Subject: Date: / /

مستمر على المجال المغلق

و $f_n \to f$ مستمر على المتراصة Γ

(Γ من المجموعة النقطية لتابع

مستمر على $[a,b]$ جزء متراص

$\Leftarrow$ f محدود على Γ

لنأخذ نهاية الطرفين (كون طويلة

تابع مستمر بين النهاية والطويلة)

$0 \le |\lim \int_\Gamma f_n - \int f|$

$\le \mathcal{L}(\Gamma) . \lim \sup_{z \in \Gamma} |f_n(z) - f(z)|$

$|\lim \int f_n - \int f| \le 0$

لأن: $\lim \sup |f_n(z) - f(z)| = 0$

وكون $f_n \rightrightarrows f$ على Γ

$|\lim \int f_n - \int f| = 0$

وهو المطلوب

$\int_\Gamma f = \lim f_n$

ملاحظة: إذا كانت $f_n \rightrightarrows f$

فإن المتتالية الـ sup تسعى

إلى الـ f محدودة

انتهت المحاضرة السادسة عشرة

محاضرة السابعة عشرة

مبرهنة: لتكن $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ متسلسلة من التوابع

العقدية المستمرة على طريق Γ و

$f = \sum_{n=n_0} f_n$

على Γ فإن f كمول

$\int_\Gamma f = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_\Gamma f_n$

مبرهنة فاير شتراس: لتكن $\sum f_n$

متسلسلة توابع عقدية معرفة على

$A \subseteq \mathbb{C}$ و $\{M_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية

≥ 0 وغير السالبة التي تحقق

$|f_n(z)| \le M_n \ \forall z \in A$ $N, n \ge N$

عدد طبيعي كبير كفاية.

عندئذ إذا كانت $\sum M_n$ متسلسلة

متقاربة فإن $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على A

مبرهنة تايلور: إذا كان f تحليلياً على قرص

$D(z,R)$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور

في ذلك القرص أي أن

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \forall z \in D(z,R)$

$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ وأكثر من ذلك

أياً كانت n

نتائج من المبرهنة:

1) إذا كان f تحليلي على مجموعة مفتوحة

وكان $z_0 \in G$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في أوسع قرص مركزه z_0 ومحتواه في G

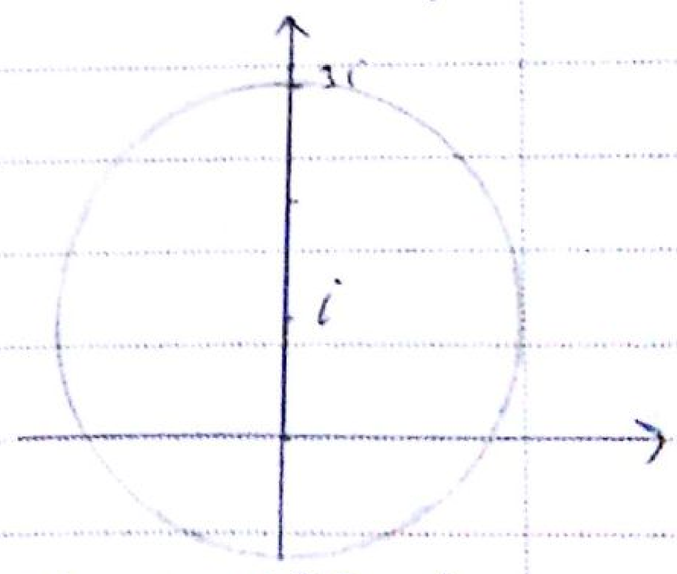
$$D(z_0, d(z_0, \partial G)) \subseteq G$$

مثال: عين أوسع قرص مركزه i ويمكن نشر

$$f(z)=\frac{1}{z^2+9}$$

وفق تايلور.

الحل: f تحليلي على $G=\mathbb{C}\setminus\{\pm i3\}$ والقرص المطلوب $D(i,2)$



نتيجة 2: إذا كان f تحليلي على منطقة G وكان القرص المغلق $\bar{D}(z_0, r)$ محتوى في تلك المنطقة و

$$\gamma(t)=z_0+re^{it};\ 0\le t\le 2\pi$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad \forall n\ge 0$$

تسمى هذه الصيغة صيغة كوشي التكاملية الثانية

إذا كان تابع يمثل بمتسلسلة ... فإنه قابل للاشتقاق عدد غير منتهي من المرات ولدينا $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

من خلال إثبات مبرهنة تايلور وجدنا أن

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad (1)$$

حيث

$$\gamma(t)=z_0+re^{it};\ 0\le t\le 2\pi,\ r\in\mathbb{R}$$

ولدينا

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \ * \quad \forall n\ge 0$$

نتيجة 3: إذا كان f تحليلي على $D(z_0,R)$ وكان

$$|f(z)|\le M \quad \forall z\in D(z_0,R)$$

وفرضنا أن M هو ... عندئذ

$$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!\,M}{R^n} \quad \forall n\ge 0$$

لنأخذ طويلة طرفي *

$$|f^{(n)}(z_0)|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right|$$

$z\in\gamma$

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right|\le\frac{M}{r^{n+1}}$$

AL MARFI

لأن $|z-z_0| = r \quad \forall n, \forall r \in \mathbb{R}$

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r \left(\frac{n!}{2\pi}\right)$$

و $|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M(n!)}{r^n}, \forall n$

نجعل $r \to R$ في طرفين ذهاب

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!\,M}{R^n}$$

ملاحظة: إذا كان f تحليلي على $\mathbb{C}$ ومحدود على $\mathbb{C}$ فإن f ثابت على $\mathbb{C}$

(مستحيل إيجاد تابع محدود وتحليلي على $\mathbb{C}$ ويكون متغير لازم يكون ثابت)

الإثبات: f محدود على $\mathbb{C}$ يعني يوجد عدد M موجب يحقق $|f(z)| \le M$ أيا كانت $z \in \mathbb{C}$ ليكن R عدد حقيقي كيفي موجب عندئذ سيكون f تحليلي على $D(0,R)$ وحسب النتيجة

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\,M}{R^n}$$

صحيحة أيا كانت $n \ge 1$، وأيا كانت R

نجعل $R \to \infty$ في طرفي المتراجحة الأخيرة

$$0 \le |f^{(n)}(0)| \le 0$$

$\forall n \ge 1$ عندئذ المشتقات صفر تساوي الصفر

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \ge 1$$

لأن f تحليلي على $\mathbb{C}$، و $0 \in \mathbb{C}$

و f قابل للنشر وفق تايلور في أوسع قرص مركزه صفر ومحتواه في $\mathbb{C}$ أي قابل للنشر على كامل $\mathbb{C}$

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \text{ثابت} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

وهذا الكلام غير صحيح في $\mathbb{R}$

تمرين: ناقش صحة ما يلي: $\cos z$ أو $\sin z$ تابع محدود على $\mathbb{C}$

الجواب: خطأ لأن $\cos z$ و $\sin z$ ليسا محدودان على $\mathbb{C}$ لأنه لو كان تابع محدود فهو ثابت على $\mathbb{C}$ لأنها تحليليان على $\mathbb{C}$ لكن $\cos z$ و $\sin z$ ليسا ثوابت

تمرين: أثبت أن

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

الأمثلة: إن

1- $f(z)=\cos^2 z+\sin^2 z-1$

تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ ونعلم أن

$f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x-1=0$

إذا كان لدينا تابعين متطابقين على مجموعة غير منتهية تقبل نقطة تجمع فإن التابعين متطابقين على مجموعة تعريفهما

إذا كان f و g تابعين تحليليين على منطقة G وكان $f=g$ على منحني تحليلي على $\mathbb{C}$ محتواه في G فإن f يطابق g كتابع على كامل المنطقة G

- إن التابع $f(z)$ والتابع الصفري كلاهما تحليلي على $\mathbb{C}$ و f و 0 متطابقين في $\mathbb{R}$ يمكن اعتبار أنه منحني في $\mathbb{C}$ عندئذ هما متطابقين على $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

تمرين: احسب $I_n=\int_\Gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz$

$;\ \gamma(t)=re^{it}\ ;\ 0\le t\le 2\pi$

n عدد صحيح يمكن أن يكون $n\le 0$

$I_n=\int z^{-n}e^z\,dz$

في هذه الحالة التابع المكامل صحيح

على $\mathbb{C}$ تحليليا ونستطيع أن نرسم لهذا التابع تابع أصلي فتكامله على أي طريق مغلق يساوي الصفر

2) $n>0$ المكامل تحليلي على $\mathbb{C}^*$ (لا نستطيع أن نضمن وجود تابع أصلي) عندما $n=1$

$I_1=\int\frac{e^z}{z}\,dz$

$f(z)=e^z$ تحليلي على $\mathbb{C}$

γ محتواه في $\mathbb{C}$ و $0\in\gamma$

$I_1=2\pi i f(0)=2\pi i e^0=2\pi i$

عندما $n\geq 2$

$I_n=\int\frac{e^z}{z^n}\,dz$

$=\int\frac{e^z}{(z-0)^{(n-1)+1}}\,dz$

f تحليلي على محيط وداخل γ

0 مركز الدائرة γ

$I_n=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}e^0$

$=\frac{2\pi i}{(n-1)!}$

انتهت المحاضرة السابعة عشرة

محاضرة ثامنة عشرة

ملاحظة: نشر تايلور للتابع في جوار الصفر (في قرص مركزه الصفر) يساوي نشر ماك لوران للتابع

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}z^n$$

ملاحظة: إن نشر تايلور للتابع في جوار نقطة وحيد

تذكر: السلسلة الممثلة للتابع تكون وحيدة ومنه أي نشر للتابع هو نشر تايلور للتابع

مثال: هل التابع $f(z)=\frac{1}{1-z}$ قابل للنشر وفق ماك لوران وما هو أوسع قرص يكون نشره صحيحاً ، انشر هذا التابع

الحل: f تحليلي على المنطقة $G=\mathbb{C}\setminus\{1\}$ وإن $0\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

$\Leftarrow$ f قابل للنشر وفق تايلور في جوار الصفر أي وفق ماك لوران وهو قابل للنشر في أوسع قرص مركزه الصفر ومحتواه في $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ أي القرص $D(0,1)$

من شكل التابع إن هذا الكسر هو مجموع لسلسلة هندسية حدها الأول 1 وأساسها z بشرط $|z|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

وبما أن مجموعة التعريف هي $D(0,1)$ ومنه النشر مقبول

تمرين: انشر وفق ماك لوران

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$$

ثم وفق تايلور في جوار $z=1$

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1-(-z^2)}$$

أنه مجموع لسلسلة هندسية

$$\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n$$

بشرط أن $|-z^2|<1$ وهذا يكافئ $|z|<1$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$$=1-z^2+z^4-z^6+\dots$$

طريقة ثانية:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{A}{z+i}+\frac{B}{z-i}$$

Subject: Date: / /

منشورات شهيرة في جوار الصفر

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

تمرين: انشر التابع $f(z) = \sin z$ في جوار $z = i$

الحل:

$$f(z) = \sin(z) = \sin((z-i)+i)$$

$$= \cos i \sin(z-i) + \sin i \cos(z+i)$$

$$= \cos i \left((z-i) - \frac{(z-i)^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$+ \sin i \left(1 - \frac{(z-i)^2}{2!} + \cdots\right)$$

لا يمكن نشر $f(z) = \frac{1}{z}$ وفق مالك لوران لأنه غير معرف في جوار الصفر

وأكثر من ذلك هو غير تحليلي وأيضاً لا يمكن نشر الفرع الرئيسي لـ $\log z$ وفق مالك لوران

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2i}, \quad B = \frac{-1}{2i}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right]$$

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-1)-i+1} = \frac{1}{(z-1)(1-i)}$$

$$= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{1-i}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1-i}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} (z-1)^n$$

بشرط $\left|\frac{z-1}{1-i}\right| < 1$ وهذا يكافئ

$$z \in D(1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow |z-1| < \sqrt{2}$$

وبالنشر والتجميع نحصل على منشور تايلور وهنا التابع معرف على القرص الأصغري

تمرين:

$$\frac{1}{(z-i)(z+2i)}$$

انشر وفق مالك لوران

Subject: Date: / /

مبرهنة: إذا كان f تحليلي على قرص $D(z_0, R)$ فإنه له تابع أصلي على ذلك القرص

شرط التحليلية شرط كافي لوجود تابع أصلي ولكن إذا كانت المنطقة قرص فالتابع تابع أصلي

البرهان: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$\forall z \in D(z_0, R)$

وليكن التابع F الممثل بالمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$

إن نصف قطر تقارب المتسلسلة الأخيرة هو R

F تحليلي على $D(z_0, R)$ لأنه قرص تقاربها، وإن مشتق F سيكون ممثل بالمتسلسلة المشتقة للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

على القرص $D(z_0, R)$ أي

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$$

$\forall z \in D(z_0, R)$

ومنه F تابع أصلي لـ f على $D(z_0, R)$

نتيجة: التكامل لتابع تحليلي على قرص على أي منحني مغلق في القرص سيكون معدوم

لأن المنحني غير المغلق داخل قرص سيكون تابع التكامل مستقل عن المنحني أو الطريق المسلوك

ملاحظة هامة: صيغة كوشي الأولى والثانية لا تستخدم إلا إذا كان المنحني مغلق

خواص: إذا كان لدينا منحنيين مغلقين لهما الاتجاه نفسه ويدوران نفس عدد من المرات وكان أحدهما داخل الآخر وكانت المنطقة المحصورة بين المنحنيين محتواه في المنطقة G (أي لا تحوي نقاط غير معرفة للتابع) فإن كل من المنحنيين مشوه مستمر الآخر في G

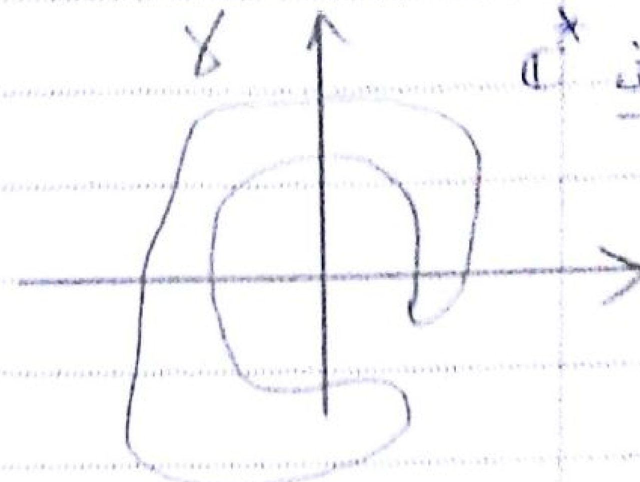
2) إذا كان أحد المنحنيين نقطة وكان الثاني مشوه مستمر له في المنطقة G فإننا نقول عن المنحني الثاني أنه مشوه للصفر (أي لنقطة في G) ونرمز لها ~ 0 (في G)

أي المشوه للصفر (أي لنقطة) نرمز له ~ 0 (في G)

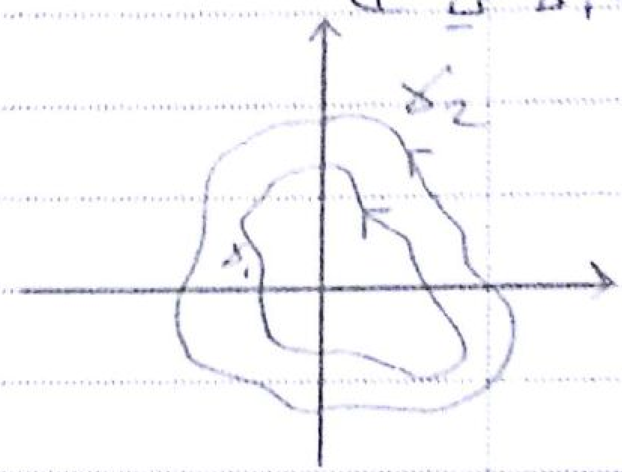
3) إذا كان لدينا منحني مغلق وكان داخل هذا المنحني محتواه في منطقة G

لأن هذا المنحنى يكون هوموتوبي للصفر في G

مثلا في $\mathbb{C}^*$



$\gamma_1 \sim \gamma_2$ في $\mathbb{C}^*$



مع العلم أن γ_1 و γ_2 في نفس الاتجاه ويدوران نفس عدد المرات

لو أخذنا كل الدوائر التي مركزها الصفر كلها متكافئة في $\mathbb{C}$

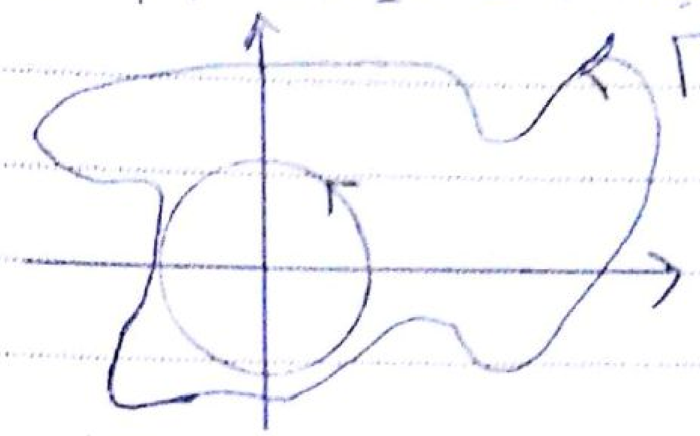
نظرية كوشي

الشكل الأول لنظرية كوشي

إذا كان f تحليلي على منطقة G وكان γ_1 متكافئ لـ γ_2 في G عندئذ

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

تمرين: احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz$ حيث Γ هو منحنى مرسوم بالشكل



الصفر ليست نقطة من المنحنى والمنحنى مكونة متراصة وبعدها عن الصفر موجب تماماً، بالتالي نستطيع رسم دائرة داخل المنحنى ولنفرض أن نصف قطر هذه الدائرة يساوي r محيطة مرة واحدة وبالاتجاه الموجب ولتكن Γ_1

$$\Gamma_1 = \gamma_1(t) = re^{it}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

ومنه $\Gamma \sim \Gamma_1$ في $\mathbb{C}^*$، $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على المنطقة $\mathbb{C}$ ومنه

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, rie^{it}\,dt$$

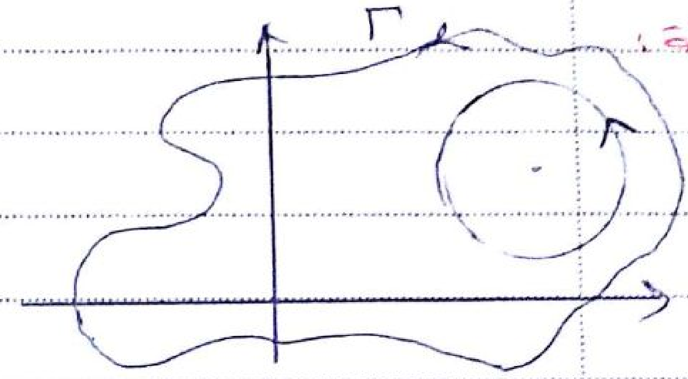
$$= 2\pi i$$

نستطيع حساب التكامل على شكل Γ بطريقة ثالثة وهي رسم دائرة

Subject: Date: / /

داخل أو خارج المنطقة بحيث تكونا في نفس الاتجاه ومحتواه في المنطقة G دون وجود نقاط خارج G بين المنحنيين (الحلقة الدائرة)

ملاحظة:



إن هذه الدائرة ليست مشوه لـ Γ في $\mathbb{C}^*$ لأن المبدأ بين المنحنيين

ملاحظة: إذا كان لدينا منحنيين مغلقين بحيث أحدهما داخل الآخر وحسبنا التكامل لتابع ما على هذين المنحنيين وكانا غير متساويين (أي ناتج المكاملة على المنحني الأول لا يساوي ناتج المكاملة على المنحني الثاني) إنما التابع غير تحليلي على المنطقة بين المنحنيين أو المنحني الأول غير مشوه للثاني

انتهت المحاضرة الثامنة عشرة

محاضرة تاسعة عشرة

تمرين: انشر التابع $f(z)=\frac{1}{z^2}$ في جوار $z=-i$

الحل:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+i)-i} = \frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+i}{i}}$$

$$= -\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+i(z+i)}$$

$$= -\frac{1}{i}\sum (-1)^n i^n (z+i)^n$$

بشرط $|z+i|<1$

$$\Rightarrow z \in D(-i,1)$$

وحسب مبرهنة

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n i^{n+1} (z+i)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{n+1} (n+1)(z+i)^n$$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)\, i^n (z+i)^n \quad \forall z \in D(-i,1)$$

تمرين: انشر $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$ وفق منشور لوران في جوار $z=-i$

الحل:

$$f(z) = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+1}$$

Subject: Date: / /

$\Rightarrow B\sum(-1)^n z^n + \frac{A}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}}$

تمرين: انشر $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z+1)}$ وفق متسلسلة لوران

الحل:

$f(z)=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{(z+i)^2}$

تمرين: ليكن $f(z)=\frac{z^2}{z^3+z^2+z+1}$ والمطلوب:

1) ما هي مجموعة تحليلية f

2) انشر f وفق متسلسلة لوران

3) احسب التكامل $\int_{\gamma_i} f$

$\gamma_1=C^+(0,\frac{1}{2})$,

$\gamma_2=C^+(0,2)$,

الحل: 1) $z^3+z^2+z+1=0$

$\Rightarrow (z+1)(z^2+1)=0$

$z_1=-1\ ,\ z_2=i\ ,\ z_3=-i$

ومنه مجموعة تحليلية التابع

$\mathbb{C}\setminus\{-1, i, -i\}$

2) $f(z)=\frac{A}{z+1}+\frac{Bz+C}{z^2+1}$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\ ,\ B=\frac{1}{2}\ ,\ C=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{z-1}{1+z^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right]$

3) بما أن f تحليلي على $D(0,\frac{3}{4})$ و $C^+(0,\frac{1}{2})$ منحني مغلق وهذا القرص محدب نجمية

$\int_{C^+(0,\frac{1}{2})} f = 0$

لنجعل مجمل منحني محتواه في القرص $D(0,2)$ ويكون تحليلي عليه

$f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z}+\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}\right]$

$\int_{C^+(0,2)} f=\frac{1}{2}\left[\int_{C^+(0,2)}\frac{dz}{z-(-1)}+A\int_{C^+(0,2)}\frac{dz}{z-i}+B\int_{C^+(0,2)}\frac{dz}{z+i}\right]$

f_1, f_2, f_3 تحليلية على $\mathbb{C}$ بكاملها وبالتالي هي تحليلية على محيط وداخل $C^+(0,2)$ ثم أن النقاط $-1, -i, +i$ موجودة داخل هذا المنحني حسب صيغة كوشي التكاملية الأولى

Subject: Date: / /

$\frac{1}{2}\left[2\pi i f_1(-1) + 2\pi i f_2(i) + 2\pi i \beta f_3(-i)\right]$

$= i\pi\left[1+A+\beta\right]$

الشكل الأول لنظرية كوشي

f تحليلي في منطقة G وكان γ_1 مشوه لـ γ_2 في G فإن $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

في حالة خاصة: f تحليلي على منطقة G و Γ_1 و Γ_2 منحنيان مغلقان لهما نفس الاتجاه و[illegible] الأول، وكانت المنطقة بين Γ_1 و Γ_2 محتواة في G ومنه $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$

سؤال: إذا كان f تحليلي على G وكان Γ_1 و Γ_2 منحنيان مغلقان هل يمكن في G، وكان التكامل لـ f على Γ_1 لا يساوي تكامل لـ f على Γ_2 هل يمكن أن يكون Γ_1 مشوه لـ Γ_2

بما أن f تحليلي على منطقة G أي Γ_1 غير مشوه لـ Γ_2 في G

تمرين: هل $C^+(0,1)$ مشوه لـ $C(0,1)$ في $\mathbb{C}^*$

يمكن إيجاد تابع واحد تحليلي على منطقة $\mathbb{C}^*$ ولكن $f(z) = \frac{1}{z}$

$-2\pi i = \int_{C(0,1)} f \neq \int_{C^+(0,1)} f = 2\pi i$

ومنه $C^+(0,1)$ ليس مشوه لـ $C(0,1)$

إذا كان التابع تحليلي على منطقة G وكان تكامل تابع على منحني ما يساوي التكامل على التابع على المنحني الثاني فهل المنحني الأول مشوه للمنحني الثاني؟

الجواب: ليس بالضرورة في الحالة العامة

الشكل الثاني لنظرية كوشي:

إذا كان f تحليلي على منطقة G وكان γ مشوه في G لنقطة فإن التكامل $\int_\gamma f = 0$ وبشكل خاص إذا كان f تحليلي على محيط أو داخل منحني γ فإن $\int_\gamma f = 0$

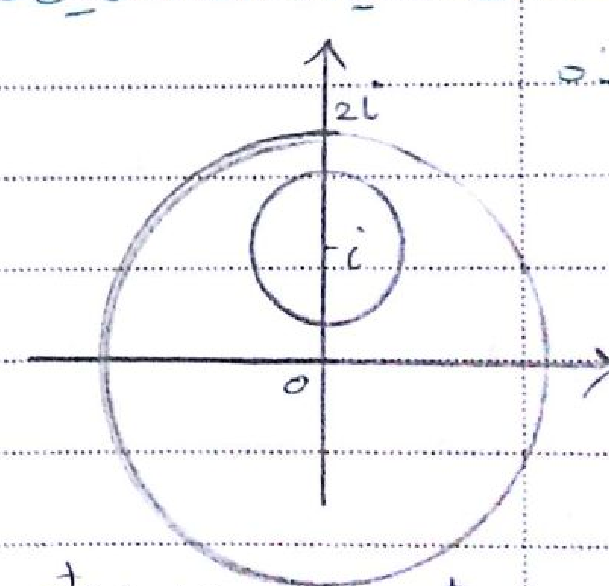
انتهت المحاضرة التاسعة عشرة

محاضرة عشرون ١

تمرين: احسب التكامل $\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz$

لا نفكر بنظرية كوشي إذا كان الطريق مفتوح
إذا كان الطريق مفتوح أفكر هل التابع تابع
تحليلي؟ في حال كان الطريق مغلق
والتابع تابع تحليلي يكون ناتج التكامل
يساوي الصفر

الحل: التكامل تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{i\}$
و i داخل الطريق أي لا يمكن جعل
الطريق داخل قرص تحليلي عليه
شكل التابع يوحي باستخدام كوشي
التالية لكن i في داخل الطريق وليست
في مركزه



نلاحظ أن $C^+(0,2)$ مستوٍ لـ $C^+(i,\frac{1}{2})$ في
المنطقة $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ لأن جميع نقاط المنحنيين
معرفة على المنطقة $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ ومتساويان
بنفس الاتجاه ونفس عدد الدورات
حسب شكل كوشي الأول

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = \int_{C^+(i,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-i)^2}$$

وبما أن $f(z)=e^z$ تحليلي على محيط
وداخل $C^+(i,\frac{1}{2})$ وبما أن i هي
مركز الدائرة نحسب صيغة كوشي
التكاملية التالية

$$\int_{C^+(i,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i)$$

$$= \pi i e^i = \pi i(\cos 1 + i\sin 1)$$

في حال وجد أكثر من نقطة شاذة
في المقام أفرق الكسر وأطبق على
صيغة كوشي

مبرهنة: تعميم للشكل الأول لنظرية كوشي:
ليكن Γ طريق مغلق وبسيط (موجه
مرة واحدة) ولتكن $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$
طرق مغلقة وبسيطة ولكل منها
اتجاه Γ نفسه ~~…~~ Γ
ومنفصلة مثنى مثنى وتقع جميعها
داخل المنطقة لـ Γ إذا كان
f تحليلي على منطقة تحوي الطرق
$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$
والمنطقة الواقعة خارج كل من
$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ وداخل Γ

Subject: Date :   /   /

فإن $\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f + \cdots + \int_{\Gamma_n} f$

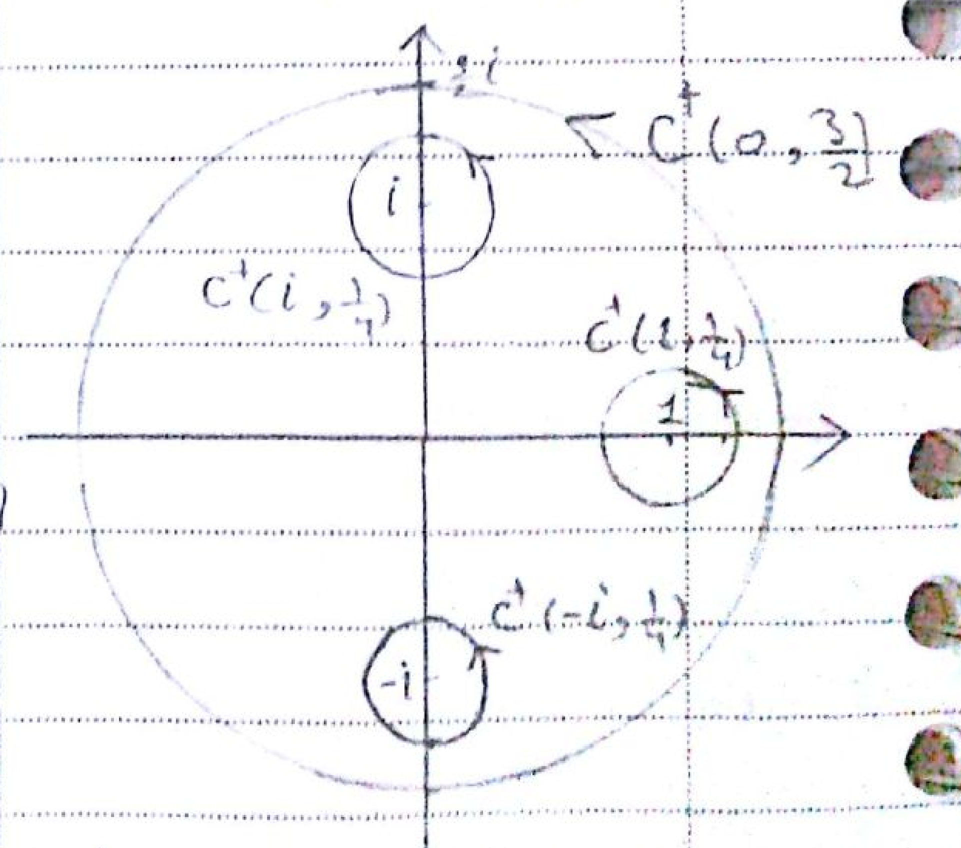
أي أن التكامل لـ Γ يساوي مجموع التكاملات لـ $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$

تمرين: احسب التكامل $\displaystyle\int_{C^+(0,\frac{3}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz$

الحل: إن التكامل تحليلي على المنطقة $\mathbb{C}\setminus\{i,-i,1\}$ لأنها الشاذة

$\Gamma_1 = C^+(i,\frac{1}{4}),\ \Gamma_2 = C^+(-i,\frac{1}{4}),\ \Gamma_3 = C^+(1,\frac{1}{4})$

إن Γ_1 و Γ_2 و Γ_3 دوائر تقع داخل $C^+(0,\frac{3}{2})$ وجميع هذه المنحنيات محتواه في المنطقة $\mathbb{C}\setminus\{i,-i,1\}$



كما أن التكامل تحليلي على المنطقة الواقعة خارج $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ وداخل $C^+(0,\frac{3}{2})$

وحسب مبرهنة كوشي

$$\int_{C^+(0,\frac{3}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz = \int_{C^+(1,\frac{1}{4})} \frac{\frac{e^z}{(z^2+1)}}{(z-1)^2}\,dz + \int_{C^+(-i,\frac{1}{4})} \frac{\frac{e^z}{(z-i)(z-1)^2}}{z+i}\,dz + \int_{C^+(i,\frac{1}{4})} \frac{\frac{e^z}{(z+i)(z-1)^2}}{z-i}\,dz$$

$$f_1(z) = \frac{e^z}{(z+i)(z-1)^2}$$

$$f_2(z) = \frac{e^z}{(z-i)(z-1)^2}$$

$$f_3(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)}$$

f_1 تحليلي على ضمن وداخل $C^+(i,\frac{1}{4})$ و i داخل $C^+(i,\frac{1}{4})$

f_2 تحليلي على ضمن وداخل $C^+(-i,\frac{1}{4})$ و $-i$ داخل $C^+(-i,\frac{1}{4})$

f_3 تحليلي على ضمن وداخل $C^+(1,\frac{1}{4})$ و 1 داخل $C^+(1,\frac{1}{4})$

وحسب صيغ كوشي التكاملية

$$\int_{C^+(0,\frac{3}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz = 2\pi i f_1(i) + 2\pi i f_2(-i) + 2\pi i f_3'(1) = 0$$

$$= \pi i\frac{(4+3i)}{4}e^{-i} + \pi i\frac{(4-3i)}{2}e^{-i} + 0$$

الشكل الثاني لنظرية كوشي:
إذا كان f تحليلياً في منطقة G [illegible] X
في G فإن $\oint\limits_{X} f = 0$

حالة خاصة: إذا كان f تحليلياً على محيط وداخل
منحني X فإن $\oint\limits_{X} f = 0$

تمرين: احسب التكامل $$\int\limits_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz$$

الحل: التكامل تحليلي على المنطقة
$\mathbb{C} \setminus \{1, i, -i\}$ وبالتالي هو تحليلي
على محيط وداخل المنحني $C^+(0,\frac{1}{2})$
وحسب الشكل الثاني لنظرية كوشي
فإن هذا التكامل معدوم

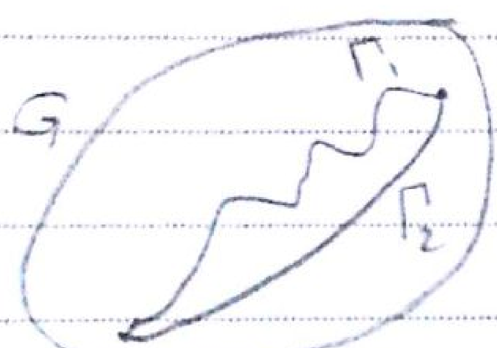
ملاحظة: إذا كان Γ منحني مغلق في
منطقة G، وكان f تابع معرف على G
وكان $\oint\limits_{\Gamma} f = 0$ فهل Γ مشوه
للصفر في G ؟

الجواب: لا والإثبات من المثال الآتي
$f(z) = \frac{1}{z^2}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$
و $C^+(0,1)$ ليس مشوه
للصفر في $\mathbb{C}^*$ أي $C^+(0,1) \nsim 0$
في $\mathbb{C}^*$ وكما رأينا سابقاً
$$\int\limits_{C^+(0,1)} \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

لأن $\frac{1}{z^2}$ له تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$ وهو $\frac{-1}{z}$
وتكامله على أي منحني مغلق
في تلك المنطقة يساوي صفر

التشويه بأطراف ثابتة

ليكن Γ_1 و Γ_2 منحنيين في G لهما
البداية ذاتها والنهاية ذاتها
ولنفرض المنطقة الداخلية لـ $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$



سيكون المنحني $\Gamma_2 \oplus \Gamma_1$ منحني مغلق
ولنفرض $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ منطقة الداخلية
إذا المنحني محتواة في G عندها
نقول Γ_1 مشوه مستمر لـ Γ_2
بأطراف ثابتة في G
ونرمز لذلك $\Gamma_2 \sim \Gamma_1$ بأطراف ثابتة في G

ملاحظة: $\Gamma_2 \sim \Gamma_1$ بأطراف ثابتة في G
$\Leftarrow$ $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ مشوه لنقطة في G

الشكل الثالث لنظرية كوشي
إذا كان f تحليلي في G و Γ_2 و Γ_1

AL MARJI

والآن ثابتة عن G متكافئة

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

ملاحظة: إذاً الأشكال الثلاثة للنظرية تكون متكافئة

النظرية الأساسية المشروطة

نظرية كوشي المشروطة

ملاحظة: إذا كانت f معرفة على منطقة G وكان γ مضلع مغلق في G و $\int_\gamma f \neq 0$ فذلك $\gamma \nsim 0$ في G

الجواب: لو كان $\gamma \sim 0$ لكان $\int_\gamma f = 0$ أي خطأ على G إذاً $\gamma \nsim 0$ في G

تمرين: اثبت أن $C^+(0,1)$ غير مشوه للصفر في $\mathbb{C}^*$

الحل: $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي في $\mathbb{C}^*$ و $C^+(0,1) \subset \mathbb{C}^*$ فلو فرضنا جدلاً أن $C^+(0,1) \sim 0$ في $\mathbb{C}^*$ لأدى أن يكون $\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 0$ وهذا تناقض كون $\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$ وبالتالي $C^+(0,1)$ ليس مشوه للصفر في $\mathbb{C}^*$

ملاحظة: $\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$

تعريف: لتكن G منطقة نقول عن G أنها منطقة بسيطة الترابط (أو بسيطة الترابط) إذا وفقط إذا كان كل مضلع مغلق فيها مشوه للصفر فيها

أمثلة

1- منطقة $\mathbb{C}$ بسيطة الترابط لأن كل المضلعات المغلقة فيها مشوهة للصفر

2- أي منطقة نجمية تكون منطقة بسيطة الترابط والمحدبة أيضاً منطقة بسيطة الترابط ومن أهم المناطق المحدبة بسيطة الترابط هي الأقراص ومنه أي قرص مفتوح هو منطقة بسيطة الترابط

مثال على منطقة ليست بسيطة الترابط

$\mathbb{C}^*$ منطقة ليست بسيطة الترابط لأن $C^+(0,1)$ مضلع مغلق فيها ليس مشوه للصفر وأي حلقة هي منطقة غير بسيطة الترابط

مبرهنة: لتكن G منطقة بسيطة الترابط تكافئ أن $\mathbb{C} \setminus G$ مترابطة في $\mathbb{C}_\infty$

مثل $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_0$ منطقة بسيطة الترابط

Subject:

Date : / /

مبرهنة: إذا كان f تحليلي على منطقة بسيطة الترابط فإن لـ f تابع أصلي في تلك المنطقة

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ منطقة بسيطة الترابط ، $f(z)=\frac{1}{z}$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ فله تابع أصلي على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\mathbb{C}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k ; k\in\mathbb{Z}\}$

$\tan z$ تحليلي على منطقة G ← ويوجد التابع الأصلي $-\log(\cos z)$ ، لا داعي للقيمة المطلقة في $\log|\cos z|$ لأن نقاط التفرع هي $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ وهي غير محتواه في المنطقة G

سؤال: هل $\int \frac{1}{z}dz$ مستقل عن الطريق المسلوك في $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

الجواب: نعم لأن $\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ وله تابع أصلي على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ وبالتالي حسب مبرهنة التكامل مستقل عن الطريق المسلوك

$\int_{-i}^{1+i} \tan z\, dz$

إن لهذا التكامل حسب الأن $\int \tan z$ مستقل عن الطريق المسلوك لأنه مستمر وله تابع أصلي

نتيجة: إذا كان f تحليلي على منطقة بسيطة الترابط فإن التكامل على أي منحني مغلق في تلك المنطقة يكون معدوماً

صيغ كوشي التكاملية العامة

ليكن γ طريق مغلق في $\mathbb{C}$ و f تابع تحليلي على منطقة G و Γ مشوه لصفر في G إن f تحليلي على كل نقطة داخل Γ أو

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{2\pi i}{n!}(n(\Gamma,z_0))f^{(n)}(z_0)$$

حيث $n(\Gamma,z_0)$ عدد اللفات حول z_0

تمرين: هل لـ $\tan z$ تابع أصلي على $\mathbb{C}\setminus D$ حيث

$D=\{z\in\mathbb{R} ; |z|<\frac{\pi}{2}\}$

$\Rightarrow G=\mathbb{C}\setminus\{|z|\geq\frac{\pi}{2}\}$

$\tan z$ تحليلي على G

وهنا نلاحظ انه إذا كان z_0 خارج Γ فإن عدد اللفات Γ حول z_0 تساوي الصفر

وإذا كان z_0 داخل Γ فلدينا حالتان

1- Γ تدور عدد n من المرات وبالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) عندئذ $n(\Gamma, z_0) = n$

2- Γ تدور عدد من المرات وليكن n وبالاتجاه السالب (مع عقارب الساعة) عندئذ $n(\Gamma, z_0) = -n$

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz$ في الحالات الآتية

1- Γ طريق مغلق لا يحوي بداخله أي من i ولا 0

2- Γ طريق مغلق لا يمر من 0 ولا من i يحوي بداخله 0 ولا يحوي i

الحل: 1. التكامل تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ فهو تحليلي على محيط وداخل Γ وحسب الشكل الثاني لكوشي فإن هنا التكامل ينعدم

2- $$\int_{\Gamma_2} \frac{\sin z \, dz}{z^2(z-i)} = \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z-i}}{z^2} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} (1) \left(\frac{\sin z}{z-i}\right)'_{z=0} = \dots$$

لو كانت Γ في هذه الحالة تدور ثلاث مرات بالاتجاه السالب لوجب علينا أن نضرب قيمة التكامل بـ -3

3- ليكن Γ_3 لا يمر من i ولا 0 ولكنه يحوي i ولا يحوي 0

الحل
$$\int_{\Gamma_3} \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-i} dz = 2\pi i(1)\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)\Big|_{z=i}$$

4- ليكن Γ_1 دائرة مركزها i ونصف قطرها r وتحتواه داخل المنحنى Γ ولتكن Γ_2 دائرة مركزها صفر وتحتواه في Γ وغير متقاطعة مع Γ_1 ولتكن Γ_1 و Γ_2 اتجاه موجب وهو نفس اتجاه Γ عندئذ

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$$

حيث ان التكامل تحليلي على المنطقة الواقعة خارج Γ_1 و Γ_2 وداخل Γ وحسب

$$\int_{\Gamma_2} = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)'\Big|_{z=0}, \quad \int_{\Gamma_1} = 2\pi \, sh 1$$

انتهت المحاضرة الحادية والعشرون

Subject:

Date: / /

الدوال الكلية والميرومورفية

النقاط الشاذة لتابع عقدي

تعريف: نقول عن نقطة z_0 إنها شاذة لتابع عقدي f إذا لم يكن f تحليلي عندها ونسميها نظامية أو عادية للتابع f إذا كان f تحليلي عندها

مثال:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}$$

$z_0=0$ نقطة نظامية للتابع f

أما النقطة $z=2i$ هي نقطة شاذة للتابع f لأنه غير تحليلي عندها

والنقطتان الشاذتان الوحيدتان للتابع f هما $\{+2i, -2i\}$

تعريف: إن النقطة الشاذة للتابع إما أن تكون معزولة أو غير معزولة وتكون z_0 نقطة شاذة معزولة للتابع f إذا وجد لها جوار (قرص مركزه z_0 ومفتوح) لا يحوي أي نقطة شاذة للتابع f غيرها وهذا يكافئ وجود $R>0$ بحيث يكون f تحليلي على الحلقة

$$D(z_0,R)\setminus\{z_0\}=ann(z_0,0,R)$$

- إن النقطتان $\{2i,-2i\}$ شاذتان إذاً معزولتان للتابع حيث $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$

$D(2i,1)$ جوار لـ $2i$ لا يحوي نقاط شاذة لـ f غيرها

وكذلك $D(-2i,1)$ جوار لـ $-2i$ لا يحوي نقاط شاذة لـ f غيرها

تعريف: نقول عن النقطة z_0 نقطة شاذة غير معزولة إذا حوى كل جوار لها نقطة شاذة غيرها

بشكل عام: إذا كانت مجموعة النقاط الشاذة لتابع منتهية فإن جميع هذه النقاط معزولة

وبشكل خاص: جميع النقاط الشاذة لتابع كسري (كثير حدود على كثير حدود) هي نقاط معزولة

سؤال: هل كل تابع له عدد غير منتهي من النقاط الشاذة تكون غير معزولة

الجواب: لا قد يكون للتابع عدد غير منتهي من النقاط الشاذة وتكون جميعها معزولة

مثال: $f(z)=\tan z$

إن مجموعة النقاط المعزولة هي

$$\sigma=\{z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k \ ; \ k\in\mathbb{Z}\}$$

وجميع هذه النقاط معزولة

لأن $D(z_k, \frac{\pi}{2})$ لا يحوي نقاطاً شاذة لـ f غير z_k لأن أصغر بعد بين نقطتين شاذتين هو π

مثال: إن مجموعة النقاط الشاذة للفرع الرئيسي لتابع اللوغاريتم هي نقاط $\mathbb{R}^{-} \cup 0$ وهي نقاط شاذة غير معزولة وهي غير معدودة.

مثال: عين النقاط الشاذة للتابع

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

ثم بين نوع كل منها إذا كانت معزولة أو غير معزولة

الحل: النقطة الشاذة لـ $\frac{1}{z}$ هي صفر ومجموعة النقاط الشاذة للتابع

$$\sin\frac{1}{z}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}=\pi k \; ; \; k\in\mathbb{Z}^*$$

ومجموعة النقاط الشاذة هي

$$\left\{0, \frac{1}{\pi k} \; ; \; k\in\mathbb{Z}^*\right\}$$

وجميع هذه النقاط معزولة لأن البعد بين أي نقطتين أكبر من الصفر ما عدا النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة غير معزولة لأن أي جوار للصفر يحوي نقاطاً شاذة غير معدودة لأن

$$\frac{1}{\pi k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

مبرهنة لوران (أو لورانت)

(نشر حالة لوران)

إذا كان f تحليلي في الحلقة $ann(z_0,R_1,R_2)$
$=\{z_0\in\mathbb{C} \; ; \; R_1<|z_0|<R_2\}$
فإن f قابل للنشر وفق لورانت في الحلقة

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\forall z\in ann(z_0,R_1,R_2)$$

حيث أن a_n تعطى بالعلاقة

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \; ; \; n=0,1,2,\dots$$

حيث r عدد حقيقي يحقق $R_1<r<R_2$

ملاحظات: 1- إن نشر لورانت لتابع في حلقة وحيد

2- إذا كان f تابع تحليلي على $D(z_0,R)$ فهو قابل للنشر وفق تايلور وبالتالي هو تحليلي في أي حلقة في القرص، فإن نشر لورانت لـ f في أي حلقة من الشكل $ann(z_0,r,R) \; ; \; r<R$

سيكون مطابق لنشر تايلور لـ f في تلك الحلقة

ملاحظة: النشر في حلقة لقوى z أي النشر وفق مركز الحلقة

تمرين: انشر التابع $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2)}$ في الحلقة

$$1<|z|<2$$

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z-2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{i-2}\ ,\ B=\frac{-1}{i-2}$$

$$f(z)=\frac{1}{i-2}\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z-2}\right]$$

$\frac{1}{z-2}$ تحليلي في $D(0,2)$ فهو تحليلي في الحلقة

$$\Rightarrow \frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

بشرط $\left|\frac{z}{2}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$\frac{1}{z-i}$ لن يكون تحليلي على قرص يحوي الحلقة للاانهاية

$$\frac{1}{z-i}=\begin{cases}\frac{1}{-i}\,\frac{1}{1-\frac{z}{i}} \Rightarrow \left|\frac{z}{i}\right|=|z|<1 & \text{غير محتواة في الحلقة مرفوض}\\[2mm] \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}} \Rightarrow \left|\frac{i}{z}\right|=\left|\frac{1}{z}\right|<1 & \text{مقبول}\end{cases}$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

وهذا النشر صحيح عندما $1<|z|$

وبما أن z من الحلقة $1<|z|<2$

وبالتالي النشر صحيح في الحلقة

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{i-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$$

ملاحظة: إن نشر تابع في جوار ∞ هو تعريفاً نشر هذا التابع في حلقة مركزها الصفر ونصف قطرها الخارجي هو ∞

خارج أي قرص مركزه الصفر هو جوار ∞

لكن يمكن كتابته كنشر تايلور أي نشر تابع f المعطى في المثال في قرص $D(0,1)$ ولكن هذا القرص السابق في جوار ∞ أي في

كحلقة $ann(0, 2, \infty)$

من أجل النقاط الشاذة

ونوجد نشر في جوار يمكن النشر فيه

الحل:

التوضيح للبرهنة

$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ $\frac{-1}{2}$ لن يكون صحيح في هذه الحالة أي أصبح z بـ ال 2 ويصبح النشر $\frac{2}{z}$

في نطاق الحدود كلها سالبة

إذا كانت z_0 شاذة منعزلة عن f تحليلي على حلقة من الشكل

$ann(z_0, 0, R)$

حسب مبرهنة لوران يمكن نشر f في الحلقة السابقة ويكون النشر معطى بالمعادلة التالية

الجزء الرئيسي أو القطبي

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}$$

$$+ a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

الجزء التحليلي أو الصحيح للنشر

$\forall z \in ann(z_0, 0, R)$

يسمى الجزء الرئيسي القطبي لنشر f وفق لوران في جوار z_0

ويسمى العدد المركب a_{-1} براسب

الدالة f ونرمز له $Res(f, z_0)$

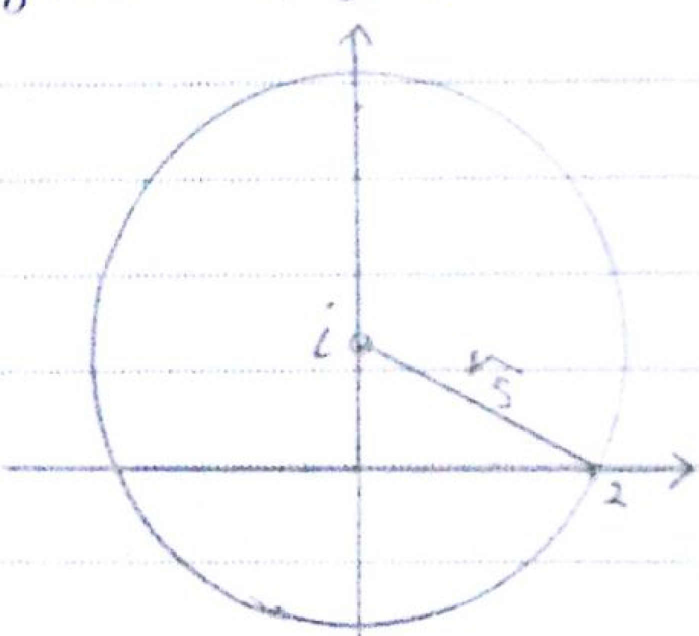
مثال: أنشر الدالة $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)}$ في جوار $z = i$

الحل: إن f تحليلي في الحلقة

$0 < |z - i| < \sqrt{5}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{i-2}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-2}\right)$

$z \in ann(i, 0, \sqrt{5})$



$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i)+(i-2)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{i-2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{i-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{i-2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}} (z-i)^n$$

Date : / /

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{i-2}}}_{a_{-1}} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{(i-1)^2}$$

$$+ \frac{1}{(z-2)} (z-i) + \cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(R, i) = \frac{1}{i-2}$$

مبرهنة الرواسب غير مطلوبة بالامتحان

انتهت المحاضرة الثانية والعشرين

وانتهى المقرر