نعرف $V(f,P)$ بالشكل :

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+\dots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

نعرف الـ sup (بنده الجامع) :

$$V_a^b f=\sup_{P\in P[a,b]} V(f,P)$$

فإذا كان : $V_a^b(f)<\infty$

عندئذ نقول أن f (ذ.ت.م)

وندعو $V_a^b(f)$ (التغير الكلي للدالة f على $[a,b]$)

مبرهنة 1 : f ذ.ت.م على $[a,b]$

$\Leftarrow$ f محدودة على $[a,b]$

ولكن العكس غير صحيح بالضرورة

الاثبات: نفرض f ذ.ت.م

عندئذ :

$$V_a^b f=\sup_{P\in P[a,P]} V(f,P)<\infty$$

من أجل التجزئة : $P=\{a,x,b\ ;a<x<b\}$

حيث : $V(f,P)=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|<\infty$

الآن لنبرهن أن f محدودة:

$$\forall x\in[a,b]:|f(x)|=|f(x)-f(a)+f(a)|$$

$$\le|f(x)-f(a)|+|f(a)|$$

$$\le V_a^b f+|f(a)|=M$$

وبالتالي :

$$\exists M>0:|f(x)|\le M\quad\forall x\in[a,b]$$

مبرهنة 2 : إذا كانت f ذ.ت.م على $[a,b]$

فإن $|f|$ ذ.ت.م على $[a,b]$

والعكس غير صحيح بالضرورة .

الاثبات: نفرض f ذ.ت.م على $[a,b]$ عندئذ

من أجل أي تجزئة :

$$P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$$

$$V_a^b(f) = \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| < +\infty$$

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big|$$

حسب الخاصية: $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

$$\big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| \le |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

حيث $x_k, x_{k-1} \in P$
وهي صحيحة من أجل $1\le k\le n$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$\Rightarrow \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| \le \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$\Rightarrow V_a^b(|f|) \le V_a^b(f) < +\infty$$

وعليه فإن الدالة $|f|$ ذ.ت.م

برهنة 3: f ذ.ت.م على $[a,b]$
فإن αf ذ.ت.م على $[a,b]$

الإثبات: نأخذ التجزئة.

$$P = \{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$$

$$V(\alpha f,P) = \sum_{k=1}^{n} |(\alpha f)(x_k)-(\alpha f)(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})|$$

$$= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

ومنه: $V(\alpha f,P) = |\alpha|.V(f,P)$

$$V_a^b(\alpha f) = |\alpha| \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$V_a^b(\alpha f) = |\alpha|.V_a^b(f) < +\infty$$

ومنه الدالة αf ذ.ت.م

برهنة 4: f ذ.ت.م على $[a,b]$
فإن $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$

حيث: $\forall x\in[a,b],\ |f(x)| \ge c > 0$

الإثبات: نأخذ التجزئة:

$$P = \{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$$

مبرهنة 5 : إذا كانت كل f, g ذ.ت.م على $[a,b]$
فإن $f+g$ ذ.ت.م على $[a,b]$

الاثبات : لنأخذ التجزئة :
$P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$
لنبرهن أن $V_a^b(f+g)<\infty$

$V(f+g,P)=\sum|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})|$

$=\sum|f(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_k)-g(x_{k-1})|$

$V(f+g,P)\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$

$\le V(f,P)+V(g,P)$

$\Rightarrow V_a^b(f+g)\le V_a^b(f)+V_a^b(g)<\infty$
ومنه $f+g$ ذ.ت.م على $[a,b]$

مبرهنة 6 : إذا كانت f, g ذ.ت.م على $[a,b]$
فإن $f-g$ ذ.ت.م على $[a,b]$

الاثبات : بما أن g ذ.ت.م فإنه حسب المبرهنة αf ذ.ت.م من أجل $\alpha=-1$ نجد $-g$ ذ.ت.م وبالتالي $(f+(-g))$ ذ.ت.م حسب المبرهنة 5 ومنه $(f-g)$ ذ.ت.م على $[a,b]$

$V(\frac{1}{f},P)=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_k)}-\frac{1}{f(x_{k-1})}\right|$

توحيد المقامات :
$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f(x_{k-1})-f(x_k)}{f(x_k).f(x_{k-1})}\right|$

$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{|f(x_k)|.|f(x_{k-1})|}\right]$ ★

ولكن حسب الفرض :
$\forall x\in[a,b]: |f(x)|\ge c$
$\Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}\le\frac{1}{c}$

ومنه من ★ :
$\frac{1}{|f(x_k)|}.\frac{1}{|f(x_{k-1})|}\le\frac{1}{c}.\frac{1}{c}=\frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow V(\frac{1}{f},P)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{c^2}$

$V(\frac{1}{f},P)\le\frac{1}{c^2}.V(f,P)$

$V_a^b(\frac{1}{f})\le\frac{1}{c^2}.\sup\sum_{k=1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

$\Rightarrow V_a^b(\frac{1}{f})\le\frac{1}{c^2}.V_a^b(f)<+\infty$
ومنه $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$

مبرهنة 7: إذا كانت f, g دالتين كلاهما ذات ت.م على $[a,b]$ فإن: $f.g$ ذات ت.م على $[a,b]$.

الاثبات: نأخذ التجزئة:

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

ولدينا $V_a^b f < \infty$ و $V_a^b g < \infty$

ولنبرهن أن $V_a^b (f.g) < \infty$

$$V(f.g, P) = \sum_{k=1}^{n} |(f.g)(x_k) - (f.g)(x_{k-1})|$$

$$V(f.g, P) = \sum |f(x_k).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_k) + f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1}) \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| g(x).[f(x_k) - f(x_{k-1})] + f(x_{k-1})[g(x_k) - g(x_{k-1})] \right|$$

$$V(f.g, P) \leq$$

$$\leq \sum |g(x_k)|(f(x_k) - f(x_{k-1}))| + \sum |f(x_{k-1})|.(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

$$\leq \sum |g(x_k)|.|f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum |f(x_{k-1})|.|g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

إن $f(x_{k-1})$ ، $g(x_k)$ دالتين ذ.ت.م حسب المبرهنة 1 فإن g, f محدودتان على $[a,b]$

$$\exists M_2 > 0 ; \forall x \in [a,b] : |f(x_{k-1})| \leq M_2$$

$$\exists M_1 > 0 ; \forall x \in [a,b] : |g(x_k)| \leq M_1$$

$$\Rightarrow V(f.g, P) \leq M_1 \sum |f(x_k) - f(x_{k-1})| + M_2 \sum |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$V(f.g, P) \leq M_1 . V(f, P) + M_2 . V(g, P)$$

$\Rightarrow V_a^b(f.g) \le M_1 \cdot V_a^b f + M_2 \cdot V_a^b g < \infty$

ومنه $(f.g)$ ذ.ت.م على $[a,b]$

مبرهنة 8: إذا كانت f و g دالتين كل منهما ذ.ت.م على $[a,b]$ فإن $\frac{f}{g}$ ذ.ت.م على $[a,b]$

الإثبات: بما أن g ذ.ت.م فإن $\frac{1}{g}$ ذ.ت.م بحيث

$\forall x \in [a,b] : |g(x)| \geq c > 0$

وبالتالي $(f.\frac{1}{g})$ ذ.ت.م

حسب المبرهنة 7 ومنه $\frac{f}{g}$ ذ.ت.م على $[a,b]$

مبرهنة 9: إذا كانت f ذ.ت.م على $[a,b]$ وكان $a<c<b$ فإن f ذ.ت.م على $[a,c],[c,b]$ وبالعكس ويتحقق: $V_a^b f = V_a^c(f) + V_c^b(f)$

الإثبات: إذا كانت f ذ.ت.م على $[a,b]$ فإنها دالة تغير على $[a,c]$ ، $[c,b]$ وذلك حسب التعريف: إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فهي دالة تغير محدود على أي مجال جزئي منه.

حيث: $[a,c] \subset [a,b]$

$[c,b] \subset [a,b]$

نفرض P_1 تجزئة للمجال $[a,c]$:

$P_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = c\}$

نفرض P_2 تجزئة للمجال $[c,b]$:

$P_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_n = b\}$

وعندئذ من أجل التجزئة $P = P_1 \cup P_2$ للمجال $[a,b]$

فتكون العلاقة التالية محققة:

$V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2)$ ★

لكن:

$$\sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) \geq V(f,P_1) + V(f,P_2)$$

$$\sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) \geq \sup_{P \in \mathbb{P}[a,c]} V(f,P_1) + \sup_{P \in \mathbb{P}[c,b]} V(f,P_2)$$

ومنه:

$$\boxed{V_a^c f + V_c^b(f) \le V_a^b(f)} \quad (1$$

اثبات العكس: f ذ.ت.م على كل من $[a,c]$, $[c,b]$ ولنبرهن أن f ذ.ت.م على $[a,b]$

- لنأخذ تجزئة P للمجال $[a,b]$ بحيث لاتحوي على النقطة c

- لننشأ التجزئة P' بحيث: $P' = P \cup \{c\}$

ومنه:

$$P \subseteq P' \Rightarrow V(f,P) \le V(f,P')$$

حيث $V(f,P') = V(f,P_1') + V(f,P_2')$

أي:

$$V(f,P) \le V(f,P_1') + V(f,P_2')$$

حيث $\boxed{P' = P_1' \cup P_2'}$

بفرض أن لدينا P_1' تجزئة للمجال $[a,c]$

$$P_1' = \{x_0 = a < \dots < x_m = c\}$$

بفرض أن لدينا P_2' تجزئة لـ $[c,b]$

$$P_2' = \{x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b\}$$

$$\Rightarrow V(f,P) \le \sup_{P_1' \in P[a,c]} V(f,P_1') + \sup_{P_2' \in P[c,b]} V(f,P_2')$$

$$\Rightarrow V(f,P) \le V_a^c f + V_c^b f$$

$$\Rightarrow \boxed{V_a^b(f) \le V_a^c(f) + V_c^b(f)} \quad (2$$

$$\Rightarrow V_a^b(f) < \infty$$

ومنه f ذ.ت.م على $[a,b]$

ومنه من 1) و 2) نجد أن:

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$$

المثال المعاكس للبرهنة:

إذا كان f ذ.ت.م $\Leftarrow$ $|f|$ ذ.ت.م

ولاثبات أن العكس غير صحيح نستخدم هذا المثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ -1 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

وذلك من أجل $|f|$ نستخدم التجزئة

$$P = \{x_0 = 0 < \dots < x_n = 1\}$$

ومن أجل الـ f نستخدم التجزئة:

$$P_2 = \{\underset{\in \mathbb{Q}}{x_0 = 0} < \underset{\notin \mathbb{Q}}{x_1} < \dots < \underset{\in \mathbb{Q}}{x_n = 1}\}$$

مبرهنة 10: إذا كانت f معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذ.ت.م على $[a,b]$ ويتحقق

$$V_a^b(f) = |f(b)-f(a)|.$$

الإثبات: f دالة متزايدة على $[a,b]$ أي:

$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ فإن $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

(في حال f دالة متناقصة على $[a,b]$

$\forall x_1,x_2 \in [a,b]$ فإن $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$

لنبرهن أن f ذ.ت.م

لتكن P تجزئة عشوائية للمجال $[a,b]$

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$$

$P\in\mathcal{P}[a,b]$.

ومنه

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)| + \dots + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

وهنا نميز حالتين:

1- إذا كانت الدالة f متزايدة على $[a,b]$

$$V(f,P)=f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(x_n)-f(x_{n-1})$$

$$=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)\geq 0$$

$$V_a^b(f)=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\{f(b)-f(a)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_a^b(f)=f(b)-f(a)} \quad (1$$

2- إذا كانت الدالة f متناقصة على $[a,b]$

$$V(f,P)=f(x_0)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})-f(x_n)$$

$$=f(x_0)-f(x_n)=f(a)-f(b)\geq 0$$

$$V_a^b(f)=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\{f(a)-f(b)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_a^b(f)=f(a)-f(b)} \quad (2$$

من 1) و 2) نجد:

$$V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|<\infty$$

ومنه f ذ.ت.م على $[a,b]$

شرط ليبشتز: f دالة معرفة على $[a,b]$ نقول عن f إنها تحقق شرط ليبشتز إذا تحقق:

$\exists L>0 . \quad \forall u,v\in[a,b]$

فإن: $|f(v)-f(u)| \le L.|u-v|$

مبرهنة 11: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$ فإن f ذ.ت.م على $[a,b]$

الاثبات: ليكن P تجزئة من الشكل:

$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

حيث $P\in\mathcal{P}[a,b]$

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

f دالة تحقق شرط ليبشتز:

$\exists L>0 : \forall x_k, x_{k-1}\in[a,b]$

$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le L.|x_k-x_{k-1}|$

$\Rightarrow \sum |f(x_k)-f(x_{k-1})| \le \sum L.|x_k-x_{k-1}|$

$\Rightarrow \sum|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le L.\sum|x_k-x_{k-1}|$

$\Rightarrow V(f,P)\le L.(|x_1-x_0|+|x_2-x_1|+\dots)$

من التجزئة يكون:

$V(f,P)\le L(x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1})$

$\Rightarrow V(f,P)\le L(x_n-x_0)=L.(b-a)$

$\Rightarrow \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} V(f,P) \le \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} L.(b-a)$

$\Rightarrow V_a^b(f)\le L(b-a)<+\infty$

ومنه f ذ.ت.م على $[a,b]$

مبرهنة 12: إذا كانت f دالة ذات مشتقات محدودة على $[a,b]$ فإن f ذ.ت.م على $[a,b]$

الاثبات: إن f معرفة على $[a,b]$ والمشتقات محدودة أي:

$\exists M>0 : |f'(x_0)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$

لنبرهن أن f ذ.ت.م على $[a,b]$

حيث $a\le u<v\le b$

f قابل للاشتقاق على $[a,b]$

فهو قابل للاشتقاق على $[u,v]$

وبالتالي حسب نظرية التزايدات المحدودة:

$$\exists t \in]u,v[\ : f'(t) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

$$f(u)-f(v) = f'(t)(u-v)$$

$$|f(u)-f(v)| = |f'(t)| . |u-v|$$

لدينا المشتق محدود فإن:

$$\exists M>0 \ ; \ |f(u)-f(v)| \leq M|u-v|$$

إذاً f تحقق شرط ليبشتز

ومنه f ذ.ت.م على $[a,b]$

برهنة 13 : f دالة معرفة

وذات تغير محدود على $[a,b]$

نعرف الدالة $g(x)$ بدالة تغير كلي لـ f

المعرفة بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} V_a^x f & ; \ a < x \leq b \\ 0 & ; \ x = a \end{cases}$$

نلاحظ أن $g(x) \geq 0$

ومن خواص دالة التغير الكلي g:

1- g محدودة على المجال $[a,b]$

بما أن f ذ.ت.م على $[a,b]$:

$$\exists M>0 \ ; \ V_a^b(f) = M < +\infty$$

$$\Rightarrow x \in [a,b] \begin{cases} \boxed{x=a} \Rightarrow g(x) = 0 < M \\ \boxed{x \neq a} \Rightarrow |g(x)| = |V_a^x f| \\ \qquad \leq V_a^b f = M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists M>0 \ : |g(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

2- g متزايدة على المجال $[a,b]$:

لنبرهن أنه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_a^{x_2} f}_{\geq 0} = \underbrace{V_a^{x_1} f}_{\geq 0} + \underbrace{V_{x_1}^{x_2} f}_{\geq 0}$$

وذلك لأن f ذ.ت.م على $[a,b]$

$$\Rightarrow V_a^{x_2} f - V_a^{x_1} f = V_{x_1}^{x_2} f \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1)$$

وبالتالي g متزايدة على $[a,b]$

3. g مستمرة على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f مستمرة على $[a,b]$

مبرهنة 14: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f ذ ت م على $[a,b]$ هو أن تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين محدودتين أي:

f) دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $(f(x)=f_1(x)-f_2(x))$ حيث f_1 و f_2 متزايدتين ومحدودتين

الإثبات: $\Leftarrow$ لزوم الشرط:

لدينا f ذ ت م ونريد إثبات أن $f=f_1-f_2$ حيث f_1 و f_2 متزايدتين ومحدودتين.

لنأخذ الدالة $g(x)$ دالة التغير الكلي للدالة f على $[a,b]$ وحسب خواص $g(x)$ هي متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ لذلك لننشئ الدالة

$$h(x)=g(x)-f(x)$$

ولنبرهن أن $h(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a,b]$

حيث: $f(x)=g(x)-h(x)$

لإثبات أن h متزايدة فيجب تحقق الشرط:

$$\forall x_1,x_2\in[a,b]$$
$$x_1<x_2 \Rightarrow h(x_1)\leq h(x_2)$$

$$h(x_2)-h(x_1)=g(x_2)-f(x_2)-(g(x_1)-f(x_1))$$

$$h(x_2)-h(x_1)=\underbrace{(g(x_2)-g(x_1))-(f(x_2)-f(x_1))}_{\text{يجب برهان أن هذا المقدار أكبر من الصفر}}$$

كما أنه:

$$f(x_2)-f(x_1)\leq |f(x_2)-f(x_1)| \leq V_{x_1}^{x_2}(f) = V_a^{x_2}f - V_a^{x_1}f = g(x_2)-g(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\leq g(x_2)-g(x_1)$$

$$\Rightarrow (g(x_2)-g(x_1))-(f(x_2)-f(x_1))\geq 0$$

$$\Rightarrow h(x_2)-h(x_1)\geq 0 \Rightarrow h(x_2)\geq h(x_1)$$

ومنه h دالة متزايدة.

ملاحظة ثانية :

$g(x)$ دالة محدودة

$f(x)$ دالة محدودة لأنها ذ ت م

ومنه $h(x) = g(x) - f(x)$

هي دالة محدودة لأنها فرق دالتين محدودتين.

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{محدودة ومتزايدة}} - \underbrace{h(x)}_{\text{محدودة ومتزايدة}}.$$

أي أن f كتبت على شكل فرق لدالتين متزايدتين ومحدودتين

$\Leftarrow$ (كفاية الشرط):

$f = f_1 - f_2$ حيث أن f_1, f_2 دوال متزايدة ومحدودة على $[a,b]$

بما أن f_1 متزايدة فهي مطردة وحسب المعيار الاول فان f_1 ذ ت م على $[a,b]$

بما أن f_2 متزايدة فهي مطردة وحسب المعيار الاول فان f_2 ذ ت م على $[a,b]$

وبالتالي فرق دالتين كل منهما ذ ت م هو ذ ت م

ومنه $f = f_1 - f_2$ ذ ت م على $[a,b]$

مبرهنة 15 : مبرهنة جوردن

الشرط اللازم والكافي لكي يكون المنحنى $\boxed{K \text{ قابل للتجميع}}$ هو أن تكون

كل من الدالتين $x(t) = \varepsilon(t)$ و $y(t) = \psi(t)$ دوال ذات تغير محدود على $[\alpha, \beta]$

الاثبات:

$\Rightarrow$ بفرض K قابل للتجميع أي:

$$L = \sup_{P \in P[\alpha,\beta]} L(P) < \infty$$

لنبرهن أن $x(t)$, $y(t)$ دوال ذ ت م

حسب الخاصة $\boxed{|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2+b^2}}$

لدينا:

$$|\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1})| \le \sqrt{(\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sup \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1})| \le \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

ومنه:

$$\Rightarrow V_{\alpha}^{\beta}(\varepsilon) \le L < +\infty$$

ومنه $\varepsilon(t)$ ذ.ت.م على $[\alpha, \beta]$

بالنسبة لـ $\psi(t)$:

$$|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \le \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sup \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \le \sup \sum \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\Rightarrow V_{\alpha}^{\beta}(\psi) \le L < +\infty$$

ومنه $\psi(t)$ ذ.ت.م على $[\alpha, \beta]$

($\Leftarrow$) بفرض أن $\varepsilon(t), \psi(t)$ دوال ذات تغير محدود ولنبرهن أن K منحني قابل للتقويم أي:

$$L = \sup L(P) < \infty$$

حيث

$$L(P) = \sum \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

حسب الخاصية:

$$|a| \le \sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$$

$$\sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \le |\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1})| + |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \le \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|$$

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \le \sup \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon(t_i)-\varepsilon(t_{i-1})| + \sup \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|$$

$$\Rightarrow L \le V_{\alpha}^{\beta}(\varepsilon) + V_{\alpha}^{\beta}(\psi) < +\infty$$

ومنه فإن المنحني K قابل للتقويم على $[\alpha, \beta]$

مجموع ريمان :

$$\boxed{\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})}$$

حيث . f معرفة ومحدودة على $[a,b]$

ولدينا: $P = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$

وإن . $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

المساحة العليا :

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \cdot \Delta x_k$$

حيث . $M_k(f) = \sup f(x)$

المساحة الدنيا:

$$L(f,P) = \sum m_k(f) \cdot \Delta x_k$$

حيث : $m_k(f) = \inf f(x)$

شرط وجود تكامل ريمان .

$$\lim_{\Delta x \to 0} (U - L) = 0$$

حيث:

$$\lambda P = \|P\| = \Delta x = \max(\Delta x_k)$$

في حال كان $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

فإن ،

$$\lim_{n \to \infty} (U - L) = 0$$

f تكامل حسب ريمان إذا .

إذا وجد ث الثابتة A حيث :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sigma(f,P) = A$$

حيث $\Delta x = \max(x_k - x_{k-1})$

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$ ويرمز لهذه الثابتة ب

مجموع ستيلجس للدالة f بالنسبة لـ g :

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k$$

حيث كلاً من g و f معرفين ومحدودتين على $[a,b]$

وإن $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

وإن : $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \wedge \Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

f قابل للمكاملة بالنسبة لـ g (تكامل)

وفق ستيلجس . إذا وجدت لـ ثابتة A

حيث : $\lim_{\Delta x \to 0} S(f,g,P) = A$

$$\int_a^b f\,dg = A$$ يرمز له ب

عندما $g(x)=x$ يصبح تكامل ستيلجس هو تكامل ريمان أي:

$$\boxed{\int_a^b f\,dg} = \lim_{\Delta x\to 0} S(f,x,P)$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} f(t_k).(x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \sigma(f,P) = \boxed{\int_a^b f\,dx}$$

عندما $f(x)=1$ فإن:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b 1.\,dg = g(b)-g(a)$$

شروط وجود تكامل ستيلجس:

1 - إذا $g(x)$ تامة تزايدياً على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي ليكون تكامل ستيلجس موجود هو أن يحقق العلاقة:

$$\lim_{\Delta x\to 0} [U(f,g,P) - L(f,g,P)] = 0$$

2 - $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ و $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$

3 - $f(x)$ مستمرة و $g(x)$ ذو تام

4 - $f(x)$ محولة بمفهوم ريمان و $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز

5 - $f(x)$ مستمرة و $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز.

6 - $f(x)$ مستمرة و $g(x)$ قابلة للاشتقاق ومحدودة ومحولة بمفهوم ريمان ومنه $\int_a^b f\,dg$ موجود ويعطى:

$$\underbrace{\int_a^b f\,dg}_{\text{ستيلجس}} = \underbrace{\int_a^b f\,g'\,dx}_{\text{ريمان}}$$

خواص تكامل ستيلجس:

(1 $\int_a^b dg(x) = g(b)-g(a)$

(2 $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dg = \int_a^b f_1(x)\,dg \pm \int_a^b f_2(x)\,dg$

وتكون الخاصية صحيحة عندما يكون التكاملين على اليسار موجودان

3) $\int_a^b f(x)\, d(g_1 \pm g_2) = \int_a^b f(x)\, dg_1 \pm \int_a^b f(x)\, dg_2$

4) $\int_a^b \alpha f(x)\, d(\beta g) = \alpha . \beta \int_a^b f\, dg$

5) إذا كانت $g(x)$ متزايدة وكان التكاملان $\int_a^b h\,dg$ ، $\int_a^b f\,dg$ موجودين وكان $f \le h$ فإن $\int_a^b f . dg \le \int_a^b h\,dg$

6) إذا كانت $g(x)$ متزايدة وكان $\int_a^b f\,dg$ موجود فإن $\int_a^b |f|\,dg$ موجود و $\int_a^b (f(x))^2\,dg$ موجود ويتحقق:

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b |f| . dg$$

7) إذا كانت $g(x)$ متزايدة وكان $\int_a^b f\,dg$ موجود وكانت $a < c < b$ فإن $\int_c^b f\,dg$ ، $\int_a^c f\,dg$ موجودان ويحققان:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

8) إذا كان $\int_a^c f\,dg$ ، $\int_c^b f\,dg$ موجودين حيث $a < c < b$ وكان أحد التابعين g أو f مستمراً عند c والآخر محدوداً في جوار c عندئذ التكامل $\int_a^b f\,dg$ موجود ويتحقق العلاقة:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f . dg + \int_c^b f\,dg$$

9) برهنة التجزئة: إذا كان أحد التكاملين $\int_a^b f\,dg$ أو $\int_a^b g\,df$ موجوداً فإن الآخر يكون موجوداً ويتحقق العلاقة:

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = [f(x) . g(x)]_a^b$$

$$= f(b) . g(b) - f(a) . g(a)$$

10) إذا كانت $f(x)$ مستمر على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \max|f(x)| . V_a^b g$$

تعريف تكامل ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(t_k).\Delta x_k)$$

تعريف تكامل ستيلجس :

$$\int_a^b f(x)dg = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f(t_k).\Delta g_k)$$

الدالة الدرجية

نقول عن الدالة $g(x)$ انها دالة درجية إذا كانت :

1- $g(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$

2- $g(x)$ تقبل عدد من انقطاعات من النوع الأول في عدد منته من النقاط الداخلية c_k حيث $a<c_1<c_2<..<b$

3- $g(x)$ ثابتة في كل مجال مفتوح $]a,c_1[\ ,\ ]c_1,c_2[\ ...\ ]c_n,b[$

القفزة عند نقطة داخلية (c_k) :

$$g_k = g(c_k+0) - g(c_k-0)$$

القفزة عند نقطة الانقطاع a (من اليمين)

$$g_a = g(a+0) - g(a)$$

القفزة عند نقطة انقطاع b (من اليسار)

$$g_b = g(b) - g(b-0)$$

حساب قيمة تكامل ستيلجس

مبرهنة 1 : إذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على $[a,b]$ مع قفزة (g_k) عند c_k حيث $a<c_1<...<c_n=b$

وإذا كانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$ بحيث f,g غير مشتركين حماً عند c_k من اليسار، أو من اليمين (أحدهما على الأقل يجب أن يكون مستمر)

عندئذ تكامل ستيلجس موجود ويعطى :

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k$$

وفي حال كان كل من a , b نقاط انقطاع من النوع الأول فيعطى :

$$\int_a^b f\,dg = f(a).g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k + f(b).g_b$$

مثال عن المبرهنة: أوجد تكامل

ستيلجس المعرف:

$$\int_0^3 x^2 d[x]$$

الحل: بما أن $f(x)=x^2$

$g(x)=[x]$

حيث $g(x)$ دالة درجية معرفة بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases} 0 ; & 0\le x<1 \\ 1 ; & 1\le x<2 \\ 2 ; & 2\le x<3 \\ 3 ; & x=3 \end{cases}$$

نقاط الانقطاع لـ $g(x)$:

$c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=3$

f دالة مستمرة على $[0,3]$

ومنه يتحقق الخاصية الثانية للمبرهنة

لأن $c_3=3$ هي نهاية المجال وهي

نقطة انقطاع من النوع الأول

$$\int_a^b f dg = f(a).g_a + \sum f(c_k) g_k + f(b).g_b$$

ومنه:

$$\int_0^3 x^2 d[x] = f(1).g_1 + f(2)g_2 + f(3)g_3$$

حيث

$$g_1 = g(1+0) - g(1-0) = 1 - 0 = 1$$

$$g_2 = g(2+0) - g(2-0) = 2 - 1 = 1$$

$$g_3 = g(3) - g(3-0) = 3 - 2 = 1$$

$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=9$

ومنه

$$\int_0^3 x^2 d[x] = 1+4+9=14$$

مبرهنة 2: إذا كانت f مستمرة (1) على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تماني (2) من نقاط انقطاع من النوع الأول في عدد منته من النقاط c_k حيث $a<c_1<\dots<c_n<b$

وإن:

$$\int_a^b |g'(x)| dx < \infty$$

حيث $g'(x)$ موجودة ومحدودة (3) على $[a,b]$

باستثناء نقاط الانقطاع.

عندئذ تكامل ستيلجس يكون موجود أيضاً!

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f.g' dx + \sum_{i=1}^{n} f(c_k).g_k$$

وإذا كانت a , b نقطتا انقطاع من النوع الاول عندئذ:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\cdot g'\,dx + f(a)\cdot g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot g_k + f(b)\cdot g_b$$

مثال: احسب تكامل ستيلجس

$$I = \int_{-2}^{2} x^2\cdot d(g)$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & : -2 \le x \le -1 \\ 2 & : -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

الحل: لدينا f مستمرة على $[-2,2]$

والدالة g تقبل من نقاط انقطاع

من النوع الاول وهي: $c_1 = -1$

$c_2 = 0$

وايضاً $g'(x)$ موجودة ومحدودة

على $[2,-2]$ وبالتالي حسب

المبرهنة:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\cdot g'\,dx + \sum f(c_k)\, g_k$$

هنا بداية المجال ونهايته ليست نقاط انقطاع:

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dg = \int_{-2}^{-1} x^2\cdot 1\,dx + \int_{-1}^{0} x^2(0)\cdot dx + \int_{0}^{2} x^2\cdot(2x)\,dx$$

$$+ f(-1)\cdot g_{-1} + f(0)\, g_0$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^4}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$+ 1\cdot\big(\overset{2}{g(-1+0)} - \overset{1}{g(-1-0)}\big)$$

$$+ 0\big(g(0+0) - g(0-0)\big)$$

$$= \frac{1}{3}[-1+8] + \frac{1}{2}[16] + 1 = \frac{34}{3}$$

تعريف طوبولوجيا :

1) $\emptyset , X \in \tau$

2) $A, B \in \tau$: $A \cap B \in \tau$, $A \cup B \in \tau$ } مجموعات منتهية

3) $\forall A_i \in \tau : \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ مجموعات غير منتهية

مثال : $X = \{1, 2\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$

تعريف الحلقة :

1) $\forall A, B \in \tau : A \setminus B \in \tau$

2) $\emptyset \in \tau$

3) $\forall A, B \in \tau : A \cup B \in \tau$

مثال : $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ حيث $X = \{1, 2, 3\}$

الحلقة التامة :

1) $\emptyset \in \tau$

2) $A \cup B \in \tau$, $A / B \in \tau$

3) $\forall A_i \in \tau : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$

تكون **τ حلقة** إذا تحققت إحدى الشروط.

$\forall A, B \in \tau$:

1] $A \cup B \in \tau \wedge A \setminus B \in \tau$

2] $A \Delta B \in \tau \wedge A \cup B \in \tau$

3] $A \Delta B \in \tau \wedge A \setminus B \in \tau$

4] $A \Delta B \in \tau \wedge A \cap B \in \tau$

الجبر : لديه تعريفين :

تعريف 1 : لتكن X غير خالية و $\mathcal{A}$ صف من X نقول عن $\mathcal{A}$ انه جبر :

1] $\emptyset , X \in \mathcal{A}$

2] $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$

3] $A / B \in \mathcal{A}$

تعريف 2 :

1] $\emptyset \in \mathcal{A}$

2] $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$

3] $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$

حيث كلا التعريف 1 و التعريف 2 متكافئين

Subject:

الجبر التام: هو جبر ويحقق انه مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود أي تحقق:

$\forall A_i \in \mathcal{A}: \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{N}$

مثال: $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

مثال: لتكن $X = \{a, b, c, d\}$

ولتكن: $\tau = \{\{a,b\}, \{c\}\}$

1- أصغر حلقة تحوي τ هي:

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$

2- أصغر توبولوجيا تحوي τ هي:

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$

نأخذ مجموع عناصر τ دائماً.

3- أصغر جبر يحوي τ:

$$\tau_3 = \begin{Bmatrix} \emptyset, X, \{a,b\}, \{c\} \\ \{c,d\}, \{a,b,d\} \\ \{d\}, \{a,b,c\} \end{Bmatrix}$$

لا بد من ال X و $\emptyset$

ومحققا شروط الضم والفرق

4- أوجد جبر آخر يحوي τ:

هي $P(X)$

حيث:

$$P(X) = \begin{Bmatrix} \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\} \\ \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\} \\ \{a,b,c\}, \{a,b,d\} \\ \{b,c,d\}, \{a,c,d\} \end{Bmatrix}$$

5- أصغر جبر من أجزاء X

$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

6- أكبر جبر من أجزاء X:

$\mathcal{A} = P(X)$

إذا كان (X,τ) فضاء طبولوجي مألوف حيث $X=\mathbb{R}$

جبر بوريل: نقول عن $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ إنها جبر بوريل إذا كانت أصغر جبر تام يحوي τ حيث τ هي جميع المجموعات المفتوحة.

مثال: $A:]2,3[\cup]4,5[$

1- المجالات المغلقة هي مجموعات بوريلية لأنها تعطى على شكل تقاطع لمجالات مفتوحة:

$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[\; : a \le b$

2- المجال نصف المغلق من اليسار هو مجموعة بوريلية

$[a,b[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b[$

3- المجالات نصف المغلقة من اليمين هي مجموعات بورلية:

$$]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\frac{1}{n}[$$

(القياس)

لتكن $X \neq \emptyset$

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

حيث μ: تمثل قياس

$\mathcal{A}$: جبر تام من أجزاء X

$\overline{\mathbb{R}}_+$ هو $[0,+\infty]$

نقول انه قياس إذا حقق:

1] $\mu(\emptyset)=0$

2] $\forall A_i \in \mathcal{A}$; $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

علماً أن: (1

(2 $\mu(4)=0$, $\mu(5)=0$

(3 $\mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu$ قياس منته

(4 نسمي $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس

خواص القياس:

1- الخاصية الفرقية:

$\forall A, B \in \mathcal{A}$:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2- الخاصية الطردية:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

3- الخاصية نصف الجمعية (المعدودة):

$\forall A_i \in \mathcal{A}$;

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

4- خاصية استمرار الاجتماع:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

فإن

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

5- خاصية استمرار التقاطع:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

أمثلة عن القياس:

1- **قياس العد** : ليكن $X \neq \emptyset$

$$\mu : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \to \mu(A) = \begin{cases} |A| & ; A \text{ منتهية} \\ +\infty & ; A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

نسمي $(X , P(X) , \mu)$ قياس العد

2- **قياس ديراك**: $a \in X \wedge X \neq \emptyset$

$$\mu_a : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \quad ; a \in X$$

$$A \to \mu_a = \begin{cases} 1 & ; a \in A \\ 0 & ; a \notin A \end{cases}$$

نسمي $(X , P(X) , \mu)$ قياس ديراك

3- **القياس المعدد** :

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \to \mu(A) = \begin{cases} 1 & ; A^c \text{ معدودة} \\ 0 & ; A \text{ معدودة} \end{cases}$$

حيث $\mathcal{A} = \left\{ A \in P(X) : \begin{array}{l} \text{إما } A \text{ معدودة} \\ \text{أو } A^c \text{ معدودة} \end{array} \right\}$

نسمي $(X , \mathcal{A} , \mu)$ القياس المعدود

4 **قياس لوبيغ** (تقييم قياس المجالات)

$$\mu : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

حيث $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ جبر بوريل

1] $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) \; ; \; A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

يعرف قياس المجالات : $]a,b[\, , [a,b]$

$$L(]b-a[) = b-a$$

تمارين:

$$\boxed{\forall A,B \in \mathcal{A} \; ; \; \mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)}$$

الحل: لدينا $\mu(A \Delta B) = 0$

$$\Rightarrow \mu\left((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\right)$$

بما أن $A \setminus B \cap B \setminus A = \emptyset$ ومنه

$$\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$$

علماً أن $\mu(A \setminus B) \geq 0 \wedge \mu(B \setminus A) \geq 0$

ومنه

$$\mu(A \setminus B) = 0 \wedge \mu(B \setminus A) = 0$$

ولكن

$\mu(A\setminus B)=\mu(A\setminus(A\cap B))=0$

ولدينا $A\cap B\subseteq A$

ومنه حسب الخاصية الفرقية :

$\mu(A\setminus(A\cap B))=\mu(A)-\mu(A\cap B)$

$\Rightarrow \mu(A)-\mu(A\cap B)=0$

$\Rightarrow \boxed{\mu(A)=\mu(A\cap B)}$ (1

$\mu(B\setminus A)=\mu(B\setminus(A\cap B))=0$

ولدينا $A\cap B\subseteq B$

ومنه حسب الخاصية الفرقية :

$\mu(B\setminus(A\cap B))=\mu(B)-\mu(A\cap B)$

$\Rightarrow \mu(B)-\mu(A\cap B)=0$

$\Rightarrow \boxed{\mu(B)=\mu(A\cap B)}$ (2

من 1 و 2 نجد :

$\mu(A)=\mu(B)$

2] $\forall A,B\in\Omega$:

$$\boxed{\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)}$$

إن $\mu(A\cup B)=\mu(A\cup(B\setminus A))$

وكون $A\cap(B/A)=\varnothing$ مجموعتان منفصلتان

$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$

$=\mu(A)+\mu(B\setminus(A\cap B))$

كون $A\cap B\subseteq B$ حسب الخاصية الفرقية

$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$

إذا كان (X,Ω,μ) فضاء مقيوس

عندئذ من أجل $B\subseteq X$ فأثبت أن

الدالة :

$\mu_B:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}_+$

$A\to\mu_B(A)=\mu(A\cap B)$ *

تشكل دالة قياس .

الحل: لنبرهن أن μ_B دالة قياس

علماً أن μ دالة قياس

الشرط الأول :

$\mu_B(\varnothing)\underset{\text{حسب }*}{=}\mu(B\cap\varnothing)=\mu(\varnothing)=0$

الشرط الثاني :

$\forall A_i\in\Omega\ ,\ A_i\cap A_j=\varnothing\ : i\neq j$

$\Rightarrow \mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\mu\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right)$

$=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B\cap A_i)\right)$

بما أن المجموعات A_i منفصلة مثنى مثنى
فإن المجموعات $(A_i \cap B)$ منفصلة مثنى مثنى
أي

$$\forall A_i \in \mathcal{R} , \ A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\Rightarrow (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$$

وبكون μ دالة قياس فإن:

$$\mu_B \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum \mu (B \cap A_i)$$

$$= \sum \mu_B (A_i)$$

القياس الخارجي

$$\mu^* : P(X) \to \bar{R}_+$$

نقول إنه قياس خارجي إذا حقق الشروط:

1] $\mu^*(\emptyset) = 0$

2] $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3] $\forall A_i \in P(X) ; \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

مثال: ليكن لدينا التابع

$$\mu^* : P(X) \to \bar{R}_+$$

$$\forall A \in P(X) : \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$$

المطلوب:

1) برهن أن μ^* يشكل قياساً خارجياً على أجزاء X

الحل: 1) لنبرهن أن $\mu^*(\emptyset) = 0$

إن:

$$|\emptyset| = 0 \Rightarrow \sqrt{|\emptyset|} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu^*(\emptyset) = 0}$$

2) نفرض أن $A \subseteq B$ فإن $|A| \leq |B|$

$$\Rightarrow \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|} \Rightarrow \boxed{\mu^*(A) \leq \mu^*(B)}$$

3) لنبرهن أن $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$

إن:

$$|\bigcup A_i| \leq \sum |A_i|$$

$$\Rightarrow \sqrt{|\bigcup A_i|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|A_i|}$$

ومنه:

$$\sqrt{|\bigcup A_i|} \leq \sum \sqrt{|A_i|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)}$$

2- بيّن أن μ^* لا تمثل دالة قياس

(ستبين انه لا توجد عبارة التساوي)

$\forall A, B \in P(X) : A \cap B = \emptyset$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

$\sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{|A| + |B|}$

$\neq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$

أي :

$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

مثال عددي :

$A = \{a_1, \dots, a_9\} \subseteq P(X) \Rightarrow |A| = 9$

$B = \{a_{10}, \dots, a_{25}\} \subseteq P(X) \Rightarrow |B| = 16$

نلاحظ أن $A \cap B = \emptyset$ ولكن :

$\mu^*(A) = \sqrt{|A|} = \sqrt{9} = 3$

$\mu^*(B) = \sqrt{|B|} = \sqrt{16} = 4$

$\mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{25} = 5$

$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

3) - استنتج جبر تام $\mathcal{A}$ بحيث $\mu^*_{|\mathcal{A}} = \mu$

إن $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

المجموعة القيوسة

نفرض μ^* دالة قياس خارجي على $X \neq \emptyset$ و $P(X)$ مجموعة اجزاء X عندئذ نقول عن $A \subseteq X$ إنها قيوسة بالنسبة لـ μ^* إذا تحقق

$\forall E \subseteq X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$

كما أن كلا من X و $\emptyset$ مجموعتان قيوستان

التوابع القيوسة : ليكن

$(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ و $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$

فضائي قياس عندئذ :

$f : X \to Y$

نقول عن f بانه تابع قيوس إذا وفقط إذا الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في Y (المستقر) هي مجموعة قيوسة في X (المنطلق)

والصيغة الجبرية لها :

$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Subject: c 7 / /

التابع الدرجي المتوس: (المميز)

$$\mathcal{X} : \underset{\text{جبرتام}}{\mathcal{A}} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longrightarrow \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

مثال عن التابع الدرجي المتوس:

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, X, A, A^c\}$$

مواصفه:

1) $\mathcal{X}_{X}(x) = 1 \quad , \mathcal{X}_{\varnothing}(x) = 0$

المجموعة كلها

2) $\bullet\ \mathcal{X}_{A \cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x)$

(حيث $A \cap B = \varnothing$)

الإثبات:

$$x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 0 \\ x \notin B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{X}_{A \cup B}(x) = 0 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x)$ (محققة)

إذا

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x \in A , x \notin B} \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 1 , \mathcal{X}_B(x) = 0 \\ \boxed{x \notin A , x \in B} \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 0 , \mathcal{X}_B(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{X}_{A \cup B}(x) = 1 = 1 + 0 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) & \text{محققة} \\ \mathcal{X}_{A \cup B}(x) = 1 = 0 + 1 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) & \text{محققة} \end{cases}$$

3) $\mathcal{X}_{A \cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x)$

الإثبات:

$$x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 1 \\ x \in B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{X}_{A \cap B}(x) = 1 = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x)$ (محققة)

$$x \notin A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 0 \\ x \notin B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{X}_{A \cap B}(x) = 0 = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x)$ (محققة)

$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 1 \quad , \mathcal{X}_B(x) = 0$

$x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 , \mathcal{X}_A(x) = 0$

ومنه

$\mathcal{X}_{A \cap B}(x) = 0 = 1 . 0 = \mathcal{X}_A(x) . \mathcal{X}_B(x)$ (محققة)

$\mathcal{X}_{A \cap B}(x) = 0 = 0 . 1 = \mathcal{X}_A(x) . \mathcal{X}_B(x)$ (محققة)

4- $A \subseteq B \Rightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x)$.

الإثبات:

$x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \; ; \; x \in B \Rightarrow \chi_B(x) = 1$

$\Rightarrow 1 \le 1$

$x \notin A \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \; ; \; x \in B \Rightarrow \chi_B(x) = 1$

$\Rightarrow 0 \le 1$

$x \notin A \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \; ; \; x \notin B \Rightarrow \chi_B(x) = 0$

$\Rightarrow 0 \le 0$

5- $\chi_{B/A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$.

حيث $A \subseteq B$.

الإثبات:

$B = A \cup (B \setminus A)$

بأن $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

ومنه:

$\chi_B(x) = \chi_A(x) + \chi_{B\setminus A}(x)$

$\Rightarrow \chi_{B\setminus A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$

6- $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

7- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

8- $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_{A\cap B}(x)$

التابع البسيط (مستقره اعداد منته)

$f : X \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

مثال عليه:

مثال 1: $\forall x \in X = [0,3]$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \le x < 1 \\ 1 & : 1 \le x < 2 \\ 2 & : 2 \le x < 3 \\ 3 & : x = 3 \end{cases}$$

مثال 2:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : 0 < x < \infty \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : -\infty < x < 0 \end{cases}$$

مثال 3:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

مبرهنة: كل تابع بسيط يمكن أن يكتب كتركيب خطي لمجموعة من الدوال الدرجية $\chi_A(x)$

معاملات التابع البسيط (c_i):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\text{قيم التابع البسيط}} \chi_{A_i}(x)$$

$f(x) = c_1 \chi_{A_1}(x) + \dots + c_n \chi_{A_n}(x)$

وفي حال:

$x \in A_i \Rightarrow \chi_{A_i}(x) = 1$

$x \in A_j \Rightarrow \chi_{A_i}(x) = 0$

مثال: ليكن $X = [0,7]$ وليكن

$$f = \begin{cases} 2 & : [0,3[\\ 3 & : [3,6[\\ 7 & : [6,7] \end{cases}$$

ومنه يكون التابع البسيط:

$$f(x) = 2 \cdot \chi_{[0,3[}(x) + 3\,\chi_{[3,6[}(x) + 7 \cdot \chi_{[6,7]}(x)$$

وعند $x = 6$:

$$x = 6 \Rightarrow \begin{cases} \chi_{[0,3[}(x) = 0 \\ \chi_{[3,6[}(x) = 0 \\ \chi_{[6,7]}(x) = 1 \end{cases}$$

وبالتالي

$$f(6) = 2 \cdot (0) + 3(0) + 7(1) = 7$$

إذا طلب مني اجمع $f(x)$ مع $g(x)$

واكتب التابع البسيط للمجموع

حيث:

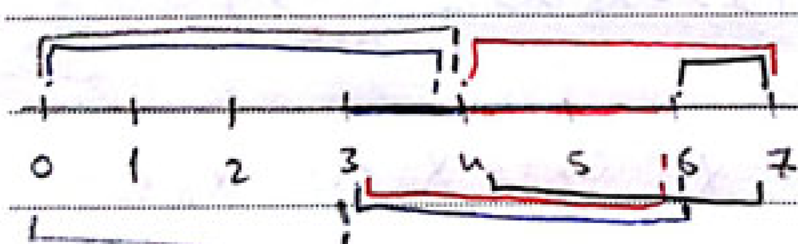
$$g(x) = \begin{cases} 5 & : [0,4[\\ 10 & : [4,7] \end{cases}$$

عندها التابع البسيط للمجموع:

((الجمع والطرح والضرب نفس الطريقة))

$$e(x) = (2+5) \cdot \chi_{[0,3[}(x) + (3+5) \cdot \chi_{[3,4[}(x) + (3+10) \cdot \chi_{[4,6[}(x) + (7+10) \cdot \chi_{[6,7]}(x)$$

لمعرفة كيف كتبت ذلك:



نأخذ المجال المشترك:

$$(2+5)\chi_{[0,3[} + (5+3)\chi_{[3,4[} + (10+3) \cdot \chi_{[4,6[} + (10+7)\chi_{[6,7]}$$

تكامل لوبيغ للتوابع البسيطة:

إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً قيوسًا
نعرف تكامل لوبيغ التابع البسيط f
بالنسبة للقياس μ على المجال X

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mu(A_i)$$

حيث c_i قيم التابع البسيط f
A_i تشكل تجزئة لـ X
وتعطى بالشكل

$$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$$

مثال: أوجد تكامل لوبيغ على المجال $[0,3]$

$$[x] = \begin{cases} 0 & : 0 \le x < 1 \\ 1 & : 1 \le x < 2 \\ 2 & : 2 \le x < 3 \\ 3 & : x = 3 \end{cases}$$

الحل:

$$\int_{[0,3]} [x]\,d\mu = 0.\mu([0,1[) + 1.\mu([1,2[) + 2.\mu([2,3[) + 3\mu([3,3])$$

حيث:

$$\mu([0,1[) = 1 - 0 = 1$$

$$\mu([2,3[) = 3 - 2 = 1$$

$$\mu([3,3]) = 0$$

ومنه

$$\int_{[0,3]} f\,d\mu = 1.1 + 2.1 + 3.0 = 3$$

لايجاد التغير الكلي:

اسهل الطريقة هي رؤية التابع
متى يكون متزايد ومتى متناقص
لتطبيق القانون

$$V_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

في حال كان متناقص

$$V_a^b f = |f(a) - f(b)|$$