الفصل الثالث

تمهيد : إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين وكان :

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto f(x)$$

تطبيق

فإن :
$$f^{-1} : P(Y) \to P(X)$$
$$E \mapsto f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$$

تطبيق

يسمى : تطبيق الصورة العكسية وفق f للمجموعات الجزئية من Y

خواصه :

1) $f^{-1}(Y) = X \quad ; \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

2) إذا كان $E_1, E_2 \in P(Y)$ (أي $E_1, E_2 \subseteq Y$) حيث $E_1 \subseteq E_2$ فإن

$$f^{-1}(E_1) \subseteq f^{-1}(E_2)$$

3) إذا كان $E_1, E_2 \in P(Y)$ (أي $E_1, E_2 \subseteq Y$) فإن :

$$f^{-1}(E_1 - E_2) = f^{-1}(E_1) - f^{-1}(E_2)$$

4) إذا كان $E \in P(Y)$ (أي $E \subseteq Y$) فإن :

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$$

5) إذا كان $E_i \in P(Y)$ (أي $E_i \subseteq Y$) وحيث $i \in I$ فإن :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i)$$

وحيث I هي مجموعة ما من الأدلة وبحالة خاصة $I=\mathbb{N}^*$ أو I مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{N}^*$

تدريب : اثبت انه إذا كان τ جبراً تاماً على Y فإن الجماعة:

$$(\star)\quad S = \{ f^{-1}(E) \; : E \in \tau \}$$

جبر تام على X.

صيغة أخرى : أثبت أن الصورة العكسية وفق تطبيق ما لجبر تام في المستقر هو جبر تام في المنطلق.

الاثبات :

لنثبت ان S جبر على X أي لنثبت أن :

1) $\emptyset \in S$

2) $\forall A_1, A_2 \in S \quad ; \quad A_1 \cup A_2 \in S$

3) $\forall A \in S \quad ; \quad A^c \in S$

لنبدأ بـ (1) :

1) $\underbrace{\emptyset \in \tau}_{\text{كون } \tau \text{ جبر}} \underbrace{\Longrightarrow}_{\star \text{ من}} f^{-1}(\emptyset) \in S \Longrightarrow \boxed{\emptyset \in S}$

2) $\forall A_1, A_2 \in S \underbrace{\Longrightarrow}_{\star \text{ من}} \exists E_1, E_2 \in \tau \; ; \begin{cases} A_1 = f^{-1}(E_1) \\ A_2 = f^{-1}(E_2) \end{cases}$

$$\Longrightarrow A_1 \cup A_2 = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2) \Longrightarrow A_1 \cup A_2 = f^{-1}(E_1 \cup E_2)$$

«وكون $E_1 , E_2 \in \tau$ و τ جبر $\Longleftarrow E_1 \cup E_2 \in \tau$»

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب } *} f^{-1}(E_1 \cup E_2) \in S \Longrightarrow \boxed{A_1 \cup A_2 \in S}$$

3) $\forall A \in S \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب } *} \exists E \in \tau : A = f^{-1}(E)$

«كون $E \in \tau \Leftarrow E^c \in \tau$»

ومنه حسب تعريف $*$ نجد :

$$f^{-1}(E^c) \in S \Longrightarrow (f^{-1}(E))^c \in S \Longrightarrow \boxed{A^c \in S}$$

من كل ما سبق نستنتج أن S جبر على X

بقي إثبات أن S هو جبر تام على X :

- إن S هو جبر تام على X لأنه يحقق الشرط ه وسبب تحققه هذا هو :

$$\forall A_1 , A_2 , \ldots , A_n , \ldots \in S \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب } *} \exists E_1 , \ldots , E_n , \ldots \in \tau : A_n = f^{-1}(E_n)$$

لكل $n \geq 1$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(E_n) \Longrightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = f^{-1}\Big(\bigcup_{n \geq 1} E_n\Big)$$

«كونا $E_1 , \ldots , E_n , \ldots \in \tau \Leftarrow \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \tau$»

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب } *} f^{-1}\Big(\bigcup_{n \geq 1} E_n\Big) \in S \Longrightarrow \boxed{\bigcup_{n \geq 1} A_n \in S}$$

نستنتج أن S جبر تام من اجزاء المطلق X

تعريف التطبيق (الدالة) القيوسة: ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$ وليكن $(Y, \mathcal{B})$ فضاء قيوس آخر حيث $\mathcal{B}$ جبر تام على $Y \neq \emptyset$ وليكن:

تطبيق $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$

عندئذ:

نقول عن التطبيق f إنه قيوس بالنسبة للجبرين التامين $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (اختصاراً قيوس) إذا كانت:

«الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة قيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق» أي:

$$f \text{ قيوس} \underset{\text{تعريفاً}}{\iff} f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \;;\; \forall B \in \mathcal{B}$$

تدريب: اثبت أن تركيب تطبيقين قيوسين هو تطبيق قيوس

الاثبات: لنفرض أن $(X_i, \mathcal{A}_i)$ فضاء قيوس وحيث $\mathcal{A}_i$ جبر تام على $X_i \neq \emptyset$ و $i = 1, 2, 3$ ولنفرض أن:

تطبيق قيوس $f_1 : X_1 \to X_2$

تطبيق قيوس $f_2 : X_2 \to X_3$

عندئذ إن تركيب التطبيقين f_1, f_2 جائز ونحصل على التطبيق:

$$f = f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$$

لنثبت أن: تطبيق قيوس $f = f_2 \circ f_1$ أي لنثبت أن:

$$f^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_1 \;;\; \forall A_3 \in \mathcal{A}_3$$

"من تعريف الدالة القيوسة"

لنفرض أن A_3 عنصر كيفي من $\mathcal{A}_3$ وكون f_2 قيوس فإن:

$$f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$$

بما أن $f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$ و f_1 تطبيق قيوس فإن:

$$f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1 \Longrightarrow (f_1^{-1} \circ f_2^{-1})(A_3) \in \mathcal{A}_1$$

$$\Longrightarrow (f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{f^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_1} \quad \#$$

تدريب: ليكن $(X, \mathcal{A})$ ف.ق حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$.
وليكن $(Y, \mathcal{B})$ فضاء قيوس آخر حيث $\mathcal{B}$ جبر تام على $Y \neq \emptyset$
ولنفرض أن

$$\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq P(Y) \quad \text{بحيث} \quad \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) = \hat{\mathcal{E}}$$

عندئذ الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق:

$$f : X \to Y \quad \text{قيوس}$$

هو أن يكون:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad , \quad B \in \mathcal{E}$$

أي:

$$\ll f \ \text{قيوس} \Longleftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ ; \forall B \in \mathcal{E} \gg$$

"$\Longrightarrow$"

الإثبات: لنفرض أن f قيوس:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ ; \forall B \in \mathcal{B} \qquad (\star)$$

إن $\hat{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$ ونعلم أن $\mathcal{B}$ سيكون أصغر جبر تام يحوي $\mathcal{E}$
أي $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ مما يعني أن $(\star)$ محققة.

"$\Leftarrow$" لنفرض أن $f^{-1}(B)\in \mathcal{A}\ ;\ \forall B\in \mathcal{E}$ $(\star\star)$

ولنثبت أن f قيوس أي لنثبت أن : $f^{-1}(B)\in \mathcal{A}\ ;\ \forall B\in \mathcal{B}$.

من اجل ذلك لنعرف الصف $\mathcal{B}_1$ من اجزاء Y كمايلي :

$\heartsuit\quad \mathcal{B}_1 = \{ B\subseteq Y \ :\ f^{-1}(B)\in \mathcal{A} \}$

إن $\boxed{\mathcal{E}\subseteq \mathcal{B}_1}$ لأن :

من "$(\star\star)$" $f^{-1}(B)\in \mathcal{A}\ ;\ \forall B\in \mathcal{E}$

وبما أن $B\subseteq Y$ حسب $\heartsuit$ فإن $B\in \mathcal{B}_1$

- إن الصف $\mathcal{B}_1$ جبر تام من اجزاء Y "سنثبت ذلك في تمرين قادم".

اصبح لدينا $\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}\subseteq \mathcal{B}_1 \\ \& \\ \mathcal{B}_1 \text{ جبر تام على } Y \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \sigma(\mathcal{E}) = \hat{\mathcal{E}}} \sigma(\mathcal{E}) = \hat{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{B}_1 \underbrace{\Longrightarrow}_{\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}} \boxed{\mathcal{B}\subseteq \mathcal{B}_1}$

من اجل أي عنصر $B\in \mathcal{B}_1$ فإن $f^{-1}(B)\in \mathcal{A}$ وبالتالي كون $\mathcal{B}\subseteq \mathcal{B}_1$

فإن ما سبق محقق على عناصر $\mathcal{B}$ أي :

$$f^{-1}(B)\in \mathcal{A}\ ;\ \forall B\in \mathcal{B}$$

تدريب : لتكن $Y, X \neq \emptyset$ وليكن $\mathcal{A}$ جبر تام على X عندئذ أثبت أن الجماعة

$\mathcal{B} = \{ B\subseteq Y \ :\ f^{-1}(B)\in \mathcal{A} \}$ جبر تام على Y

الاثبات : لنثبت أن :

1) $\emptyset \in \mathcal{B}$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ ;\ B_1\cup B_2 \in \mathcal{B}$

3) $\forall B\in \mathcal{B}\ ;\ B^c \in \mathcal{B}$

البرهان: نعلم أن

1) $\emptyset \subseteq Y$ & $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$

"من تعريف $\mathcal{B}$" $\Longrightarrow \boxed{\emptyset \in \mathcal{B}}$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

من تعريف $\mathcal{B}$:

$f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$

$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر تام}} f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A} \Longrightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \in \mathcal{A} \Rightarrow \boxed{B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}}$

3) $\forall B \in \mathcal{B}$

من تعريف $\mathcal{B}$:

$(f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{من تعريف } \mathcal{B}} \boxed{B^c \in \mathcal{B}}$

4) $\forall B_1, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{B} \Longrightarrow f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$

$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر تام}} \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \Longrightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \boxed{\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{B}}$

مبرهنة: إذا كان $(X, \mathcal{A})$ فضاءً قيوساً و $f : X \to \mathbb{R}$

فإن f يكون $\mathcal{A}$ - قيوس إذا تحقق واحد فقط من الشروط التالية:

1) $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]a, \infty[) \in \mathcal{A}$

2) $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, \infty[) \in \mathcal{A}$

3) $\forall a \in \mathbb{R} \quad : f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad : f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{A}$

ملاحظة : إن المجموعات السابقة تكتب بطريقة أخرى كما يلي :

- $f^{-1}(]a, \infty[) = \{x \in X : f(x) \in]a, \infty[\}$

$= \{x \in X : f(x) > a\} = [f > a]$

- $f^{-1}([a, \infty[) = \{x \in X : f(x) \in [a, \infty[\}$

$= \{x \in X : f(x) \geq a\} = [f \geq a]$

هكذا ♥

مبرهنة : ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$
ولتكن $\{f_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة المعرفة على $(X, \mathcal{A})$
والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ عندئذ القضايا الآتية صحيحة :

1- الدالتين $\min\{f_1, f_2\}$ و $\max\{f_1, f_2\}$ و $|f_1|$ تطبيقات قيوسة

2- الدالتين $\inf\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ و $\sup\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ قيوستين

3 $\liminf_{n \to \infty}\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$ و $\limsup_{n \to \infty}\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$ تطبيقان قيوسان

4- إذا كانت $\lim_{n\to\infty} f_n$ موجودة وتساوي f فإن f دالة قيوسة

بمعنى أنه إذا كانت المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من الدالة f فإن f قيوسة
ونقصد بالتقارب النقطي أن: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in X$

تدريب: إذا كان $(X, \mathcal{A})$ فضاءً قيوساً وكان: $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيقان قيوسين فإن:

1) $M_1 = \{x \in X \; : \; f(x) < g(x)\}$: مجموعة قيوسة

2) $M_2 = \{x \in X \; : \; f(x) \leq g(x)\}$: مجموعة قيوسة

3) $M_3 = \{x \in X \; : \; f(x) > g(x)\}$: مجموعة قيوسة

4) $M_4 = \{x \in X \; : \; f(x) \geq g(x)\}$: " "

5) $M_5 = \{x \in X \; : \; f(x) = g(x)\}$ " "

الإثبات: لنثبت أن $M \in \mathcal{A}$

لنثبت رقم (1): لدينا $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ فإذا كان $f(x) < g(x)$
حيث $x \in X$ فثمة عدد نسبي $r \in \mathbb{Q}$ بحيث $f(x) < r < g(x)$
(لأن بين كل عددين حقيقيين فيمكن يوجد عدد نسبي) وعليه نعرف المجموعة:

$$A_r = \{x \in X : f(x) < r < g(x)\} = \{x \in X : f(x) < r \; , \; r < g(x)\}$$

$= \{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : g(x) > r\}$

$\Longrightarrow A_r = f^{-1}(]-\infty, r[) \cap g^{-1}(]r, +\infty[)$

بما أن f قيوسة فإن :

$f^{-1}(]-\infty, r[) \in \mathcal{A} \quad ; \forall r \in \mathbb{Q}$

وبما أن g قيوسة فإن :

$g^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{A} \quad ; \forall r \in \mathbb{Q}$

لكل $r \in \mathbb{Q}$
$$\left.\begin{array}{c} f^{-1}(]-\infty, r[) \in \mathcal{A} \\ \& \\ g^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{كون } \mathcal{A} \text{ جبر تام}} f^{-1}(]-\infty, r[) \cap g^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{A}$$

$$\Longrightarrow A_r \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r \in \mathcal{A} \quad (\star)$$

لكن :

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) < r < g(x)\}$$

$$= \{x \in X : f(x) < g(x)\} = M$$

نعوض في $(\star)$ نحصل على $M \in \mathcal{A}$ وهو المطلوب

أي M قيوسة

العمليات الجبرية على الدوال القيوسة بالنسبة إلى جبر تام $P(X) \supseteq \mathcal{A}$

1- مجموع دالتين قيوستين هو دالة قيوسة

2- نظير دالة قيوسة هو دالة قيوسة

3- جداء دالتين قيوستين هو دالة قيوسة

4- الحد الأعلى لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة

الحد الادنى لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة

٦) النهاية العليا لمتتالية من الدوال القيوسة هي دالة قيوسة. ($\overline{\lim}\, f_n$)

٧) النهاية السفلى لمتتالية " " " " " ($\underline{\lim}\, f_n$)

ملاحظات للدالة الدرجية:

1- تسمى كل دالة قيوسة صورتها مجموعة منتهية دالة درجية

2- f دالة قيوسة موجبة $\Longleftrightarrow$ f هو نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية

3- تعريف الدالة الدرجية: لنفرض أن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على X عندئذ نقول عن التطبيق $f : X \to \mathbb{R}$ بأنه دالة درجية معرفة على الفضاء القيوس $(X, \mathcal{A})$ إذا كانت f من الشكل:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{لكل} \quad x \in X \quad \text{أي} \quad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

" أي الدالة درجية f هي عبارة عن تركيبة خطية بأمثال حقيقية لدوال مميزة لمجموعات قيوسة

4- كل دالة درجية على فضاء قيوس هي دالة قيوسة.

5- الدالة الدرجية (الدالة البسيطة) هي تلك التي تكون قيمها منتهية

6- f دالة قيوسة و ε دالة درجية

$\varepsilon : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$

$\varepsilon(x) = \{c_1, \dots, c_n\}$ $\Longleftrightarrow$ تقاطع عدد منته من القيوسات هو قيوسة

برهنة لوبيغ القيوسية : ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس
حيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$ ولنفرض أن :
$f : X \to \mathbb{R}$ تطبيق موجب
عندئذ :
الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق f قيوس هو :
وجود متتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة من الدوال الدرجية الموجبة المعرفة
على الفضاء القيوس $(X, \mathcal{A})$ والمتقاربة نقطياً من f أي :

التطبيق الموجب f قيوس $\Leftrightarrow \{\theta_n\}_{n\geq 1} : \theta_n \geq 0 \ \& \ \theta_n \leq \theta_{n+1} \ \& \ \lim \theta_n = f$

فكرة الاثبات فقط : لنفرض أن ثمة متتالية من الدوال الدرجية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على الفضاء $(X, \mathcal{A})$ ولنفرض أن تلك المتتالية متقاربة نقطياً من f أي :
$$\lim_{n \to +\infty} \theta_n = f$$

- بما أن θ_n دالة درجية فهي إذن دالة قيوسة وعليه $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة ويكون نهايتها موجودة فرضاً وتساوي f فهي دالة قيوسة.

لنفرض أن f دالة قيوسة ولنثبت وجود $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$
لنفرض أن n أي عدد صحيح موجب مثبت ولنضع :

$$E_n^r = \begin{cases} x \in X & : f(x) \in \left[\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}\right[\quad , \ 0 \leq r < 2^{2n} \text{ عندما} \\ x \in X & : f(x) \in [2^n, \infty] \quad : r = 2^{2n} \text{ عندما} \end{cases}$$

إن المجموعات E_n^r قيوسة من أجل كل n و r لأن f قيوس فرضاً.

لنعرّف $\varphi_n(x) = \sum_{r=0}^{r=2} \frac{r}{2^n} \chi_{E_n^r}(x)$

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \ f(x) \in [0, \frac{1}{2^n}[\\ \frac{1}{2^n} & ; \ f(x) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}[\\ \vdots & \\ \frac{r}{2^n} & ; \ f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\\ \vdots & \\ 2^n & ; \ f(x) \in [2^n, \infty[\end{cases}$$

إن θ_n دالة درجية كذلك فإن: $\theta_n(x) \leq f(x)$ من أجل كل x من X

لأن أصغر قيمة يأخذها f على E_n^r هي $f(x) = \frac{r}{2^n}$ من تعريف E_n^r

و (θ_n) متتالية تزايدية

وإن $\theta_n(x) \to f$ من أجل كل x من X

تصاغ هذه المبرهنة بأسلوب ثاني وهو الأهم:

((كل دالة قيوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية))

إذا أتى في الامتحان أكتب فكرة اثباتها فإننا نكتب:

نفرض أن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس بحيث $\mathcal{A}$ جبر تام على $X \neq \emptyset$

ونفرض أن: $f : X \to \mathbb{R}$ تطبيق موجب

"⟸" نفرض أن التطبيق الموجب f قيوس ونعرف متتالية الدوال $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على الفضاء القيوس $(X, \mathcal{A})$ والتي حدها العام الدالة φ_n بقاعدة الربط:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{if} \quad f(x) < n \\[2ex] n & \text{if} \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

لكل $x \in X$ ، ونثبت أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ هي متتالية من الدوال الدرجية المعرفة على $(X, \mathcal{A})$

وإن تلك المتتالية متزايدة ومتقاربة نقطياً من f .

"⟹" نفرض أنه توجد متتالية من الدوال الدرجية المعرفة على الفضاء القيوس وانها متزايدة ومتقاربة نقطياً من f ونثبت أن التطبيق الموجب f قيوس.

تدريب: أثبت: إذا كان f تابعاً قيوساً موجباً وإذا وصفنا

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{if} \quad f(x) < n \\[2ex] n & \text{if} \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

فإن $f_n \nearrow f$.

أي متتالية الدوال $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة ومتقاربة نقطياً من التابع القيوس f .

الاثبات: نثبت أن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة ومتقاربة نقطياً من f.

لنثبت أن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من f:

$$\frac{2^n f(x)-1}{2^n} \leq \frac{[2^n \cdot f(x)]}{2^n} \leq \frac{2^n f(x)}{2^n}$$

$$f(x)-\frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x) \leq f(x)+\frac{1}{2^n}$$

بالمرور للنهايات نجد:

$$f(x)-\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad , \quad f(x)+\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

حسب مبرهنة الاحاطة: $f_n(x) \to f(x)$

لنثبت أن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة وهنا نناقش حالتين:

- الحالة الاولى: إذا كانت $x\in X$ كيفية بحيث $\theta(x)<n$

فإن $\theta(x)<n+1$ ويكون:

$$f_n(x)=\frac{[2^n \cdot \theta(x)]}{2^n} \quad , \quad f_{n+1}(x)=\frac{[2^{n+1}\,\theta(x)]}{2^{n+1}}$$

ويكون لدينا:

نبدأ من هنا

$$f_{n+1}(x)=\frac{[2^{n+1}\cdot\theta(x)]}{2^{n+1}} \underbrace{\geq}_{\text{من خواص الدالة جزء الصحيح}} \frac{2[2^n\cdot\theta(x)]}{2^{n+1}}=\frac{[2^n\cdot\theta(x)]}{2^n}=f_n(x)$$

$[n.\alpha]\geq n.[\alpha]$

أي $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ وذلك لكل $x \in X$ تحقق $\theta(x) < n$

- الحالة الثانية : إذا كانت $x \in X$ كيفية حيث $n \leq \theta(x)$ ومن هنالدينا ايضاً حالتين:

أ) عندما $n < \theta(x) < n+1$ يكون

$$f_n(x) = n \quad , \quad f_{n+1}(x) = \frac{[2^{n+1} \cdot \theta(x)]}{2^{n+1}}$$

ويكون لدينا:

$$f_{n+1}(x) = \frac{[2^{n+1} \cdot \theta(x)]}{2^{n+1}} \geq \frac{2^{n+1} [\theta(x)]}{2^{n+1}} = [\theta(x)] = n = f_n(x)$$

لـ كون:

$n \leq f(x) \leq n+1$

حسب الخاصة من خواص الدالة الجزء الصحيح :

$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$

أي : $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ وذلك لكل $x \in X$ تحقق $n \leq \theta(x) < n+1$

ب) عندما $n+1 \leq \theta(x)$ يكون:

$$f_n(x) = n \quad , \quad f_{n+1}(x) = n+1$$

ويكون لدينا:

$$f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$$

أي : $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ وذلك لكل $x \in X$ تحقق $n+1 \leq \theta(x)$

من كل ماسبق نستنتج أنه :

$n \geq 1$ طبيعي $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ وذلك لكل $x \in X$

تدريب: أثبت أن الحد الأعلى لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة.

الاثبات: لدينا من الفرض: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة المعرفة على $(X, \mathcal{A})$ ولنفرض أن: $h = \sup\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ بقاعدة الربط

$$h(x) = \sup\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}(x) = \sup\{f_1(x), \dots f_n(x), \dots\} \quad \forall x \in X$$

ولنثبت أن الدالة h قيوسة.

من أجل ذلك يكفي إثبات أن:

$$h^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A} \quad ; \forall a \in \mathbb{R}$$

لدينا:

$$h^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in X : h(x) \in]-\infty, a[\}$$

$$= \{x \in X , \sup\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\} < a\}$$

لدينا من قاعدة ربط الدالة h

$$= \{x \in X ; f_n(x) < a\}$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} \{x \in X , f_n(x) < a\} = \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(]-\infty, a[)$$

$$\Longrightarrow h^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(]-\infty, a[)$$

بما أن f_n قيوسة لكل $n \geq 1$ فإن $f_n^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ لكل $a \in \mathbb{R}$ ولكل $n \geq 1$ طبيعي، وبما أن $\mathcal{A}$ جبر تام مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود

أي $\bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$

بالعودة نجد أن $h^{-1}(]-\infty,a[)\in \mathcal{A}$ ، $\forall a\in\mathbb{R}$
مما يعني أن h قيوسة.

تعريف آخر للدالة القيوسة:

$$f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

جبر بوريل

عندما f قيوس إذا تحقق احد الشروط:

1) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$: $f^{-1}(]\alpha,\infty[)\in\mathcal{A}$

2) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$: $f^{-1}([\alpha,\infty[)\in\mathcal{A}$

3) $\forall B\in\mathbb{R}$: $f^{-1}(]-\infty,B])\in\mathcal{A}$

4) $\forall \alpha,B\in\mathbb{R}:\alpha\leq B$: $f^{-1}(]\alpha,B])\in\mathcal{A}$

ملاحظة:

لنفرض أن X مجموعة ما غير خالية و $\{(Y_\alpha,\mathcal{A}_\alpha):\alpha\in I\}$ جماعة من الفضاءات القيوسة،

$f_\alpha:X\to Y_\alpha$ تطبيق لـ X في Y_α

من اجل كل α من مجموعة الادلة I.

فإن ثمة جبر تام أصغر $\mathcal{A}$ على X يجعل جميع التطبيقات f_α قيوسة.

تدريب:

إذا كان ε ، ψ تابعين درجيين على $X=[0,7]$ وكان

$$\psi=2\chi_{[0,3[}+3\chi_{[3,6]}+7\chi_{[6,7]}$$

$$\varepsilon=3\chi_{[0,4[}+5\chi_{[4,7]}$$

احسب $\mathcal{E}(6)$ و $\psi(6)$ ثم ارسم بيان كل منهما وحدد عبارة كل من

$$\mathcal{E}^2 , \psi^2 , \mathcal{E}+\psi , \mathcal{E}.\psi , \mathcal{E}-\psi$$

الحل: نستعرض فكرة الحل فقط:

نلاحظ أن ψ لم تكتب بالشكل النموذجي لنكتب ψ بالشكل النموذجي

$$\psi = 2\chi_{[0,3[} + 3\chi_{[3,6[} + (3+7)\chi_{\{6\}} + 7\chi_{]6,7]}$$

$$\psi = 2\chi_{[0,3[} + 3\chi_{[3,6[} + 10\chi_{\{6\}} + 7\chi_{]6,7]}$$

$$\int_X \mathcal{E}\, d\mu = 3\times 4 + 5\times 3 = 12+15 = 27$$

$$\int_X \psi\, d\mu = 2\times 3 + 3\times 3 + 10\times 0 + 7\times 1 = 22$$

$$\mathcal{E} = 3\chi_{A_1} + 5\chi_{A_2} \quad ; A_1 = [0,4[\ , A_2 = [4,7]$$

$$\psi = 2\chi_{D_1} + 3\chi_{D_2} + 10\chi_{D_3} + 7\chi_{D_4}$$

$$D_1 = [0,3[\ , D_2 = [3,6[\ , D_3 = \{6\} \ , D_4 =]6,7]$$

$$\mathcal{E} + \psi = \sum_{i=1}^{2}\sum_{J=1}^{4} (\alpha_i + \beta_J)\chi_{A_i \cap D_J}$$

$$= \gamma_1 \chi_{A_1\cap D_1} + \gamma_2 \chi_{A_1\cap D_2} + \gamma_3 \chi_{A_2\cap D_2} + \gamma_4 \chi_{A_2\cap D_3} + \gamma_5 \chi_{A_2\cap D_4}$$

لا يوجد تمرين لم أكتبه لكن سيكتب مع الفصل السادس والسابع وهو تمرين 3 ص79

حيث

$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 5$

$\gamma_2 = \alpha_1 + \beta_2 = 6$

$\gamma_3 = \alpha_2 + \beta_2 = 8$

$\gamma_4 = \alpha_2 + \beta_3 = 15$

$\gamma_5 = \alpha_2 + \beta_4 = 12$

ونكمل التمرين وظيفة

الفصل الرابع