الفصل السادس والسابع

لمحة تعريفات التقارب:

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء مقيس حيث $\mathcal{M}$ جبر تام و μ قياس

1- التقارب النقطي: نقول عن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ إنها تتقارب نقطياً من f

حيث:

$f_n : X \to \mathbb{R}$ و $f : X \to \mathbb{R}$ مقيسة:

إذا كانت:

$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ تتقارب من $f(x)$ وذلك أياً يكن $x \in X$

أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon, x) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

من أجل كل $x \in X$ وعندئذ نكتب:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{نقطياً}} f$$

2- تقارب متتالية غالباً في كل مكان (a.e):

نقول أن f_n متقاربة (a.e) من f ونرمز لذلك $f_n \xrightarrow{a.e} f$

إذا وفقط إذا كانت:

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$$

3- تعريف التقارب بالقياس:

نقول عن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ من الدوال القيوسة إنها تتقارب بالقياس μ من دوال قيوسة f إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ فإن $\{f_n\}$ تكون متتالية لكوشي بالقياس μ.

4- تعريف آخر التقارب بالنسبة لقياس معطى:

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء مقيس و $\mu(X) < \infty$ ولنضع:

$$D(f, g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu$$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \iff D(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5- : $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ حيث $\mathcal{L}^1$ فضاء متتاليات عُرِّف عليه المسافة

$$d_1(f, g) = \int_X |f-g| \, d\mu$$

$$(f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f) \iff (\int |f_n - f| \, d\mu \to 0)$$

مبرهنة هامة: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس بحيث μ قياس موجب على الجبر التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $X \neq \emptyset$

ولتكن $\{g_n\}_{n\geq 1}$ ، $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين من الدوال القيوسة المعرفة على الفضاء $(X, \mathcal{A})$

ولتكن f, g دالتين قيوستين معرفتين على ذلك الفضاء وليكن α, B عددين حقيقين كيفيين عندئذ:

1- إذا كان: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$

فإن:

$$(\alpha f_n + B g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} (\alpha f + B g)$$

2- إذا كان $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$ فإن $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} |f|$

3- إذا كان $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g$ فإن $g = f$ a.e $[\mu]$

الاثبات:

1) نريد إثبات أن $(\alpha f_n + B g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} (\alpha f + B g)$

ومن أجل ذلك واستناداً للتعريف انه لكل $\varepsilon > 0$ حقيقي موجب فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X : |(\alpha f_n + B g_n)(x) - (\alpha f + B g)(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

نميز عدة حالات:

أ) $\alpha = 0$ و $B \neq 0$ فإن:

$$\lim \mu\left(\{x \in X : |(B g_n)(x) - (B g)(x)| \geq \varepsilon\}\right) =$$

$$= \lim \mu\left(\{x \in X : |B g_n(x) - B g(x)| \geq \varepsilon\}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in X : |B|.|g_n(x)-g(x)| \geq \varepsilon\}) =$$

$$\underset{\text{تقسم على } |B| \text{ يجوز لأن } B\neq 0}{=} \lim \mu(\{x\in X : |g_n(x)-g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|B|}\}) \underset{\text{لدينا فرضا } g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g}{=} 0.$$

ب) إذا كان $\alpha\neq 0$ و $B=0$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in X : |(\alpha f_n)(x) - (\alpha f)(x)| \geq \varepsilon\}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x\in X : |\alpha f_n(x) - \alpha f(x)| \geq \varepsilon\}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x\in X : |\alpha|.|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) =$$

$$\underset{\text{يجوز القسمة على } |\alpha| \text{ لأن } \alpha\neq 0}{=} \lim \mu(\{x\in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\}) \underset{\text{فرضا } f_n \to f}{=} 0$$

ج) إذا كان $\alpha=0$ و $B=0$

$$\lim \mu(\{x\in X : 0 \geq \varepsilon\}) \underset{\varepsilon>0}{=} \lim_{n\to+\infty} \mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

د) إذا كان $\alpha\neq 0$ و $B\neq 0$

من أجل كل $x\in X$ وكل $n\geq 1$ طبيعي يكون:

$$|(\alpha f_n + Bg_n)(x) - (\alpha f + Bg)(x)| =$$

$$= |\alpha f_n(x) + Bg_n(x) - \alpha f(x) - Bg(x)|$$

$$= |\alpha(f_n(x) - f(x)) + B(g_n(x) - g(x))| \leq |\alpha||f_n(x)-f(x)| + |B||g_n(x) - g(x)|$$

أي :

$$|(\alpha f_n + \beta g_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \leq |\alpha| . |f_n(x) - f(x)| + |\beta| |g_n(x) - g(x)|$$

لكل $x \in X$ ولكل $n \geq 1$ عن أجل ε حقيقي موجب يكون :

$$\{x \in X : |(\alpha f_n + \beta g_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \in X : |\alpha| . |f_n(x) - f(x)| + |\beta| |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \in X : |\alpha| . |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |\beta| . |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\underset{\substack{\text{نقسم على} \\ |\beta| \text{ و } |\alpha|}}{=} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\} \cup \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}$$

أصبح لدينا :

$$\{x \in X : |(\alpha f_n + \beta g_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$\subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\} \cup \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}$$

من أجل كل $n \geq 1$ طبيعي و ε حقيقي موجب وبما أن μ قياس موجب فهو متزايد ونصف جمعي وعليه :

$$0 \leq \mu(\{x \in X : |(\alpha f_n + \beta g_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \geq \varepsilon\})$$

$$\leq \mu\{x \in X : |f_n - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\} + \mu\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $n \to \infty$ وبالاستفادة من كون :

$$g_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mu} g \quad \text{و} \quad f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mu} f$$

نحصل على: $0 \le \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x\in X : |(\alpha f_n+\beta g_n)(x)-(\alpha f+\beta g)(x)| \geqslant \varepsilon\})$

$\le 0+0=0$

لكل $\varepsilon>0$ حقيقي موجب أي

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x\in X : |(\alpha f_n+\beta g_n)(x)-(\alpha f+\beta g)(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

لكل $\varepsilon>0$ حقيقي موجب الأمر الذي يعني أن:

$$(\alpha f_n+\beta g_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} (\alpha f+\beta g)$$

- بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد أن مجموع متتاليتين متقاربتين بالقياس هو متتالية متقاربة بالقياس.

- بأخذ $\alpha=1$ ، $\beta=-1$ نجد أن فرق متتاليتين متقاربتين بالقياس هو متتالية متقاربة بالقياس.

إذا أتت بالفصل يجب نعوض قيم α, β منذ البداية

أي إذا أراد المجموع فنعوض $\alpha=\beta=1$

وإذا أراد الفرق نعوض $\alpha=1$ ، $\beta=-1$.

---

2 - لنفرض أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ولنثبت أن $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} |f|$

ومن أجل ذلك نثبت استنادا للتعريف:

أنه لكل $\varepsilon>0$ حقيقي موجب فإن:

$$\lim \mu(\{x\in X : ||f_n|(x)-|f|(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

من أجل كل $x\in X$ وكل $n\geqslant 1$ يكون:

$$||f_n|(x)-|f|(x)| = ||f_n(x)|-|f(x)|| \le |f_n(x)-f(x)|$$

من أجل $\varepsilon>0$ حقيقي موجب يكون:

$$\{x\in X : ||f_n|(x)-|f|(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{x\in X : |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

وبما أن μ قياس موجب فهو تزايدي وعليه :

$$0 \leq \mu(\{x \in X : ||f_n|(x) - |f|(x)| \geq \varepsilon\})$$

$$\leq \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

بأخذ نهاية طرفي المتراجحة السابقة عندما $n \to \infty$

ومع الاستفادة من كون $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ نحصل على :

$$0 \leq \lim \mu(\{x \in X : ||f_n|(x) - |f|(x)| \geq \varepsilon\}) \leq 0$$

لكل $\varepsilon > 0$ حقيقي موجب

أي :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : ||f_n|(x) - |f|(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

لكل $\varepsilon > 0$ الأمر الذي يعني أن :

$$|f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} |f|$$

---

3 - بأسلوب الكتاب سأبرهنه

لنفرض أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g$ وليكن $\varepsilon > 0$ عندئذ

باستخدام متراجحة المثلث نجد أن :

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup$$

$$\cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

ويكون بالتالي : $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) \leq$

$$\leq \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\})$$

وعندما يسعى $n \to \infty$ نجد :

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

ولكن

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{x : |f(x) - g(x)| > 0\})$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\}\right)$$

إذاً

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\}\right) = 0$$

أي $g = f \;\; a.e\,[\mu]$

الفصل السادس

تعريف: لنفرض أن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{M}$ جبر تام من اجزاء X

نقول عن متتالية $\{E_j\}_{j \geq 1}$ من عناصر $\mathcal{M}$ إنها تجزئة للمجموعة E

من $\mathcal{M}$

إذا $E = \bigcup_{i \geq 1} E_j$ حيث $E_j \cap E_k = \emptyset \quad j \neq k$

تعريف القياس العقدي: ليكن التطبيق $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$

نقول عن μ إنه قياس عقدي إذا تحقق مايلي:

1] $\mu(\emptyset) = 0$

2] $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

3] $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

نتيجة: من أجل μ_1 قياس حقيقي موجب و μ_2 قياس حقيقي موجب

عندئذ: $\mu_1 + i\mu_2$ قياس عقدي

وبالتالي نستنتج:

من أجل كل قياس عقدي μ فإنه:

$\exists \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$: حيث $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$

التغير الكلي لقياس عقدي:

ليكن (X, A, μ) فضاء مقيس "حيث μ قياس عقدي"

ونعرف:

$$|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \quad : \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \right\}$$

$|\mu|$ قياس موجب مولد بـ μ

ويبرهن أن $\lambda = |\mu|$ قياس موجب منته أي: $|\mu|(X) < \infty$

ونسمي $|\mu|$ التغير الكلي للقياس μ.

- التغير الموجب والتغير السالب لقياس حقيقي:

ليكن μ قياساً حقيقياً أي: $\mu : A \to \mathbb{R}$ وليكن $|\mu|$ التغير الكلي

لـ μ (إن $|\mu|$ موجب ومحدود) ولنضع:

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}$$ (نسميه: التغير الموجب لـ μ)

$$\mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}$$ (نسميه التغير السالب لـ μ)

فيكون كلاً من μ^+ و μ^- قياسين موجبين ومحدودين على $\mathcal{A}$ وإن:

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad (\text{يسمى تفريق جوردان لـ } \mu)$$

و

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

- القياس الموجب تكون مجموعة قيمه $[0, \infty]$

القياس الحقيقي الموجب تكون مجموعة قيمه $[0, \infty[$

الاستمرار المطلق لقياس بالنسبة لقياس آخر:

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس.

$$f : X \to \mathbb{R}_+ \quad \text{(قيوس موجب)}$$

ولنشكل قياس آخر:

$$\upsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

$$E \mapsto \upsilon(E) = \int_E f \, d\mu$$

وإن (υ قياس موجب)

- نقول عندها أن υ مطلق بالاستمرار بالنسبة لـ μ:

$$\mu(E) = 0 \implies \upsilon(E) = \int_E f \, d\mu = 0$$

ونرمز لذلك بـ: $\upsilon \ll \mu$

ويكون:

$$\int_E d\upsilon = \int_X \mathbb{1}_E \, d\upsilon = \upsilon(E)$$

$\int_E f\,d\mu = \nu$ ، $d\nu = f\,d\mu$, $\frac{d\nu}{d\mu} = f$

(تسمى f تابع كثافة ν بالنسبة لـ μ)

بالنتيجة:

ليكن لدينا القياسان ν , μ عندها:

$\mu(E)=0 \Rightarrow \nu(E)=0 \Leftrightarrow \nu \ll \mu$

ملاحظة: إن $\nu \le \mu \Rightarrow \nu \ll \mu$ صحيح

لكن العكس غير صحيح ومثال عن ذلك

$\nu = 10\mu$ إن $\nu \ll \mu$ ولكن $\nu \not\le \mu$

نظرية رادون نيكوديم:

$\nu \ll \mu \Rightarrow \exists$ محولة f : $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$

أي $\mu \ll \mu_1$ "مطلق بالاستمرار بالنسبة لـ μ_1"

$\Leftrightarrow (\mu_1(E)=0 \Rightarrow \mu(E)=0) \Leftrightarrow (\exists f : \mu(E) = \int_E f\,d\mu)$

برهنة رادون-نيكودم-لوبيغ:

يطلب ذكر نصها وشرح رموزها:

- ليكن λ و ν قياسين موجبين محدودين على الحيز التام $\mathcal{A}$ من اجزاء $X \neq \emptyset$ عندئذٍ

هناك زوج وحيد من القياسات الموجبة λ_a , λ_s على $\mathcal{A}$ يحققان

1] $\lambda_a \ll \nu$

2] $\lambda_s \perp \nu$

3] $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ "تدعى هذه المساواة: تفريق لوبيغ للقياس λ بالنسبة ν"

4] $\lambda_a \perp \lambda_s$

5] $\exists\, h \in \mathcal{L}^1(\mu)\ ;\ h \geq 0\ ,\ \lambda_a(E) = \int_E h \, d\nu$

$\forall\, E \in \mathcal{A}$

شرح بعض الرموز:

*) $\mu_2 \ll \mu_1$ تعني: " μ_1 يساير μ_2 "

**) $\mu_1 \perp \mu_2$ تعني " μ_1 يباين μ_2 "

أي تعني: $\exists\, A_1 \longrightarrow \mu_1$ " μ_1 محمول على A_1 "

$\exists\, A_2 \longrightarrow \mu_2$ $\qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset$

إذا كان f تابع عقدي

نكتب: $f = u + i v$

$$\int f \, d\mu = \int u \, d\mu + i \int v \, d\mu$$

انتهى الفصل السادس والسابع

((Zeina Brown))

(معلومات متنوعة)

تذكرة بالدوال ذات التغير المحدود :

مبرهنة : الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة f ذات تغير محدود على مجال مغلق محدود هو أن تكون فرقاً لدالتين متزايدتين

ملاحظات :

1- كل تابع متزايد على مجال مغلق ومحدود هو تابع ذو تغير محدود

2- إذا كانت F دالة حقيقية ومتزايدة ومستمرة ووصفنا :

$$\lambda^*_F(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) \; ; \; \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\supseteq A \right\}$$

فإن λ^*_F قياس خارجي على $\mathbb{R}$ يقيس كل مجال $]a, b[$ بالفرق $F(b) - F(a)$

ومقصوره على $B_{\mathbb{R}}$ هو قياس ونسميه قياس لوبيغ ستيلجس بوريل على $\mathbb{R}$

تعريف :

$$\Lambda : C[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \Lambda f = \int_0^1 f(t)\,dt$$

إن Λ خطي

يحقق الخواص التالية :

1) $\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g$

2) $\Lambda(\alpha f) = \alpha \Lambda f$, 3) $f \geq 0 \Rightarrow \Lambda f \geq 0$

يمكن أن يأتي أذكر نص مبرهنات ريس الثلاثة

مبرهنات ريس الثلاث (مهم) :

1 - مبرهنة ريس رقم (1)

كل دالة خطي موجب على $C[0,1]$ تمثل بتكامل.

أي نستطيع أن أجد A جبر تام و μ قياس بحيث

$$\forall f \in C[0,1] \quad : \Lambda f = \int_{[0,1]} f(t)\, d\mu(t)$$

بحيث $\mu(k) < \infty$

---

2 - مبرهنة ريس رقم (2) : إذا كان Λ خطياً موجباً فإنه :

يوجد تابع γ محدود التغير وبحيث يكون : $\Lambda f(t) = \int_0^1 f(t)\, d\gamma(t)$

أي يمكن تمثيله بتكامل ستيلجس

$$\exists \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$: \Lambda f(t) = \int_0^1 f(t)\, d\gamma(t)$$

ويكون :

$$\|\Lambda\| = \overset{1}{\underset{0}{V}}ar(\gamma)$$ "أي التغير الكلي"

---

3 - مبرهنة ريس في فضاء هلبرت

كل f شكل خطي موجب على فضاء هلبرت

$$f : (H, \langle \cdot , \cdot \rangle) \to \mathbb{R}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

يمكن تمثيله على شكل جداء داخلي أي :

$$\exists y_0 : f(x) = \langle x, y_0 \rangle$$

ويكون $\|f\| = \|y_0\|$

النهاية العليا لمتتالية من الأعداد:

إذا كانت $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية فليس من الضروري أن تكون متقاربة أو متباعدة.

وعندها:
$$B_1 = \sup\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$$
$$B_2 = \sup\{a_2, \dots a_n, \dots\}$$
$$\vdots$$
$$B_n = \sup\{a_n, \dots\}$$

إن B_n متتالية متناقصة وبالتالي نهايتها موجودة

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \overline{\mathbb{R}}$$

"B هي موجودة ووحيدة وتسمى:

نهاية الحدود العليا

تسمى B: النهاية العليا للمتتالية $\{a_n\}_{n\geq 1}$

ونكتب: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = B$

وهي عدد حقيقي محدود أو غير محدود من $\overline{\mathbb{R}}$

النهاية الدنيا لمتتالية من المجموعات

إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من المجموعات، وإذا شكلنا المتتالية:

$$B_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$B_2 = \bigcap_{m=2}^{\infty} A_m$$

$$\vdots$$

$$B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

إن B_n متتالية وبالتالي نهايتها تساوي حدها الأعلى أي $B = \sup B_n$ ونرمز لها بـ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. نسمي المجموعة B النهاية الدنيا لمتتالية المجموعات ونكتب $B = \underline{\lim}\, A_n$

الربط بين نظرية القياس وفضاء الاحتمال :

نرمز للفضاء الاحتمالي بالشكل $(\Omega, ع, P)$ حيث :

Ω : مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية

ع : مجموعة الاحداث المرتبطة بالتجربة العشوائية وتحقق :

1) $\emptyset$ الحدث المستحيل ومحتواه

2) Ω الحدث الاكيد ومحتواه

3) $A, B \in$ ع $\Leftarrow$ $A \cup B, A \cap B, A - B, A^c \in$ ع

من 1) و 2) و 3) نجد أن ع جبر

توضيحات : نفرض $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ متتالية من الاحداث

عندها :

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in$ ع هو حدث يقع إذا وقع واحد على الاقل من الاحداث $A_1, \ldots, A_n, \ldots$

وكذلك :

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in$ ع : حدث يتحقق إذا تحققت جميع الاحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

P الاحتمال : دالة منطلقها جبر تام (جبر الاحداث) ومستقرها $[0,1]$

تحقق ما يلي :

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $0 \leq P(\Omega) \leq \infty$

3) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

4) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ " ت الاتحاد المنفصل "

موزاييك

إذا وجد $A \in \mathcal{E}$ $\emptyset \neq$ بحيث $P(A)=0$ عندئذ ندعو A الحدث شبه المستحيل.

يمكن أن يكون الفضاء الاحتمالي غير كامل
أي: في حال $A \in \mathcal{E}$ و $P(A)=0$ و $B \subseteq A$ فليس بالضرورة أن يكون $B \in \mathcal{E}$
أي: ليس بالضرورة كل مجموعة جزئية من حدث تكون حدث"

في حال الفضاء غير كامل عندها يمكن إيجاد متمم له.
أمد P إلى P^* بالشكل:

$$P^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$$

$$P^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) : A_k \in \mathcal{E} \; ; \; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq E \right\}$$

P^* قياس خارجي وليس بالضرورة قياس.

- ونعلم من مبرهنة كاراتيودوري الأولى أن كل قياس خارجي يولد جبر تام ويكون مقصوره على ذلك الجبر التام قياس

- إذاً P^* تولد جبر تام وليكن $\mathcal{M}^*$ ويكون $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}^*$ ويكون $P^*|_{\mathcal{M}^*}$ قياس أي (مقصور P^* على $\mathcal{M}^*$ قياس)

- $$P^*(E) = P(E) \quad \text{if} \quad E \in \mathcal{E}$$

- P^* تحقق خواص القياس الخارجي:

1] $P^*(\emptyset) = 0$, $P^*(\Omega) = 1$
2) $P^*(A) \leq P^*(B)$ if $A \subseteq B$
3] $P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n)$

تعريف المتغير العشوائي: هو تابع قيوس لحقق أن الصورة العكسية لمجال ما هي حدث

حيث:

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

ومنه الصورة العكسية لاي مجال حدث أي:

$\forall a, b \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq b$

$\Rightarrow$ $[a \leq X \leq b] = \{\omega ; a \leq X(\omega) \leq b\}$ حدث

وكذلك:

$[a < X \leq b] = \{\omega ; a < X(\omega) \leq b\}$ حدث

وكذلك

$[a \leq X < \infty] = \{\omega : a \leq X(\omega)\}$ حدث

وهكذا!

نحن مستهم بدراسة الحدث $[X < \alpha]$
$= \{\omega : X(\omega) < \alpha\}$

ولنرمز لاحتمال هذا الحدث بالرمز:

$$F_X(\alpha) = P(\{\omega : X(\omega) < \alpha\})$$

ويسمى F_x دالة التوزيع الاحتمالي.

F_x قابل للاشتقاق $\Leftarrow$ يسمى مشتقه كثافة المتغير العشوائي

F_x تابع متقطع $\Leftarrow$ يكون المتغير العشوائي متقطع

F_x تابع مستمر $\Leftarrow$ يكون المتغير العشوائي مستمر

F_x مستمر باطلاق $\Leftarrow$ يكون المتغير العشوائي مستمر باطلاق

تذكرة : إذا كان (Ω, ξ, P) فضاءً احتمالياً فإن :

وتحقق :

1) $P(\Omega) = 1 \quad , \quad P(\emptyset) = 0$

2) $P(A) + P(A^c) = 1$

3) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

4) $A \subseteq B \quad ; \quad P(A) \leq P(B)$

إذا كان فضاء العينة منتهياً فتكفي هذه الشروط

وإذا لم يكن منتهياً فيجب إضافة الشرط (٥) :

5) $\Rightarrow A_1, A_2, \dots \in \xi \quad : \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

في حال كانت الأحداث متنافية فإن العلاقة تصبح مساواة "

ومنه :

$P(A_n) \nearrow P(A) \Longleftarrow$ (متتالية متزايدة من الأحداث) $A_n \nearrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$P(A_n) \searrow P(A) \Longleftarrow$ (متتالية متناقصة من الأحداث) $A_n \searrow \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

كل قياس يولد قياس خارجي $\Leftarrow$ الاحتمال يولد احتمال خارجي

قياس خارجي

تسمى المجموعة المهملة في هذا الفضاء الحدث شبه المستحيل

المتغير العشوائي :

$X : \xi \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\omega)$

الحدث $[X < \alpha] = [X \in]-\infty, \alpha[]$ هنا يدل على الحدث الذي

يتحقق إذا أخذ X قيمة أصغر من α أي :

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad : \quad [X < \alpha] \in \xi$

ونعرف : $F_X(\alpha) = P[X < \alpha] = P[X \in]-\infty, \alpha[]$

دالة التوزيع الاحتمالي

وتتمتع بخواص نذكر بعض منها :

$F_X(-\infty) = 0 \quad , \quad F_X(+\infty) = 1$

$F_X(\alpha) \leq F_X(B)$

لنأخذ $\mu : B_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ قياس موجب ومحدود

ولنعرف : $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

عندها من أجل $F(\alpha) \geq 0$, $\forall \alpha \in B$: $F(\alpha) \leq F(B)$

عندها ادعو F دالة توزيع القياس μ

انتهينا من الفضاء الاحتمالي

تذكرة : موجودة في الفصل الثالث من الكتاب

- من أجل (X, τ_X) ، (Y, τ_Y) فضاءين قوسين ولنأخذ $X \times Y$ ، يمكن أن أعرف من الجداء $\tau_X \otimes \tau_Y$ لأنه أصغر حيز تام يجعل التوابع الاسقاط قوسة

- ليكن (X, τ) ، (Y, τ_Y) فضاءين قوسين وليكن

$$(X, \tau) \xrightarrow[g]{f} (Y, \tau_Y)$$

الصورة العكسية لجبر تام هي جبر تام

عندها يكون:

$$\tau_x(f) = f^{-1}(\tau_y) = \{f^{-1}(\theta) : \theta \in \tau_y\}$$

جبر تام وهو أصغر جبر تام يجعل f مستمراً

بالمثل:

$$\tau_x(g) = g^{-1}(\tau_y) = \{g^{-1}(\theta) : \theta \in \tau_y\}$$

جبر تام وهو أصغر جبر تام يجعل g مستمراً

ولكن هذا لا يعني أنه سيجعل f مستمراً

- إن $\tau_x(g)$ ، $\tau_x(f)$ جبرين تامين لكن:

$\tau_x(f) \cup \tau_x(g)$ ليس بالضرورة جبراً تاماً

- نحسب أصغر جبر تام يحوي $\tau_x(f)$ و $\tau_x(g)$ ونسميه الجبر التام المولد بـ f, g

- إذا كانت لدينا أسرة من التوابع القيوسة:

$$f_1 : X \to (Y_1, m_{e1})$$

$$f_2 : X \to (Y_2, m_{e2})$$

$$\vdots$$

$$f_n : X \to (Y_n, m_{en})$$

عندها:

$\{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in m_{ei} \; ; \; i = 1, \dots, n\}$ جبور تامة، ولكن اتحادها

ليس بالضرورة جبر تام.

وأصغر جبر تام يحويها نسميه: الجبر التام المولد بالأسرة $\{f_1, \dots, f_n\}$

تمرين 3 ص 79 من الفصل الثالث:

خذ $f(x)=x^2$ وحدد المتتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ من التوابع الدرجية المتقاربة

f الموافقة لما ورد في مبرهنة لوبيغ القياسية

من أجل $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ووضح ذلك

برسومات مناسبة.

الحل:

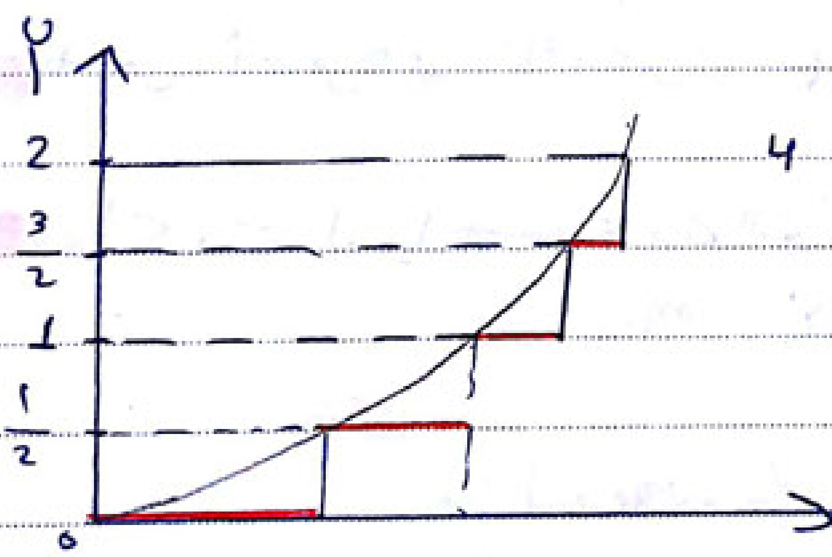
$\mathbb{R}_+ = [0,2^n[\cup [2^n,+\infty[$

لأجل $n=1$ ⇐ $\mathbb{R}_+ = [0,2[\cup [2,+\infty[$

لأجل $n=2$ ⇐ $\mathbb{R}_+ = [0,2^2[\cup [2^2,+\infty[$

عدد المجالات الجزئية = $\dfrac{\text{الحد الأعلى للمجال الجزء} - \text{الحد الأدنى للمجال الجزء}}{\text{طول المجال الجزء}}$

عدد المجالات = $\dfrac{2^n-0}{\frac{1}{2^n}}$



$n=1$ ⇐ عدد المجالات = $\dfrac{2^1}{\frac{1}{2^1}} = 4$

الرسم يكون كما يلي:

1- نرسم التابع $f(x)=x^2$

2- نقسم ٢ إلى $\frac{1}{2^1}$ = طول المجالات

حيث نبدأ من الصفر حيث نقسم 4 أجزاء على عدد المجالات

3- ونرسم على شكل توابع درجية

الترجمة الكتابية :

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(x) \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{if} \quad f(x) \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & \text{if} \quad f(x) \in [1, \frac{3}{2}[\\ \frac{3}{2} & \text{if} \quad f(x) \in [\frac{3}{2}, 2[\\ 2 & \text{if} \quad f(x) \in [2, +\infty[\end{cases}$$

تمرين : لنأخذ التابع $f : X \to \mathbb{R}$ حيث $X = [1, \infty[$

$\forall x \in X \quad : f(x) = 0$

ولنأخذ : $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[1,n]}(x)$

$$\chi_{[1,n]} = \begin{cases} 1 & : x \in [1, n] \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب : هل $f_n \xrightarrow{a.e} f$ (1)

هل $f_n \xrightarrow{L^1} f$ (2)

هل $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (3)

الحل : (1)

$\forall x \in X \quad : 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$

$\to 0$

ومنه $f_n(x) \to f(x) = 0$ ومنه (1) محققة

(2) هل $f_n \xrightarrow{L_1} f$ ؟ $\Leftrightarrow \int |f_n - f| d\mu \xrightarrow{?} 0$

كلا لأن : $\int \frac{1}{n} \chi_{[1,n]}(x)\, d\mu$

$= \frac{1}{n}(n-1) \longrightarrow 1 \neq 0$

(3) $\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{?} 0$

$\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{x : |\frac{1}{n} \chi_{[1,n]}(x) - 0|\}) \geq \varepsilon\} \xrightarrow{?} 0$

لتكن $\{x : \frac{1}{n} \chi_{[1,n]}(x) > \varepsilon\} = A_n(\varepsilon)$

$\{x : \chi_{[1,n]}(x) > n\varepsilon\} = A_n(\varepsilon)$

$\{x : \chi_{[1,n]}(x) > n\} = A_n(\varepsilon)$

نلاحظ $n \geq 1$ أياً كان :

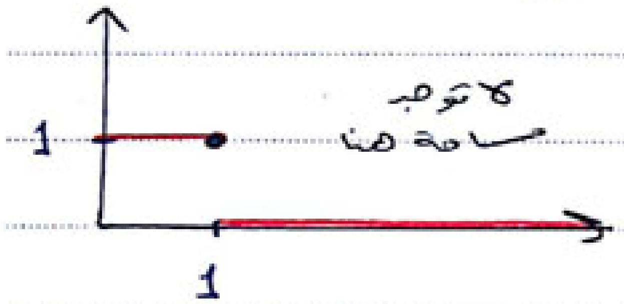
$\{x : \chi_{[1,n]}(x) > n\} = \emptyset$

$\mu(A_n(\varepsilon)) = \mu(\emptyset) \quad \text{if} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$

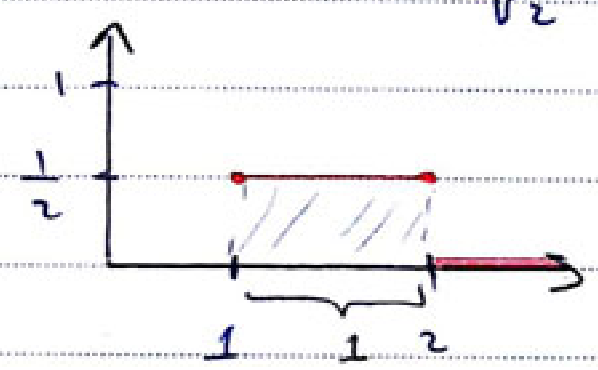
$\Longrightarrow \mu(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

تم حل f_1 و f_2 و f_3

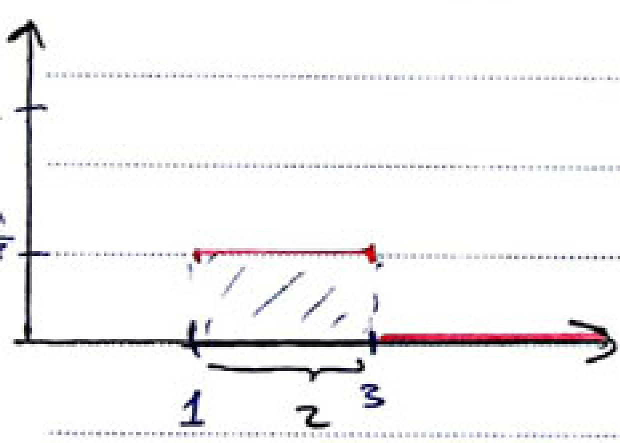
$$f_1 = 1 \cdot \chi_{[1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [1,1] \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



$$f_2 = \frac{1}{2} \chi_{[1,2]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : x \in [1,2] \\ 0 & : \text{خلاف} \end{cases}$$



$$f_3 = \begin{cases} \frac{1}{3} & : x \in [1,3] \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



$$\int f_1 = 0$$

$$\int f_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int f_3 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\vdots$$

$$\int f_n = \frac{n-1}{n}$$

التكامل هو المساحة : مساحة الجزء المظلل بين $f_n(x)$ و ox

انتهى المقرر بالتوفيق

كانت معكم المراسلة زينه البني ... دعواتكم لي