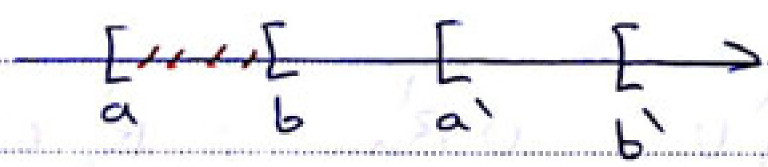
في الحالتين يكون :

$[a,b[\cap [a',b'[\in e$

3) $[a,b[- [a',b'[\overset{?}{\in} e$ ★

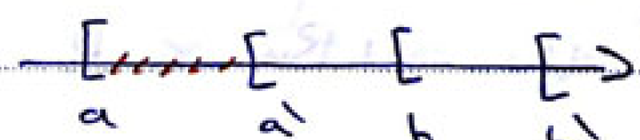
نميز حالات عدة:

p)



فيكون $[a,b[- [a',b'[\in e$

ب)

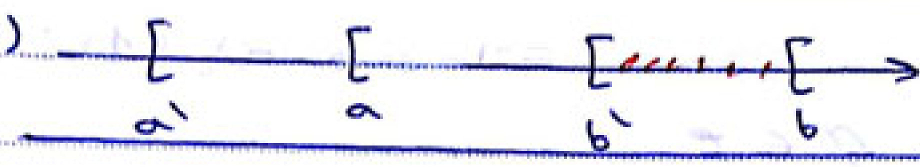


فيكون ★ محققة

ج)

فيكون ★ محققة حيث :

$[a,b[- [a',b'[= \underbrace{[a,a'[}_{\in e} \cup \underbrace{[b',b[}_{\in e}$

5)  فيكون * محقق

21) - صف المجالات المفتوحة هي نصف حلقة

- صف المجالات جميعها هي نصف جبر

- إذا كان R نصف جبر فصف الاتحادات المنتهية لعناصر R وليكن $\mathcal{A}$ يكون جبر بوليه بل ويكون أصغر جبر يحوي

لنبرهن ذلك :

1) $\emptyset , X \in \mathcal{A}$ وضوحاً

$R \subseteq \mathcal{A}$ وضوحاً

لنبرهن أن :

أ) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

ب) $A , B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

جـ) $A , B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

البرهان :

أ) $A \in \mathcal{A} \underset{\text{حسب تعريف } \mathcal{A}}{\Longrightarrow} A = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n \;;\; R_i \in R$

$i = 1, \dots, n$

$B \in \mathcal{A} \Rightarrow B = R'_1 \cup \dots \cup R'_n \;;\; R'_i \in R$

$i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow A \cup B = R_1 \cup \dots \cup R_n \cup R'_1 \cup \dots \cup R'_n \in \mathcal{A}$

لتسهيل الأمر نفرض $A = R_1 \cup R_2$ و $B = S_1 \cup S_2$

عندها $A \cup B = R_1 \cup R_2 \cup S_1 \cup S_2$

ب) $A \cap B = (R_1 \cup R_2) \cap (S_1 \cup S_2)$

$= (R_1 \cap S_1) \cup (R_1 \cap S_2) \cup (R_2 \cap S_1) \cup (R_2 \cap S_2)$

هو اتحاد منتهٍ لعناصر من R

ج) $A = (R_1 \cup R_2) \Longrightarrow A^c = \underbrace{R_1^c}_{\in R} \cap \underbrace{R_2^c}_{\in R}$

و $\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة لعملية التقاطع، إذاً $A^c \in \mathcal{A}$

مبرهنة: أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تشكل جماعة ما جبراً تاماً من أجزاء مجموعة غير خالية هو أن تكون جبراً وصفاً مطرداً من أجزاء تلك المجموعة

البرهان: لنفرض أن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما، $P(X)$ جماعة كل المجموعات الجزئية من X. $\mathcal{A}$ جماعة من اجزاء X ولنثبت أن:

$\mathcal{A}$ جبر تام $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ جبر وصف مطرد

$\Leftarrow$ لنفرض أن $\mathcal{A}$ جبر تام من اجزاء X فهو إذاً جبر ومن التمرين 13 نستنتج أنه صف مطرد.

$\Rightarrow$ لنفرض أن $\mathcal{A}$ جبر وصف مطرد لنثبت أن $\mathcal{A}$ جبراً تاماً. ويكون كون $\mathcal{A}$ جبر أن نثبت أنه يحقق "الشرط ه"

لنأخذ المتتالية المجموعاتية $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ الاختيارية من عناصر $\mathcal{A}$ ولنثبت أن:

ولنثبت أن $\bigcup_{n\geq 1} A_n = A \in \mathcal{A}$

بما أن $\mathcal{A} \ni A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ و $\mathcal{A}$ جبر فرضاً

فهو مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي وبالتالي

$$B_n = \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \in \mathcal{A}$$

إن المتتالية المجموعاتية $\{B_n\}_{n\geq 1}$ هي متتالية مجموعاتية متزايدة من عناصر $\mathcal{A}$

لأن:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i = B_n \subseteq B_{n+1} = \bigcup_{1\leq i\leq n+1} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} \quad , n\geq 1$$

وبما أن $\mathcal{A}$ صف مطرد فإن:

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = B \in \mathcal{A}$$

لكن:

$$B = \bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \bigcup_{n\geq 1} A_n = A \underset{\substack{\text{حسب} \\ \text{كون} \\ \mathcal{A}\,\omega B}}{\in} \mathcal{A}$$