عرفنا القياس على مجموعة مجردة X ، ثم أخذنا بشكل خاص R = X مجموعة الأعداد الحقيقية ، ودرسنا قياس ليبيغ عليها .

أما في الفصل الرابع فندرس التوابع المقيسة ، واقتصرنا على التوابع ذات القيم الحقيقية المعرفة على مجموعة جزئية من R ، ونعرض خواصها وامكانية تقريبها بواسطة توابع معروفة الخواص (مثلا : توابع مستمرة - كثيرات حدود ... الخ) .

وفي الفصل الخامس ندرس تكامل ليبيغ ، ذلك المفهوم الجديد للتكامل والذى حل مشاكل عدة عجز تكامل ريمان عن حلها - حيث أن تكامل ليبيغ يعتبر تعميما لتكامل ريمان ولكن بشكل مختلف عما ورد في الفصل الثاني - ثم ندرس خواصه ، ابتداء من تكامل تابع مقيس ومحدود على مجموعة E مقيسة حسب ليبيغ وقياسها محدود مرورا بتكامل تابع غير سالب لنصل لتكامل تابع كيفي (غير محدود) ، وقد اعتمدنا التعريف الكلاسيكي لتكامل ليبيغ ، ذلك أن مواضيع الكتاب بمجملها تعتبر من التحليل الكلاسيكي .

أخيرا آمل أن أكون قد وفقت في وضع مرجع جديد بين يدى طلاب العلم .

والله ولي التوفيق ...

المؤلف

د. إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث

)■(الفصـل الأول)■(

التوابع ذات التغيرات المحدودة

نتناول في هذا الفصل نوعا هاما وواسعا من التوابع ، يلزم في الكثير من أقسام التحليل الرياضي ، انه صف التوابع ذات التغيرات المحدودة . وقبل البدء بدراسة التوابع ذات التغيرات المحدودة لابد من تعريف التجزئة لمجال $[a,b]$ ، حيث نستخدم هذا المفهوم كثيرا ، وذكر بعض خواصه .

ليكن المجال $[a,b]$ حيث $a < b$ عندئذ كل مجموعة $P[a,b]$:

$$P[a,b] := \{x_o, x_1, \dots, x_n : x_i \in [a,b],\ i = 0,2,\dots,n,$$
$$a = x_o < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

نسميها تجزئة للمجال $[a,b]$ ، وللاختصار سنكتب :

$$P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$$

أو P فقط .

كما نلاحظ فان التجزئة ليست وحيدة ، لذا سنرمز بـ $\mathbb{P}[a,b]$ لأسرة كل تجزئات المجال $[a,b]$.

نظيم التجزئة P ونرمز له بـ $\lambda(P)$ هو العدد :

$$\lambda(P) := \max_k (x_k - x_{k-1})$$

نقول ان التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$ أدق (أقوى) من التجزئة $P' = \{a = y_o, y_1, \dots, y_m = b\}$ اذا كان $P \supset P'$. في هذه الحالة نقول أيضا ان التجزئة P' أخشن (أضعف) من التجزئة P .

اذا كانت التجزئة P أدق من التجزئة P' فان $\lambda(P) \le \lambda(P')$.

١ـ١ تعاريف ومفاهيم أساسية :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ، حيث $a < b$ ، ولتكن :

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

تجزئة لهذا المجال . ولنشكل المجموع $V(f,p)$:

$$V(f,P) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

كل تجزئة للمجال $[a,b]$ يقابلها مجموع من هذا الشكل وبالتالي لدينا أسرة من المجاميع .

١ـ١ـ١ تعريف :

نقول عن التابع $f(x)$ انه ذو تغيرات محدودة (ذ ت م) على المجال $[a,b]$ اذا كانت المجموعة $\{V(f,p) : P \in \mathbb{P}[a,b]\}$ محدودة ، أي يوجد عدد ثابت موجب M بحيث يكون :

$$V(f,P) \leq M \quad ; \quad \forall P \in \mathbb{P}[a,b] .$$

عندئذ نسمي الحد الأعلى لهذه المجموعة بالتغير الكلي للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز له بالرمز $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. اذن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P)$$

أما اذا كانت المجموعة $\{V(f,p) : P \in \mathbb{P}[a,b]\}$ غير محدود فنقول: ان التابع $f(x)$ ليس ذا تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ، وفي هذه الحالة يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := \infty$$

١-١-٢ ملاحظة :

آ - اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فينتج من التعريف السابق أن :

$$V(f,P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad \forall P \in \mathbb{P}[a,b]$$

ومن أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة P' للمجال $[a,b]$ بحيث يكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < V(f,P') + \varepsilon \; .$$

ب - عندما يكون التابع معرفا على مجال غير محدود ، مثلا $[a, +\infty)$ ، فيكون $f(x)$ ذ ت م على هذا المجال اذا كان ذ ت م على كل مجال محدود $[a,A]$ ويوجد عدد ثابت K (لايتعلق بـ A) بحيث يكون :

$$\overset{A}{\underset{a}{V}}(f) \leq K$$

وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي :

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) := \sup_{A>a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{A\to\infty} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f)$$

وهكذا من أجل المجالات غير المحدودة $(-\infty, b]$ و $(-\infty, +\infty)$.

جـ - اذا كان $a > b$ فنضع :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := -\overset{a}{\underset{b}{V}}(f)$$

١-١-٣ ملاحظة :

في التعاريف السابقة لم نذكر أية خواص للتابع $f(x)$ (كأن يكون مستمرا حيث يمكن لتابع مستمر أن يكون ليس ذ ت م - كما سنرى) .

١-١-٤ مثال على تابع ذ ت م :

ليكن التابع : $f(x) = x^2+1$ المعرف على المجال $[1,5]$ ، ولتكن التجزئة:

$$P = \{1 = x_o, x_1, \ldots, x_n = 5\}$$

فيكون لدينا :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |[x_k^2+1] - [x_{k-1}^2 + 1]| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) = x_n^2 - x_o^2 = 25 - 1 = 24 \text{ .}$$

وبما أن التجزئة p كانت اختيارية ، فالمجموع $V(f,p)$ يكون محدودا من أجل أية تجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$. وبالتالي فان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[1,5]$ ويكون تغيره الكلي :

$$\overset{5}{\underset{1}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) = 24$$

هنا التابع $f(x)$ يكون مستمرا وذو تغيرات محدودة .

<u>١-٥ مثال</u> : على تابع ليس ذ ت م :

ليكن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad ; \quad x \neq 0$$

ومعلوم أن هذا التابع مستمر على المجال $[0,1]$ وسنبرهن الآن أنه ليس ذ ت م.

لنأخذ التجزئة : $P_n := \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ للمجال $[0,1]$

فنجد بعد الحساب أن :

$$V(f,P_n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} := v_n$$

وبما أن v_n لايمكن أن يكون محدودا من أجل كل n (حيث أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة) . فنجد أن :

$$\overset{1}{\underset{o}{V}}(f) = +\infty$$

بالمقابل يوجد توابع غير مستمرة لكنها ذ ت م انظر (١ ـ ٢ ـ ٥) و(١ـ٣ـ٨) .

سنذكر الآن بعض الحقائق التي ستلزمنا فيما بعد .

١ـ١ـ٦ ملاحظة :

لتكن P و P' تجزئتان للمجال $[a,b]$ بحيث أن P' أدق من P عندئذ يكون :

$$V(f,P) \leq V(f,P')$$

وبعبارة أخرى : عند اضافة نقاط جديدة للتجزئة P ، فلن يصغر المجموع $V(f,P)$ لأنه في الحقيقة لو أخذنا :

$$P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b\}$$

$$P' = \{a = x_o, x_1, \dots, x_{i-1}, x', x_i, \dots, x_n = b\}$$

فيكون :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f(x_o)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots$$

$$+ |f(x') - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x')| + \dots +$$

$$+ |f(x_n) - f(x_{n-1})| = V(f,P')$$

١ـ١ـ٧ ملاحظة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a\ ,\ b]$ فيكون أيضا ذ ت م على كل مجال $[a',b'] \subset [a,b]$ ، ويكون :

$$\overset{b'}{\underset{a'}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

وهذا ينتج مباشرة من التعريف والملاحظة (١ـ١ـ٦) .

١ـ٢ خواص التوابع ذات التغيرات المحدودة :

نستعرض فيما يلي أهم خواص التوابع ذات التغيرات المحدودة .

١-٢-١ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون محدودا على هذا المجال .

* البرهان : لتكن $P = \{a,x,b\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث $a < x < b$ ، فيكون :

$$V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) .$$

لدينا الآن :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| .$$

لنضع $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| := A$ فنجد :

$$|f(x)| \leq A \quad ; \quad x \in [a,b]$$

الذي يعني أن التابع $f(x)$ محدود على المجال $[a,b]$.

١-٢-٢ ملاحظة :

ان عكس المبرهنة (١-٢-١) غير صحيح في الحالة العامة ، فمثلا التابع $f(x)$ الوارد في المثال (١-١-٥) محدود على المجال $[0,1]$ لكنه ليس ذ ت م على هذا المجال ، كما رأينا .

١-٢-٣ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كل من $|f(x)|$ و $\alpha f(x)$ (حيث α عدد ثابت) و $\frac{1}{f(x)}$ (بشرط $f(x) \neq 0$ مهما يكن $x \in [a,b]$) أيضا ذ ت م على المجال $[a,b]$.

* البرهان : من أجل أية تجزئة $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ لـ P نجد :

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \Big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

الذى نستنتج منه أن $|f(x)|$ ذ ت م على $[a,b]$ ، بنفس الوقت يكـــــون

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

لدينا :

$$V(\alpha f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})\right| =$$

$$= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \leq |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

الذى نستنتج منه أن $\alpha f(x)$ ذ ت م على $[a,b]$ ويكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f) \leq |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

لنفرض الآن أن $|f(x)| \geq c > 0$ من أجل كل $x \in [a,b]$ فيكون لدينا :

$$V(\frac{1}{f},p) = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{f(x_{k-1})-f(x_k)}{f(x_k)\ f(x_{k-1})}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| \leq \frac{1}{c^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

ومنه نبتنتج أن $\frac{1}{f(x)}$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ويكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{C^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

١-٢-٤ مبرهنة :

اذا كان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كـــل

من $f(x) \mp g(x)$ و $f(x) \cdot g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ (حيث $g(x) \neq 0$ مهما يكن $x \in [a,b]$) أيضا ذ ت م على $[a,b]$.

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$

نجد مايلي :

$$V(f \mp g,p) = \sum_{k=1}^{n} \left|[f(x_k) \mp g(x_k)] - [f(x_{k-1}) \mp g(x_{k-1})]\right| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|[f(x_k)-f(x_{k-1})] \mp [g(x_k) - g(x_{k-1})]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k) - g(x_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) + \overset{b}{\underset{a}{V}} (g)$$

من هذا نستنتج أن $f(x) \mp g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، ويكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \mp g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) + \overset{b}{\underset{a}{V}} (g) .$$

لبرهان أن $f(x)\ g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ نلاحظ أولا أنه حسب المبرهنة (١-٢-١) يوجد عددان A و $B \geq 0$ بحيث يكون :

$$|f(x)| \leq A \quad , \quad |g(x)| \leq B \quad ; \quad x \in [a,b] .$$

لدينا الآن :

$$V(fg,p) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k)\ g(x_k) - f(x_{k-1})\ g(x_{k-1}) \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] + g(x_{k-1})[f(x_k)-f(x_{k-1})] \right| \leq$$

$$A \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k) - g(x_{k-1}) \right| + B \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \leq$$

$$A \overset{b}{\underset{a}{V}} (g) + B \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) .$$

ونستنتج من هذا أن $f(x)g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ويكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg) \leq A \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + B \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) .$$

حسب المبرهنة (١-٢-٣) فان $\frac{1}{g(x)}$ ذ ت م على $[a,b]$ وبما أن :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

فيكون حسب ماسبق $\frac{f(x)}{g(x)}$ ذ ت م على المجال $[a,b]$.

١-٢-٥ نتيجة :

اذا كان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كذلك كل من :
$f^2(x)$, $f^3(x)$,..., $f^n(x)$ (حيث $n \geq 2$) . ينتج هذا مباشرة من :

$$f^2(x) = f(x) \cdot f(x) \;,\; f^3(x) = f(x) \;.\; f^2(x), \ldots\ldots$$

وعندما $f(x) \neq 0$ من أجل أى $x \in [a,b]$ فيكون أيضا $f^{-2}(x)$, $f^{-3}(x)$, ...,
ذ ت م على المجال $[a,b]$.

١-٢-٦ مبرهنة :

لتكن $a < c < b$. اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكـون أيضا ذ ت م على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ ، والعكس صحيح أيضا ، كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

■ البرهان : نفرض أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. عندئذ حسب الملاحظة (١-١-٧) يكون $f(x)$ ذ ت م على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$.
لتكن $P_1 = \{a = y_0, y_1, \ldots, y_m = c\}$ و $P_2 = \{c = z_0, z_1, \ldots, z_n = b\}$ تجزئتان للمجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب فيكون :

$$V(f,p_1) = \sum_{k=1}^{m} \left| f(y_k) - f(y_{k-1}) \right|$$

$$V(f,P_2) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(z_i) - f(z_{i-1}) \right|$$

هنا نلاحظ أن $P: = P_1 \cup P_2$ عبارة عن تجزئة للمجال $[a,b]$ ومن أجلهـا يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2) \;.$$

(من هذه العلاقة نستنتج أيضا أن $f(x)$ ذ ت م على كل من $[a,c]$ و $[c,b]$)

وبالتالي فان :

$$(1) \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) .$$

نفرض الآن أن $f(x)$ ذ ت م على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$.

لتكن P تجزئة ما للمجال $[a,b]$ ، اذا كان $c \notin P$ فنأخذ تجزئة P' أدق من P حيث $P' = P \cup \{c\}$ فنجد حسب الملاحظة (١-١-٦) أن :

$$V(f,P) \leq V(f,P') .$$

لنقسم التجزئة P' الى قسمين :

الأول يشكل تجزئة للمجال $[a,c]$ ونرمز له بـ P'_1 .

والثاني يشكل تجزئة للمجال $[c,b]$ ونرمز له بـ P'_2 .

فيكون :

$$V(f,P) \leq V(f,P') = V(f,P'_1) + V(f,P'_2) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

من هذا نستنتج أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، كما أن :

$$(2) \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

من (1) و (2) نحصل على المساواة المطلوبة .

<u>١-٢-٧ نتيجة :</u>

اذا كان $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$ وكان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كذلك ذ ت م على كل من المجالات :

$$[a,c_1] \; , \; [c_1,c_2], \ldots, [c_m,b]$$

وبالعكس ، كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}}(f) + \ldots + \overset{b}{\underset{c_m}{V}}(f)$$

ويتم اثبات هذا بشكل مشابه للبرهان السابق .

٢.١ اختبارات :

نتعرف الآن على بعض الاختبارات التي تبين لنا متى يكون تابع $f(x)$ ذ ت م وذلك دون اللجوء الى التعريف ، حيث يكون هذا صعبا في بعض الأحيان . وفي النهاية نتعرف الى نوع جديد من التوابع ، هي تلك التي تحقق مايسمى شرط ليبشتز .

١.٢.١ تعريف :

نقول عن التابع $f(x)$ انه يحقق شرط ليبشتز (بالثابتة $L > 0$) على المجال $[a,b]$ اذا كان :

$$|f(x') - f(x'')| \leq L\,|x' - x''| \quad ; \quad x' , x'' \in [a,b]$$

هذا يقودنا للمبرهنة التالية :

٢.٢.١ مبرهنة :

اذا حقق التابع $f(x)$ شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ فيكون ذ ت م على هذا المجال .

▪ البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ يكون:

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} L|x_k - x_{k-1}| = L\,(b - a)$$

وهذا يعني أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. ويكون أيضا :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) \leq L\,(b-a)$$

٣.٢.١ نتيجة :

اذا كان للتابع $f(x)$ مشتق محدود على المجال $[a,b]$ فيكون ذ ت م على هذا المجال . لأنه في الحقيقة توجد ثابتة $0 < K$ بحيث يكون :

$$|f'(x)| \leq K \quad ; \quad x \in [a,b] .$$

من أجل $b \le x' < x'' \le a$ وبحسب دستور التزايدات المحدودة توجد نقطة مناسبة $\xi \in (x'', x')$ بحيث يكون :

$f(x') - f(x'') = f'(\xi).(x' - x'')$ وبالتالي من أجل أي x' و $x'' \in [a,b]$ نجد :

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)||x' - x''| \le K \; |x' - x''|$$

وهذا يعني أن $f(x)$ يحقق شرط ليبشتز بالثابتة K على المجال $[a,b]$.

وحسب المبرهنة (١-٣-٢) فان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$.

١-٣-٤ ملاحظة :

تبقى النتيجة (١-٣-٣) صحيحة حتى لو كان المشتق $f'(x)$ غير موجود في عدد محدود من نقاط المجال $[a,b]$. وفي حالة كهذه يمكن الاستفادة أيضا من النتيجة (١-٢-٧) .

من الأمثلة البسيطة على التوابع ذ ت م التوابع المطردة (أي اما متزايدة دوما أو متناقصة دوما) . وهذا تبينه المبرهنة التالية : .

١-٣-٥ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مطردا على المجال $[a,b]$ فيكون ذ ت م . كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1 , \dots , x_n = b\}$ يكون:

(لماذا ؟ برر)

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\right| =$$

$$\left|f(x_n) - f(x_o)\right| = \left|f(b) - f(a)\right| .$$

ومنه نجد أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ وبنفس الوقت يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) = |f(b) - f(a)|$$

١-٣-٦ ملاحظة :

عندما يكون التابع المطرد $f(x)$ معرفاً على مجال غير محدود من قبيل $[a, \infty)$ مثلا ، فمن أجل أي مجال جزئي $[a,A] \subset [a, \infty)$ يكون حسب الملاحظة (١-١-٢) والمبرهنة (١-٣-٥) :

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} |f(A) - f(a)| = |f(\infty) - f(a)|$$

حيث : $f(\infty) := \lim\limits_{A\to\infty} f(A)$

• المبرهنة التالية تعطينا حالة أعم من المبرهنة (١-٣-٥) .

هامة

١-٣-٧ مبرهنة :

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,b]$ • اذا أمكن تجزئة هذا المجال إلى مجالات جزئية $[a,c_1],[c_1,c_2],\dots,[c_m,b]$ بحيث يكون $f(x)$ مطردا على كل منها ، فيكون $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(c_1) - f(a)| + |f(c_2) - f(c_1)| + \dots + |f(b) - f(c_m)|$$

■ البرهان : لنضع $a := c_0$ و $b := c_{m+1}$ •

بما أن $f(x)$ مطرد على كل مجال جزئي $[c_k, c_{k+1}]$ حيث $k = 0,1,2,\dots,m$

فيكون $f(x)$ ذ ت م على هذا المجال كما رأينا في المبرهنة (١-٣-٥) ويكون :

$$\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) = |f(c_{k+1}) - f(c_k)| \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots,m$$

وحسب النتيجة (١-٢-٧) فان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}}(f) + \dots + \overset{b}{\underset{c_m}{V}}(f)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

نتساءل الآن ، ماذا لو أخذ التابع $f(x)$ قيما ثابتة داخل المجالات الجزئية الواردة في المبرهنة (١-٣-٧) . والجواب يأتي في المبرهنة التالية ، حيث سنرمز كالعادة بـ $f(c+0)$ و $f(c-0)$ للقيم التابع $f(x)$ على يمين ويسار النقطة $x = c$ على الترتيب ، وهي معرفة بالشكل :

$$f(c+0) = \lim_{x \to c+0} f(x) := \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$$

$$f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x) := \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$$

ومعلوم أنه اذا كان $f(c-0) = f(c)$ فيكون $f(x)$ مستمرا من اليسار في النقطة $x = c$ ، وان كان $f(c+0) = f(c)$ فان $f(x)$ مستمر من اليمين في $x = c$. (وبالتالي يكون التابع $f(x)$ مستمرا في $x = c$ عندما تتساوى القيم الثلاث السابقة) .

<u>١-٣-٨ مبرهنة :</u>

اذا كانت $c_1, c_2, \ldots, c_m$ نقاط انقطاع من النوع الأول للتابع $f(x)$ المعرف على المجال $[a,b]$ ، حيث $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$ وكان $f(x)$ يأخذ قيما ثابتة على المجالات $(a,c_1), (c_1,c_2), \ldots, (c_m,b)$ فيكون $f(x)$ د ت م على المجال $[a,b]$ ، كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(a+0) - f(a)| + \sum_{i=1}^{m} [|f(c_i) - f(c_i - 0)| + |f(c_i + 0) - f(c_i)|] + |f(b) - f(b-0)|$$

■ البرهان : لنضع $a = c_0$ و $b = c_{m+1}$ ، عندئذ من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ وتحتوي النقاط c_i ، حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, m+1$ ، وبحيث يكون :

$$c_{k-1} < x_{k-1} < x_k < c_k \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,m+1$$

فان

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = 0 \;,\; k = 1,2,\ldots,m$$

وبالتالي عند حساب المجموع $V(f,P)$ تنعدم كل الحدود ماعدا تلك الموافقة لقيم التابع $f(x)$ في النقاط c_1 وعلى يسارها ويمينها . ومنه نحصل على العلاقة المطلوبة .

لدينا أيضا الاختبار التالي :

1-2-9 مبرهنة :

اذا أمكن كتابة التابع $f(x)$ بالشكل :

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt \qquad , \qquad x \in [a,b] \;,$$

بحيث أن $\int_a^b |\varphi(t)|\,dt$ موجود ومحدود . عندئذ يكون $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. كما أن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ يكون :

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\varphi(t)|\,dt = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

ومنه نجد أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. ويكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

ونقبل بدون برهان صحة العلاقة :

$$(2) \qquad \int_a^b |\varphi(t)|\, dt \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

من (1) و (2) نحصل على العلاقة المطلوبة .

١-٢-١ نتيجة :

ليكن $f(x)$ تابعا قابلا للاشتقاق على المجال $[a,b]$ - ربما باستثناء عدد محدود من نقاط المجال - وبحيث يكون التكامل $\int_a^b |f'(x)|dx$ موجودا ومحدودا. عندئذ يمكن الكتابة :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

وبالتالي فان : $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ويكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

١-٢-١١- ملاحظة :

عندما يكتب التابع $f(x)$ بالشكل :

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt \quad , \quad x \in [a,b] \quad , \quad (c \text{ ثابت})$$

فان العلاقة :

$$(*) \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

تعطي التغير الكلي للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ سواء كان $f(x)$ ذ ت م أم لم يكن . في الحالة الثانية يكون طبعا :

$$\int_a^b |\varphi(t)|\, dt = \infty$$

هنا تجدر الملاحظة أن حساب $\int_a^b \varphi(t)dt$ لايكفي (انظر تمارين محلولة ص٦).

تبقى العلاقة (*) صحيحة أيضا حتى لو كان المجال $[a,b]$ غير محدود وللحالتين (أي اذا كان $f(x)$ ذ ت م أم لا) . والتكامل في العلاقة (*) قد يكون عاديـــا أو معتلا - وفي هذه الحالة ندرس تقاربه - .

٤-١ تابع التغير - اختبارات اضافية :

في البداية سنشكل تابعا جديدا معرفا بواسطة التابع $f(x)$ حيث سيلزم في الفقرات اللاحقة .

ليكن $f(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، ولنضع :

$$v_f(a) := 0$$

$$v_f(y) := \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad a < y \leq b$$

نسمي $v_f(y)$ تابع التغير للتابع $f(x)$ (وهو يمثل التغير الكلي للتابع $f(x)$ على المجال $[a,y]$) وله الخواص التالية :

١ - محدود على المجال $[a,b]$ ، ذلك لأن :

$$|v_f(y)| = |\overset{y}{\underset{a}{V}}(f)| = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad \forall\, y \in [a,b]$$

٢ - متزايد : لأنه من أجل $a \leq y' \leq y'' \leq b$ يكون :

$$v_f(y') = \overset{y'}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{y''}{\underset{a}{V}}(f) = v_f(y'')$$

٣ - ذو تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ، لأنه متزايد على هذا المجال .

كما أن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(v_f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ وهذا ينتج مباشرة من حساب المجموع $V(v_f, P)$.

٤ ـ استمراره على المجال $[a,b]$ تبينه المبرهنة التالية .

١ـ٢ـ١ مبرهنة :

اذا كان $f(x)$ مستمرا في النقطة $x = c$ (حيث $a < c < b$) فيكــــون $v_f(y)$ مستمرا في النقطة $y = c$ ، والعكس صحيح أيضا .

■ البرهان : من الملاحظة (١ـ١ـ٧) نجد أن التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,c]$ ، وحسب الملاحظــــة (١ ـ ١ ـ ٢) فانه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة مناسبة $P = \{a = x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n = c\}$ للمجال $[a,c]$ بحيــث يكون :

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) < V(f,P) + \varepsilon$$

لنأخذ تجزئة أخرى للمجال $[a,c]$ أدق من P ولتكن :

$$P' = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x', x_n = c\}$$

فنجد من الملاحظة (١ـ١ـ٦) أن $V(f,P) \le V(f,P')$ ، حيث :

$$V(f,P') = \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x') - f(x_{n-1})| + |f(c) - f(x')| \; .$$

وبملاحظة أن الطرف الأيمن بدون الحد الأخير يمثل مجموعا موافقا للتجزئة $\dot{P}$:

$$\dot{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x'\}$$

للمجال $[a,x']$ يمكن أن نكتب :

$$V(f,P') = V(f,\dot{P}) + |f(c) - f(x')| \le \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) + |f(c) - f(x')| =$$
$$= v_f(x') + |f(c) - f(x')|$$

لدينا الآن :

$$v_f(c) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) < V(f,P) + \varepsilon \le V(f,P') + \varepsilon \le$$
$$\le v_f(x') + |f(c) - f(x')| + \varepsilon$$

ومنه نجد :

$$v_f(c) - v_f(x') < |f(c) - f(x')| + \varepsilon$$

وعندما $x' \to c-0$ يكون :

$$v_f(c) - v_f(c-0) \leq |f(c) - f(c-0)| + \varepsilon$$

فان كان $f(x)$ مستمرا من اليسار في النقطة $x = c$ ، فيكون كذلك $v_f(y)$ مستمرا من اليسار في النقطة $y = c$. وبشكل مشابه نبرهن أن $v_f(y)$ مستمر من اليمين في النقطة $y = c$ عندما يكون $f(x)$ مستمرا من اليمين في النقطة $x = c$. ولنبرهن الآن على العكس . من أجل $a < y < c < b$ لدينا :

$$|f(c) - f(y)| \leqslant \overset{c}{\underset{y}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) = v_f(c) - v_f(y)$$

عندما $y \to c-0$ فان :

$$|f(c) - f(c-0)| \leq v_f(c) - v_f(c-0)$$

من هذا نستنتج أنه اذا كان $v_f(y)$ مستمرا من اليسار في النقطة $y = c$ فان $f(x)$ يكون مستمرا من اليسار في النقطة $x=c$. وبشكل مشابه نبرهن على الاستمرار من اليمين في النقطة $x = c$.

بعد التعرف على تابع التغير $v_f(y)$ وخواصه يمكننا التعرف على اختبارات اضافية ، متى يكون تابع $f(x)$ ذ ت م على مجال $[a,b]$. واعتبارا من الآن سوف تكتب $v_f(x)$ بدلا من $v_f(y)$.

١-٤-٢- مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي ليكون التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ، هو أن يوجد تابع $F(x)$ متزايد ومحدود على $[a,b]$ ، ويحقق العلاقة :

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant F(x'') - F(x') \quad ; \quad a \leq x' < x'' \leq b$$

■ البرهان : نفرض أن التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ونختار $F(x)$ بالشكل :

$$F(x) := v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \qquad ; \qquad a \leq x \leq b$$

فنجد أن $F(x)$ متزايد ومحدود على المجال $[a,b]$ ، حسب ماورد أعلاه . ومن أجل $a \leq x' < x'' \leq b$ يكون :

$$|f(x'')- f(x')| \leq \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f) = \overset{x''}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) = F(x'') - F(x') \,.$$

نفرض الآن أن التابع $F(x)$ موجود ، ونبرهن أن $f(x)$ ذ ت م على $[a,b]$.

في الواقع من أجل أية تجزئة $P = (a = x_o, x_1, \dots, x_n = b)$ يكون :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] =$$

$$= F(b) - F(a)$$

ومنه نستنتج أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$.

<u>٤-٤-٣ مبرهنة :</u>

الشرط اللازم والكافي ليكون التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ هو أن يكتب بالشكل :

$$(*) \qquad f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

حيث أن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تابعان متزايدان ومحدودان على المجال $[a,b]$.

* البرهان : نفرض أن التابع $f(x)$ ذ ت م ، ولنضع :

$$f_1(x) := v_f(x) \ , \ f_2(x) := v_f(x) - f(x) \ ; \ x \in [a,b]$$

فنجد :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad ; \quad x \in [a,b] \,.$$

ومن أجل $a \leq x' < x'' \leq b$ يكون :

$$f_2(x'')-f_2(x') = [v_f(x'') - v_f(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0 \cdot$$

وبالتالي فان : $f_2(x') \leq f_2(x'')$ الذي يعني أن $f_2(x)$ تابع متزايد،ومعلــــوم سلفا أن $f_1(x)$ تابع متزايد . وحسب الفرضيات فان كلا التابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ محدود على المجال $[a,b]$.

نفرض الآن أن العلاقة (*) صحيحة ونبرهن أن $f(x)$ ذ ت م على المجـــــال $[a,b]$. من أجل $a \leq x' < x'' \leq b$ يكون لدينا في الواقـــــع :

$$|f(x'') - f(x')| \leq \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f) = v_f(x'') - v_f(x') \leq$$

$$\leq [v_f(x'')- v_f(x')] + [f_2(x'') - f_2(x')] =$$

$$= [v_f(x'') + f_2(x'')] - [v_f(x') + f_2(x')]$$

نضع الآن :

$$G(x): = v_f(x) + f_2(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

فنجد أن $G(x)$ تابع متزايد ومحدود على المجال $[a,b]$ ، كما أن :

$$|f(x'') - f(x')| \leq G(x'')- G(x') \quad ; \quad a \leq x' < x'' \leq b \quad \cdot$$

وحسب المبرهنة (١ ـ ٤ ـ ٢) فان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$.

(كان يمكن الملاحظة فورا أن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ لأن كلاً من $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ذ ت م كونهما متزايدان ـ بالفرض ، ولكن البرهان السابق هو أيضـــا تطبيق للمبرهنة "١ـ٤ـ٢") .

__١ـ٤ـ٤ نتيجة :__

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا و ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيمكن كتابتـه بالشكل :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad : \quad x \in [a,b]$$

حيث أن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تابعان مستمران ومتزايدان على المجال $[a,b]$. هنا يمكن أن نأخذ :

$$f_1(x) := \frac{1}{2}\,[v_f(x) + f(x)]$$
$$; \quad x \in [a,b]$$
$$f_2(x) := \frac{1}{2}\,[v_f(x) - f(x)] \,.$$

● من أجل التوابع المستمرة ، وعند حساب التغير الكلي لها على مجال محدود $[a,b]$ حسب التعريف (١-١-١) ، يمكن الحصول على التغير الكلي بحساب نهاية ، كما تبين لنا المبرهنة التالية ، التي تصح سواء كان التابع ذ ت م أم لم يكن .

١-٤-٥ مبرهنة :

ليكن $f(x)$ تابعا مستمرا على المجال المحدود $[a,b]$ ، عندئذ يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{\lambda(P)\to 0} V(f,P)$$

■ البرهان: لنفرض أن $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$.

من المعلوم أنه عند اضافة نقطة جديدة لتجزئة P ، لن يصغر المجموع الموافق لها $V = V(f,P)$ وذلك من الملاحظة (١-١-٦) . هذا من ناحية ،ومن ناحية ثانية فان المجموع V لن يكبر بأكثر من ضعفي تغير التابع $f(x)$ على المجال $[x_{k-1}, x_k]$ عندما تقع النقطة الجديدة في هذا المجال الجزئي .

لنختار الآن عددا A بحيث يكون :

$$(1) \qquad A < \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

ونبحث عن مجموع V^* بحيث يكون :

$$(2) \qquad V^* > A$$

ولنفرض أن المجموع $V^* = V(f,P^*)$ موافق للتجزئة التالية :

$$P^* = \{a = x_o^*,\ x_1^*, \dots, x_m^* = b\}$$

ثم نختار عددا صغيرا $\delta > 0$، بحيث أنه اذا كان $|x'' - x'| < \delta$: فان :

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m}$$

وهذا ممكن ـ طالما أن $f(x)$ مستمر بانتظام على المجال $[a,b]$.

سنبرهن فيما يلي أنه من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ ، حيث $\lambda(P) < \delta$ والمجموع الموافق لها $V = V(f,P)$ فان :

$$(3) \qquad V > A$$

في الواقع اذا كانت P_1 تجزئة من هذا النوع فنشكل تجزئة أخرى P_2 وذلك باضافة كل النقاط $x_o^*, x_1^*, \dots, x_m^*$ الى P_1 أى أن :

$$P_2 = P_1 \cup \{x_o^*, x_1^*, \dots, x_m^*\}$$

وبفرض أن $V_2 = V(f, P_2)$ المجموع الموافق فيكون :

$$(4) \qquad V_2 \geq V^*$$

من ناحية ثانية يمكن الحصول على P_2 من P_1 بالتتالي أي من خلال m مرة، حيث يضاف في كل مرة نقطة واحدة . عندئذ في كل مرة يكبر المجموع الموافق V بمقدار لايتجاوز $\frac{V^* - A}{2m}$ وبالتالي يكون :

$$V_2 - V < \frac{V^* - A}{2}$$

من هذا ومن (4) و (2) ينتج :

$$V > V_2 - \frac{V^* - A}{2} \geq \frac{A + V^*}{2} > A$$

اذن (3) محققة من أجل أية تجزئة P بحيث $\lambda(P) < \delta$

ولكن من المعلوم أن : $V \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

من هذا كله نجد أن : $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0} V = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

٤-٤-٦ ملاحظة :

اضافة لما ورد في المبرهنة (٤-٤-٥) يكون لدينا من أجل التابع المستمر $f(x)$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]$$

حيث أن :

$$m_k(f) = \min_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \quad \text{و} \quad M_k(f) = \max_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$$

(برهن ذلك).

٥-١ تابع القفز :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجال $[a,b]$ ولنفرض أن $x = c$ نقطة انقطاع من النوع الأول لهذا التابع .

اذا كانت $f(c + 0)$ و $f(c-0)$ قيمتي التابع $f(x)$ في يمين ويسار النقطة $x = c$ على الترتيب فنسمي العددين :

$$[f(c + 0) - f(c)] \qquad \text{و} \qquad [f(c) - f(c - 0)]$$

قفزة التابع $f(x)$ في النقطة $x = c$ من اليمين ومن اليسار على الترتيب، كما نسمي مجموعهما $[f(c + 0) - f(c-0)]$ قفزة التابع $f(x)$ في النقطة $x = c$.

من الواضح أن القفزة (من اليمين ـ من اليسار) تكون معدومة عندما يكون $f(x)$ مستمرا (من اليمين ـ من اليسار) في النقطة $x = c$.

فيما يلي سوف ندرس بعض خواص نقاط الانقطاع لتابع متزايد ومن ثم لتابع ذي تغيرات محدودة على مجال $[a,b]$.

٥-١-١ مبرهنة مساعدة :

ليكن $f(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$. عندئذ من أجل أية نقاط داخلية في المجال $[a,b]$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ تصح العلاقة :

$$(1) \qquad [f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] +$$
$$+ [f(b) - f(b - 0)] \le f(b) - f(a)$$

■ البرهان : لنفرض $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

ولنضع : $a = x_0$ و $b = x_{n+1}$.

لتكن الآن النقاط : $y_0, y_1, \dots, y_n$ بحيث أن :

$$x_k < y_k < x_{k+1} \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

فيكون :

$$f(x_k + 0) \leq f(y_k) \;,\; f(y_{k-1}) \leq f(x_k - 0) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,n$$

وبالتالي :

$$f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \leq f(y_k) - f(y_{k-1}) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,n$$

كما أن :

$$f(a + 0) - f(a) \leq f(y_1) - f(a)$$

$$f(b) - f(b - 0) \leq f(b) - f(y_n)$$

وبتجميع هذه المتراجحات مع بعضها نحصل على العلاقة (1) .

١ـ٥ـ٢ ملاحظة :

من الواضح أن العلاقة (1) صحيحة أيضا بدون الحدود غير السالبة .

$$[f(a + 0) - f(a)] \;.\; [f(b) - f(b - 0)]$$

١ـ٥ـ٣ نتيجة :

اذا كان التابع $f(x)$ متزايدا على المجال $[a,b]$ فيكون له عدد محدود من نقاط الانقطاع التي تكون قفزته فيها أكبر من عدد مفروض α . لأنه في الواقع لو كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاط انقطاع للتابع $f(x)$ حيث له في كل منها قفزة اكبر من العدد α فينتج من العلاقة (1) أن :

$$n\,\alpha \leq f(b) - f(a)$$

وبالتالي لابد وأن يكون n عددا محدودا .

١ـ٥ـ٤ مبرهنة :

ليكن $f(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$ ، عندئذ :

آ - مجموعة نقاط انقطاعه تكون على الاكثر قابلة للعد .

ب - اذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots$ جميع نقاط الانقطاع هذه ، فيكون :

$$[f(a+0)-f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] + \tag{2}$$
$$+ [f(b)-f(b-0)] \leq f(b)-f(a)$$

■ البرهان : لنرمز بـ H لمجموعة كل نقاط الانقطاع للتابع $f(x)$ وبـ H_k لمجموعة تلك النقاط منها التي تكون القفزة فيها اكبر من $\frac{1}{k}$. فنجد أن :

$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \ldots$

وبما أن كل H_k مجموعة منتهية - كما رأينا في النتيجة (١ـ٥ـ٣) - فتكـــــون المجموعة H على الاكثر قابلة للعد . أما العلاقة (2) فنحصل عليها مـــــن العلاقة (1) عندما $n \longrightarrow \infty$.

ننتقل الآن لتعريف تابع القفز .

١ـ٥ـ٥ تعريف :

ليكن $f(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$ ، ولنضع :

$$J_f(a) := 0$$

$$J_f(x) := [f(a+0)-f(a)] + \sum_{x_k < x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] +$$
$$+ [f(x)-f(x-0)] \quad ; \quad a < x \leq b$$

نسمي $J_f(x)$ تابع القفز للتابع $f(x)$.

١ـ٥ـ٦ ملاحظة :

من الواضح أن التابع $J_f(x)$ متزايد على المجال $[a,b]$ وبالتالي يكـــون ذ ت م على هذا المجال .

في المبرهنة التالية سوف نبين أن الفرق بين التابع المتزايد $f(x)$ وتابع القفز له $J_f(x)$ عبارة عن تابع مستمر على المجال $[a,b]$.

١ـ٥ـ٢ مبرهنة :

ليكن $f(x)$ تابعا متزايدا على المجال $[a,b]$. عندئذ يكون التابع $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) := f(x) - J_f(x)$$

متزايدا ومستمرا على المجال $[a,b]$.

* البرهان : ليكن $a \le x < y \le b$ ، باستخدام المتراجحة (2) من أجل المجال $[x,y]$ ، نجد :

$$(3) \qquad J_f(y) - J_f(x) \le f(y) - f(x)$$

وبالتالي يكون :

$$f(x) - J_f(x) \le f(y) - J_f(y)$$

أي أن :

$$\varphi(x) \le \varphi(y)$$

الذي يعني أن التابع $\varphi(x)$ متزايد على المجال $[a,b]$.

من المتراجحة (3) نجد عندما $y \to x$ أن :

$$(4) \qquad J_f(x+0) - J_f(x) \le f(x+0) - f(x)$$

ومن تعريف التابع $J_f(x)$ نجد من أجل $y > x$ أن :

$$f(x+0) - f(x) \le J_f(y) - J_f(x)$$

وعندما $y \longrightarrow x$ يكون :

$$(5) \qquad f(x+0) - f(x) \le J_f(x+0) - J_f(x)$$

من (4) و (5) نجد المساواة :

$$f(x+0) - f(x) = J_f(x+0) - J_f(x)$$

ومنها نحصل على :

$$(6)\quad \varphi(x+0) = \varphi(x)$$

وبشكل مشابه نبرهن أن :

$$(7)\quad \varphi(x-0) = \varphi(x)$$

من العلاقتين (6) و (7) نجد أن التابع $\varphi(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$.

١ـ٥ـ٨ ملاحظة :

ليكن $f(x)$ تابعا ذ ت م على المجال $[a,b]$. عندئذ وحسب المبرهنة (١ـ٤ـ٣) يمكن أن نكتب :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

حيث أن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تابعان متزايدان على المجال $[a,b]$.

من هذا نستنتج أن مجموعة نقاط الانقطاع لتابع ذي تغيرات محدودة تكون على الاكثر قابلة للعد .

نفرض الآن أن $x_1, x_2, x_3, \dots$ (حيث $a < x_k < b$) هي كل نقاط الانقطاع على الأقل لأحد التابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ (يمكن البرهان هنا أن كل نقطة انقطاع للتابع $f_2(x)$ هي أيضا نقطة انقطاع للتابع $f_1(x)$) .

بحسب تعريف تابع القفز لدينا الآن مايلي :

$$J_{f_1}(a) = J_{f_2}(a) = 0$$

ومن أجل $a < x \le b$ فان :

$$J_{f_1}(x) = [f_1(a+0) - f_1(a) + \sum_{x_k < x} [f_1(x_k+0) - f_1(x_k-0)] + {} + [f_1(x) - f_1(x-0)]$$

$$J_{f_2}(x) = [f_2(a+0) - f_2(a)] + \sum_{x_k < x} [f_2(x_k+0) - f_2(x_k-0)] + {} + [f_2(x) - f_2(x-0)]$$

ولنضع :

$$J(x) := J_{f_1}(x) - J_{f_2}(x)$$

فنجد أن :

$$J(a) = 0$$

ومن أجل $a < x < b$ يكون :

$$J(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] +$$
$$+ [f(x) - f(x - 0)]$$

ان التابع $J(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ لأن كلا من $J_{f_1}(x)$ و$J_{f_2}(x)$ ذ ت م على هذا المجال .

نسمي $J(x)$ تابع القفز للتابع $f(x)$ ذى التغيرات المحدودة على المجال $[a,b]$.واعتبارا من الآن سوف نرمز له بـ $J_f(x)$ تمشيامع تعريف تابع القفز الوارد في التعريف (١ ـ ٥ ـ ٥) .

اعتمادا على هذا يمكننا استخلاص خاصة جديدة للتوابع ذات التغيرات المحدودة .

١ـ٥ـ٩ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = J_f(x) + \varphi(x)$$

حيث أن $J_f(x)$ تابع القفز و $\varphi(x)$ تابع مستمر وذ ت م على المجال $[a,b]$

* البرهان : حسب المبرهنة (١ـ٤ـ٣) يمكن أن نكتب :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تابعان متزايدان على المجال $[a,b]$ ، وحسب المبرهنة (١ـ٥ـ٧) يكون التابعان $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) - J_{f_1}(x) \quad , \quad \varphi_2(x) = f_2(x) - J_{f_2}(x)$$

مستمران ومتزايدان على المجال $[a,b]$.

نضع الآن :

$$\varphi(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

فنجد أن التابع $\varphi(x)$ مستمروذ ت م على المجال $[a,b]$.

لدينا الآن :

$$\varphi(x) = [f_1(x) - f_2(x)] - [J_{f_1}(x) - J_{f_2}(x)] = f(x) - J_f(x) .$$

وبالتالي فان :

$$f(x) = J_f(x) + \varphi(x)$$

١-٦ التوابع المستمرة مطلقا :

ندرس في هذه الفقرة نوعا خاصا من التوابع ذات التغيرات المحدودة ، انها التوابع المستمرة مطلقا ، التي تشكل جزءا صغيرا من مجموعة التوابع ذات التغيرات المحدودة .

١-٦-١ تعريف :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$. نقول عن $f(x)$ انه مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$ ، اذا كان من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث انه من أجل أية أسرة منتهية $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ من المجالات الجزئية من $[a,b]$ والمنفصلة مثنى مثنى ومجموع أطوالها :

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

فان :

$$(2) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \varepsilon$$

١-٦-٢ ملاحظة :

من الواضح أن كل تابع مستمر مطلقا على مجال $[a,b]$ يكون مستمرا على

على هذا المجال - حسب المفهوم العادى للاستمرار - ولكن العكس غير صحيح بشكل عام ، حيث أن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad ; \quad x \neq 0$$

مستمر على المجال $[0,1]$ لكنه غير مستمر مطلقا (برهن ذلك) .

١-٦-٣ ملاحظة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا مطلقا على المجال $[a,b]$ فيمكن استبدال العلاقة (2) بشرط أقوى هو :

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

وذلك لأنه من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ نختار $\delta > 0$ بحيث تكون العلاقة (1) محققة، من أجل أية أسرة منتهية $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ من المجالات الجزئية من $[a,b]$ والمنفصلة مثنى مثنى فان :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نقسم الآن الاسرة $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ الى قسمين :

الأول نرمز له بـ A ويحوى المجالات (a_k, b_k) التي يكون من أجلها :

$$f(b_k) - f(a_k) \geq 0$$

الثاني نرمز له بـ B ويحوى المجالات المتبقية من الاسرة ، فيصبح لدينا :

$$\sum_{(a_k,b_k)\in A} |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \sum_{(a_k,b_k)\in A} [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وكذلك :

$$\sum_{(a_k,b_k)\in B} |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \sum_{(a_k,b_k)\in B} [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي يكون :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| = \sum_{(a_k,b_k)\in A}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| + $$
$$+ \sum_{(a_k,b_k)\in B}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| < \varepsilon$$

اذن (3) محققة .

لدينا الآن الاختبار التالي :

١ـ٦ـ٤ مبرهنة :

. اذا حقق التابع $f(x)$ شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ فيكون مستمر مطلقا على هذا المجال .

■ البرهان : لدينا هنا :

$$|f(x') - f(x'')| \leq L\ |x' - x''| \quad ; \quad x', x'' \in [a,b]$$

(حيث L ثابتة موجبة) .

من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ نختار $\delta > 0$ بحيث $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$. عندئذ من أجل أية أسرة منتهية $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ من المجالات الجزئية المنفصلة مثنى مثنى و $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$

يكون :

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| \leq L\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \varepsilon$$

١ـ٦ـ٥ نتيجة :

اذا كان للتابع $f(x)$ مشتق مستمر ومحدود على المجال $[a,b]$ فيكون $f(x)$ مستمرا مطلقا على هذا المجال .

ننتقل الآن لدراسة خواص التوابع المستمرة مطلقا .

١-٦-٦ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا مطلقا على المجال $[a,b]$ ، فيكون كل من $|f(x)|$ و $\alpha f(x)$ (حيث α عدد ثابت) و $f^2(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ (بشرط $f(x) \neq 0$ من أجل أي $x \in [a,b]$) أيضا مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$.

▪ البرهان : ليكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ و $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ كما هي في التعريف (١-٦-١) عندئذ نجد من العلاقة :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big| |f(b_k)| - |f(a_k)| \Big| \le \sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$$

أن $|f(x)|$ مستمر مطلقا على $[a,b]$.

من الواضح أن $\alpha f(x)$ مستمر مطلقا أيضا .

لنفرض الآن أن : $|f(x)| \le A$ من أجل كل $x \in [a,b]$ ، عندئذ يكون لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f^2(b_k) - f^2(a_k) \right| \le 2A \sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right|$$

ومنه نستنتج أن $f^2(x)$ مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$.

نفرض الآن $|f(x)| \ge c > 0$ من أجل كل $x \in [a,b]$ ، فنجد :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(b_k)} - \frac{1}{f(a_k)} \right| \le \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right|$$

ومنه نستنتج أن $\frac{1}{f(x)}$ مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$.

١-٦-٧ مبرهنة :

اذا كان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرين مطلقا على المجال $[a,b]$ ، فيكون كذلك كل من $f(x) \mp g(x)$ و $f(x) \cdot g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ (بشرط

$g(x) \neq 0$ من أجل أي $x \in [a,b]$) .

■ البرهان : ليكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ و $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ كما هي في التعريف (١-٦-١) فيكون :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|[f(b_k) \mp g(b_k)] - [f(a_k) \mp g(a_k)]\right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| + \sum_{k=1}^{n}\left| g(b_k) - f(a_k)\right| < 2\,\varepsilon$$

وبالتالي فان $f(x) \mp g(x)$ مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$. من هذا ومن العلاقة :

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{1}{4}\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\}$$

نستنتج أن $f(x)\cdot g(x)$ مستمر مطلقا أيضا ـ حيث استخدمنا المبرهنة (١-٦-٦)-

وبما أن :-

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\ .\ \frac{1}{g(x)}$$

نجد أن $\frac{f(x)}{g(x)}$ مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$.

في المبرهنة التالية نبين أن التوابع المستمرة مطلقا تشكل فعلا مجموعة جزئية من مجموعة التوابع ذات التغيرات المحدودة .

١-٦-٨ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا مطلقا على المجال $[a,b]$ فيكون ذ ت م .

■ البرهان : ليكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ و $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ كما هي في التعريف (١-٦-١)-عندئذ من أجل :

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

يكون لدينا (بفرض $\varepsilon=1$) :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < 1$$

لتكن الآن التجزئة : $P = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ بحيث :

$$x_k - x_{k-1} < \delta \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,N$$

عندئذ من أجل أية تجزئة P_k للمجال $[x_{k-1}, x_k]$ يكون $V(f, P_k) \leq 1$ ، أي أن :

$$\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}} (f) \leq 1 \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,N$$

وبالتالي يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq N$$

أي أن $f(x)$ ذ ت م على $[a,b]$.

٧ـ١ تطبيق : المنحنيات القابلة للتقويم :

نعرف أولا المنحني القابل للتقويم ومن ثم نعطي اختبارا يعتمد على التوابع ذات التغيرات المحدودة .

١٠ـ٧ـ١ تعريف :

ليكن (K) منحن معطى بتمثيل وسيطي :

$$(1) \quad x = \varphi(t) \ , \ y = \Psi(t) \quad ; \quad t \in [\alpha, \beta]$$

حيث أن $\varphi(t)$ و $\Psi(t)$ تابعان مستمران على المجال $[\alpha, \beta]$ ، ولنفرض أن المنحني (K) لايحوى نقاط مضاعفة (مع استثناء بداية ونهاية المنحني عندما يكون مغلقا) .

لتكن $P = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta\}$ تجزئة للمجال $[\alpha, \beta]$ ، عندئذ نقاط هذه التجزئة يقابلها نقاط على المنحني (K) ولنسمها $A_0, A_1, \ldots, A_n$. نصل بين كل نقطتين متتاليتين بقطع مستقيمة فنحصل على خط منكسر طوله $L(P)$ حيث :

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

(من أجل كل تجزئة للمجال $[\alpha, \beta]$ نحصل على خط منكسر موافق).

- العدد s المعرف بالشكل :

$$s := \sup_{P \in P[\alpha, \beta]} L(P)$$

نسميه طول المنحني (K) . فاذا كان s محدودا ، قلنا ان المنحني (K) قابل للتقويم .

١-٧-٢ مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني (K) قابلا للتقويم هو أن يكون كل من التابعين $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ ذ ت م على المجال $[\alpha, \beta]$.

* البرهان : نفرض أن المنحني (K) قابل للتقويم ، عندئذ من أجل أية تجزئة $P = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta\}$ يكون :

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2} \leq s$$

ومن المتراجحة المحققة دوما :

$$|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

نجد بتجميع الطرفين من 1 الى n أن :

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} \left| \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \right| \leq s$$

الذي يعني أن $\varphi(t)$ ذ ت م على المجال $[\alpha, \beta]$. وبشكل مشابه نبرهن أن $\psi(t)$ ذ ت م .

نفرض الآن أن كلا من $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ ذ ت م على المجال $[\alpha, \beta]$.
من أجل أية تجزئة $P = (\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \beta)$ لدينا :

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\right| \leq$$

$$\leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\varphi) + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\psi) .$$

وبالتالي يكون أيضا :

$$s \leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\varphi) + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\psi) .$$

اذن فالمنحني (γ) قابل للتقويم .

تتمات وتمارين محلولة .I

I-١ هل التابع $f(x) = x-x^2$ ذ ت م على كل من المجالات $[0,5]$ و $[1,5]$ $[0,1]$ وماهو تغيره الكلي .

■ الحل : يمكن تطبيق كل الاختبارات الواردة في الفقرتين (١-٣) و(١-٤) على هذا التابع . مثلا نلاحظ أن كلا من التابعين : $f_1(x)= x$ و $f_2(x) = x^2$ متزايد على المجال $[0,1]$ وكذلك على $[1,5]$. كما أن :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

وبالتالي وحسب المبرهنة (١-٤-٣) فان $f(x)$ ذ ت م على كل من المجالين $[0,1]$ و $[1,5]$. وحسب المبرهنة (١-٢-٦) يكون أيضا ذ ت م على $[0,5]$.
وبطريقة أخرى : حسب الملاحظة (١-٣-١١) ومن العلاقة :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$$

يمكن مباشرة معرفة اذا كان التابع ذ ت م أم لا . (حيث المشتق موجود) .
لدينا هنا :

$$f'(x) = 1 - 2x \quad ;$$

وبالتالي :

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^1 |1-2x|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\overset{5}{\underset{1}{V}}(f) = \int_1^5 |1-2\ x|dx = \int_1^5 (2x - 1)\ dx = 20$$

وحسب المبرهنة (١-٢-٦) يكون (وهذا واضح) :

$$\overset{5}{\underset{0}{V}}(f) = \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) + \overset{5}{\underset{1}{V}}(f) = 1 + 20 = 21 \ .$$

I-٢- هل التابع $f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$ ذ ت م على المجال $[0,1]$ وماهو تغيره الكلي .

■ الحل : نلاحظ أن التابع $f(x)$ متزايد على المجال $[0,1]$ وبالتالي فانه ذ ت م كما أن :

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

هنا استخدمنا المبرهنة (١-٣-٥) .

I-٣ هل التابع $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ذ ت م على المجال $[2,\infty)$ وماهو تغيره الكلي .

■ الحل : نلاحظ أن هذا التابع متناقص على المجال $[2,A]$ وذلك من أجل أى مجال محدود $[2,A]$ ، وبالتالي فان $f(x)$ ذ ت م على هذا المجال وحسب المبرهنة (١-٣-٥) يكون لدينا :

$$\overset{A}{\underset{2}{V}}(f) = \left|f(A) - f(2)\right| = \left|\frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9}\right|$$

كما أن :

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}}(f) = \sup_{A>2}\left|\frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9}\right| = \lim_{A\to\infty}\left|\frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9}$$

I-٤ ليكن التابع $f(x)$ المعرف بالشكل :

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

هل هذا التابع ذ ت م على المجال $[0,b]$ حيث $0 < b < \infty$.

■ الحل : معلوم أن هذا التابع يملك مشتقا محدودا على كل مجال محدود حيث :

$$f'(0) = 0 \ , \ f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ ; \quad x \neq 0$$

كما أن :

$$|f'(x)| \leq 2b + 1 \qquad ; \qquad x \in [0,b]$$

اذن $f(x)$ ذ ت م على المجال $[0,b]$.

Iـ ليكن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[0,2]$ بالشكل :

$$f(0) = 0 \ , \ f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2} \ ; \quad x \neq 0$$

هل $f(x)$ ذ ت م على المجال $[0,2]$ وماهوتغيره الكلي ؟

■ الحل : نحل هذا المثال بطريقتين :

طريقة ١ : باستخدام التعريف (١ـ١ـ١)

لنأخذ التجزئة التالية للمجال $[0,2]$:

$$P_n := \{0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}, 2\}$$

ونحسب المجموع الموافق لها فنجد :

$$V(f,P_n) > \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

وباعتبار أن السلسلة العددية $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ متباعدة فيكون :

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f) = \sup_{P \in P[0,2]} V(f,P) = \infty$$

اذن $f(x)$ ليس ذ ت م على المجال $[0,2]$.

طريقة ٢ : نستخدم المبرهنة (١ـ٣ـ٩) والملاحظة (١ـ٣ـ١١) .

لدينا : $f'(0) = 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \quad ; \quad x \neq 0$$

فاذا كتبنا : $\varphi(x) := f'(x)$ لوجدنا :

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt \quad ; \quad x \in [0,2]$$

وهنا علينا حساب $\int_0^2 |\varphi(t)|\, dt$.

وبما أن $x = 0$ نقطة شاذة للتابع المكامل $\varphi(x)$ - وهي الوحيدة - فهـــذا التكامل معتل ويجب دراسة تقاربه . لذا سنعتمد على الاختبار التالـــي لتقارب التكاملات المعتلة : (اذا كانت $x = a$ نقطة شاذة للتابع المكامل $g(x)$ فيكون التكامل $\int_a^b g(x)dx$ متقاربا اذا وفقط اذا كان من أجل كـل متتالية عددية (a_n) متقاربة من a فان السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx \quad ; \quad a = a_0 \ , \ a \leq a_n < b$$

تكون متقاربة ومجموعها هو قيمة التكامل المعتل) .

لنأخذ المتتالية العددية (a_n) (المتقاربة من 0) كما يلي :

$$a_0 = 2, \ a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}} \ , \ a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ , \ k = 1,2,\ldots$$

فنجد أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |\varphi(t)|dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |\varphi(t)dt$$

وعلى المجال $[a_{2k}, a_{2k-1}]$ يكون $\sin \frac{\pi}{x^2}$ و $\cos \frac{\pi}{x^2}$ مـــن

اشارتين مختلفتين ، وبالتالي فان $\varphi(x)$ يحافظ على اشارته على هـذا المجال ، وبالتالي فان :

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |\varphi(t)|dt = \left| \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} \varphi(t)dt \right| = \left| f(a_{2k-1}) - f(a_{2k}) \right| =$$

$$= \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}$$

أصبح الآن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |\varphi(t)|dt > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

اذن : $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^2 |\varphi(t)|\, dt = \infty$

الذى يعني أن التابع $f(x)$ ليس ذ ت م على المجال $[0,2]$.

<u>ملاحظة :</u> من أجل التابع السابق $\varphi(x)$ لدينا :

$$\int_0^2 \varphi(t)dt = t^2 \sin \frac{\pi}{t^2} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$$

وهذا مايؤكد على ضرورة حساب $\int_a^b |\varphi(t)|dt$ وليس $\int_a^b \varphi(t)dt$ لمعرفة اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على $[a,b]$ وذلك عندما يكتب $f(x)$ بالشكل :

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

I ـ ٦ هل التابع $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

ذ ت م على المجال $[0, \infty)$ ،وماهو تغيره الكلي؟.

■ الحل : لدينا هنا تابع من الشكل : $f(x) = c + \int_0^x \varphi(t)\, dt$ ،

لذا وحسب الملاحظة (1-3-11) يكفي حساب : $\int_0^\infty |\varphi(t)|\, dt$

حيث : $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$

وهذا ممكن بطريقتين :

طريقة ١ : لدينا :

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin z}{n\pi + z}\, dz$$

حيث فرضنا $t = n\pi + z$ لنحصل على $\sin z \geq 0$ من أجل $0 \leq z \leq \pi$.

وبما أن $n\pi + z \leq (n+1)\pi$ يكون :

$$\int_0^\pi \frac{\sin z}{n\pi + z}\, dz \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin z\, dz = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

أصبح الآن :

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \infty$$

اذن :

$$\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \infty$$

وبالتالي فان $f(x)$ ليس ذ ت م على المجال $[0, \infty)$.

طريقة ٢ : نعتمد هنا على اختبار ديريكليه لتقارب التكاملات الممثلة من الشكل $\int_a^{\infty}$ الذي نصه :

آ ـ اذا كان التابع $g(x)$ قابلا للمكاملة على كل مجال محدود $[a,A]$ حيث $a < A$ ويوجد عدد ثابت K لايتعلق بـ A بحيث يكون :

$$\left|\int_a^A g(x)\, dx\right| \le K ،$$

ب ـ وكان التابع $h(x)$ ينتهي الى الصفر باطراد عندما $x \longrightarrow \infty$ ،

عندئذ يكون التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\, h(x)\, dx$ متقاربا .

اعتمادا على هذا وانا أخذنا $g(x) = \sin x$ أو $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ حيث $(\alpha > 0)$ ، نجد أن كلا من التكاملين :

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \quad , \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, dx \qquad ; \qquad (\alpha > 0)$$

متقارب من أجل $a > 0$ وذلك لأنه :

آ ـ من أجل $A > a > 0$ يكون :

$$\left|\int_a^A \sin x\, dx\right| = \left|\cos a - \cos A\right| \le 2$$

وكذلك :

$$\left|\int_a^A \cos x\, dx\right| = \left|\sin A - \sin a\right| \le 2$$

ب ـ ومن الواضح أن :

$$h(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

يهمنا هنا $\alpha = 1$ عندئذ يكون كل من التكاملين :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

متقاربا (وقد أخذنا $a = 0$ لأن التابع المكامل له قيمة محدودة عندما $x \longrightarrow 0$) . وفيما يلي سنبرهن أن : $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ غير متقارب.

نفرض جدلا أن هذا التكامل متقارب . عندئذ وحسب العلاقة :

$$\sin^2 x \leq |\sin x|$$

يكون التكامل : $\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ متقاربا أيضا (حيث $0 < a$)،

أي أن $\frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$ متقارب (حيث $0 < a$) .

وحسب ماسبق يكون التكامل $\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ متقاربا .

وبالتالي وبملاحظة أن :

$$\frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$$

يكون التكامل $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$ متقاربا ، وهذا غير صحيح .

اذن الفرض الجدلي خاطيء وبالتالي يكون :

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$$

لدينا الآن :
$$\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$$

<u>ملاحظة</u> : معلوم أن $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

تمارين اضافية I

تمرين ١ـ هل التوابع التالية ذات تغيرات محدودة على المجالات المرافقة وماهو تغيرها الكلي ؟

آ - $f(x) = [x]$ على المجال $[a,b]$

ب - $f(x) = x - [x]$ على المجال $[a,b]$

جـ - $f(x) = |x + e^{-x}|$ على المجال $[-8, \infty)$

د - $f(x) = \sin x - 2\cos 2x$ على المجال $[0, \pi]$

هـ - $f(x) = x\cos\frac{\pi}{2x}$ على المجال $[-\pi, -1]$ وعلى $[1, \infty)$

تمرين ٢ـ هل التوابع التالية ذات تغيرات محدودة على المجالات المعطاة وماهو تغيرها الكلي :

آ -

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & ; \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ب -

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -2 & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ -1 & ; \quad 1 < x < 2 \\ 5 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

جـ -

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 1 - x^2 & ; \quad -1 < x < 1 \\ 8 & ; \quad x = 1. \\ 1 - e^{-x} & ; \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

تمرين ٣ـ برهن بطريقتين مختلفتين أن التابع $f(x) = \sin x$ ذ ت م على المجال $[0,2\pi]$ وأوجد تغيره الكلي .

تمرين ٤ـ اذا كان $f(x) = \text{const.}$ على المجال $[a,b]$ برهن أن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$ والعكس صحيح أيضا .

تمرين ٥ـ اعط مثالا عن تابع مستمر على مجال محدود $[a,b]$ وآخر عن تابع مستمر على مجال غير محدود $[a, \infty)$ لكنهما ليسا ذ ت م .

تمرين ٦ـ اذا كان كل من التابعين $f(x)$ و $g(x)$ ذو تغيرات محدودة على مجال $[a,b]$ ، وبحيث أن :

$$f(x) \leq g(x) \quad ; \quad x \in [a,b] .$$

هل تصح احدى العلاقتين :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \quad \text{أو} \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \; .$$

تمرين ٧ـ اذا كان كل من التابعان $f(x)$ و $g(x)$ ذو تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ برهن أن التابعين $M(x)$ و $m(x)$ المعرفين بالشكل :

$$M(x) := \max \{f(x) , g(x)\} \quad ; \quad x \in [a,b]$$

$$m(x) := \min (f(x) , g(x)) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

أيضا ذو تغيرات محدودة على $[a,b]$.

(توجيه): برهن أولا صحة العلاقتين :

$$M(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right]$$

$$m(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right]$$

تمرين ٨ـ استخدم المبرهنة (١ـ٤ـ٥) لاثبات أن التابع :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ x \cos \dfrac{\pi}{2x} & ; \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ليس ذ ت م على المجال $[0,1]$ (حيث برهنا هذا في المثال (١ـ١ـ٥)، اعتمادا على التعريف) .

تمرين ٩ـ هل التابعان :

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \quad ; \quad x \in [0, \infty)$$

$$g(x) = e^{-x} \quad ; \quad x \in [0, \infty)$$

لهما تغيرات محدودة على المجال $[0, \infty)$ ، وماهو التغير الكلي لكل منهما .

تمرين ١٠ـ اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا مطلقا على المجال $[a,b]$ ، برهن أن $v_f(x)$ يكون أيضا مستمر مطلقا على $[a,b]$.

تمرين ١١ـ ليكن $f(x)$ تابعا قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، ولنضع :

$$F(x) := c + \int_a^x f(t)\,dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

حيث c عدد ثابت .

هل $F(x)$ مستمر مطلقا على المجال $[a,b]$.

تمرين ١٢ـ هل المنحني (K) المعطى بالتمثيل الوسيطي :

$$x = A\cos t \quad , \quad y = B\sin t \quad , \quad t \in [0,2\pi]$$

قابل للتقويم على المجال $[0,2\pi]$ ، حيث A و B ثوابت موجبة .

تمرين ١٣ـ هل المنحني $y = x^2 - x + 1$ قابل للتقويم على المجال $[-5,5]$.

تمرين ١٤ـ ليكن (K) منحن مستمر وقابل للتقويم على المجال $[\alpha , \beta]$ ، ولنرمز بـ $s(t)$ لطول المنحني (K) على المجال $[\alpha , t]$. برهن أن $s(t)$ يمثل تابعا مستمرا بالنسبة للمتحول t. هل $s(t)$ مستمر مطلقا .

(توجيه : استخدم العلاقة الواردة في نهاية برهان المبرهنة (١-٧-٢) وهي

$$s \le \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\varphi) + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(\Psi)$$

وذلك من أجل المجال $[t, t+h]$ حيث $h > 0$ واستفد من المبرهنة (١-٤-١)) .

تمرين ١٥ـ اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$. برهن أنه يمكن كتابته بالشكل :

$$f(x) = f_1^*(x) - f_2^*(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

حيث أن $f_1^*(x)$ و $f_2^*(x)$ تابعان متناقصان على المجال $[a,b]$.