وزارة التعليم العالي – جامعة دمشق　　　السنة الثالثة رياضيات　　　الوقت : ٢ – ٤

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　المقرر: تحليل 5　　　الاسم:

1

السؤال الأول (20 درجة): عرّف ما يلي بالتفصيل (مع توضيح جميع الرموز):

الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] ، **تكامل** استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على المجال [a,b]، **القياس** μ في الفضاء (X,Ω,μ)، **تكامل** لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ.

السؤال الثاني (20 درجة): **أثبت** أنه إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك بمثال.

السؤال الثالث (20 درجة): احسب التغير الكلي لكل من الدوال الآتية (مع الرسم):

$\frac{41}{2}$　$f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,5] \quad , \quad f(x)=x-|x|: \quad x\in[-5,5]$　10

1　$f(x)=\sin x: \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad , \quad f(x)=|x|: \quad x\in[-3,3]$　6

السؤال الرابع (40 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم g(x) :

1. $\int_0^3 (x^2+1)\,dg(x): \quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)\,d(x^2+1): \quad g(x)=[x]$
   17　　13

2. $\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$　$\frac{34}{3}$

3. $\int_0^6 x^2\,dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x<2 \\ 2 & 2\le x<4 \\ 3 & 4\le x\le 6 \end{cases}$　20

4. احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ) في فضاء القياس (X,Ω,μ):

$$\int_{[0,4]} [x]\,d\mu$$
6

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق　　　　　د. نايف طلي

السؤال الأول:

① تعريف الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] .

إذا كانت f دالة معرفة على المجال [a,b] ، وكانت P تجزئة عشوائية لهذا المجال [a,b] ، ولتكن:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

ونأخذ المجموع

$$V(P,f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

ثم نأخذ

$$\bigvee_a^b f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(P,f)$$ التغير الكلي للدالة f

فإذا كان $\bigvee_a^b f < \infty$ فإننا نسمي f دالة ذات تغير محدود على [a,b] .

② تعريف تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على [a,b] .

إذا كانت f و g دالتين معرفتين محدودتين و حقيقيتين على [a,b]

وأخذنا التجزئة العشوائية P لـ [a,b] ،

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

عندئذ نعرف المجموع (استيلجس)

$$S(P,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k \; ; \; t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$; \; \Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$$

نقول عن f إنه قابل لمكاملة بالنسبة لـ g على [a,b] إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ حيث

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k = \int_a^b f \, dg = A$$

$$\|P\| \longrightarrow 0 \; ; \; \|P\| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \; ; \; \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

٣ : تعريف القياس μ في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

إذا كانت $X \neq \Phi$ ، $\mathcal{A}$ جبر تام على X . نعرف القياس μ

بأنه تابع $\mu : \mathcal{A} \xrightarrow{1} \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ يحقق الشرطين

$$1)\ \mu(\Phi) = 0 \quad 1$$

$$2)\ \forall A_i \in \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \Phi \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$i \in N \qquad 1 \quad i \neq j \qquad 2$$

---

٤ تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ

يُعرف بالشكل

$$2 \quad \int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mu(A_i)$$

1 حيث c_i قيم التابع البسيط f .

1 و A_i تشكل تجزئة لـ X ، وتُعطى بالشكل

$$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\}) \quad 1$$

السؤال الثاني :

f د.ت.م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$

f د.ت.م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $\bigvee_a^b f < \infty$

$$\big|\,|f(x_n)| - |f(x_{n-1})|\,\big| \leq |f(x_n) - f(x_{n-1})| \quad 4$$

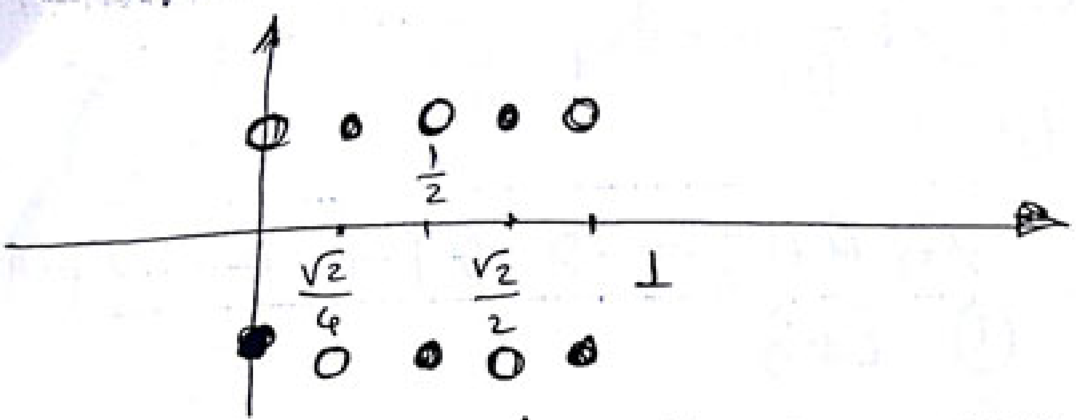
$$\sum_{k=1}^{n} \big|\,|f(x_n)| - |f(x_{n-1})|\,\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n-1})| \quad 4$$

$$\bigvee_a^b |f| \leq \bigvee_a^b f < \infty \quad 2$$

وهذا يعني أن $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$.

ملاحظة: $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$ $\not\Leftarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

مثال: نأخذ الدالة f المعرفة على $[0,1]$ المعينة بالعلاقة



$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1) بما أن $|f(x)| = 1$ دالة ثابتة على $[0,1]$ فهي دالة د.ت.م على $[0,1]$ والتغير الكلي لها صفر.

2) نأخذ التجزئة $P = \{x_0, x_1, \dots x_n : x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = 1\}$

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \uparrow & \not\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \dots & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$f(x) \to \quad (-1) \quad 1 \quad (-1) \quad (-1)$$

$$V(P,f) = |1-(-1)| + |-1-1| + \dots + |-1-1|$$
$$= 2 + 2 + \dots + 2 = 2n$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty \Rightarrow$$

f ليست د.ت.م على $[0,1]$.

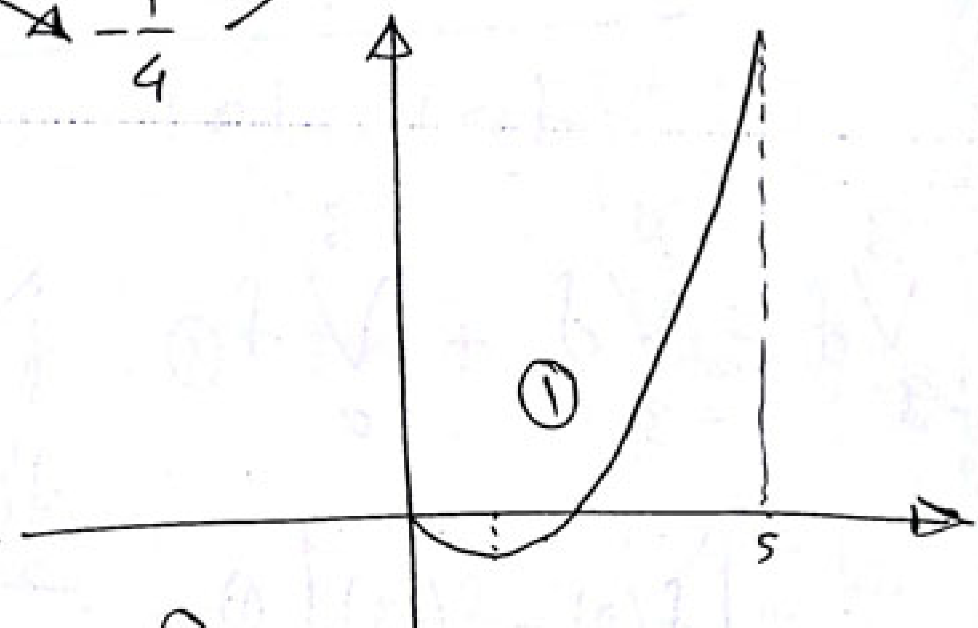
(2) $f(x)=x^2-x \quad : x\in[0,5]$ (4)

$f'(x)=2x-1 \quad ; \quad f'(x)=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+ + + +$	
		0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	20	

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$f(5)=25-5=20$



$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{5}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f$ (1)

$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \left|f(0)-f(\tfrac{1}{2})\right| + \left|f(5)-f(\tfrac{1}{2})\right|$ (1) (1)

$f(x)=x(x-1)$
$x=0,\ x=1$

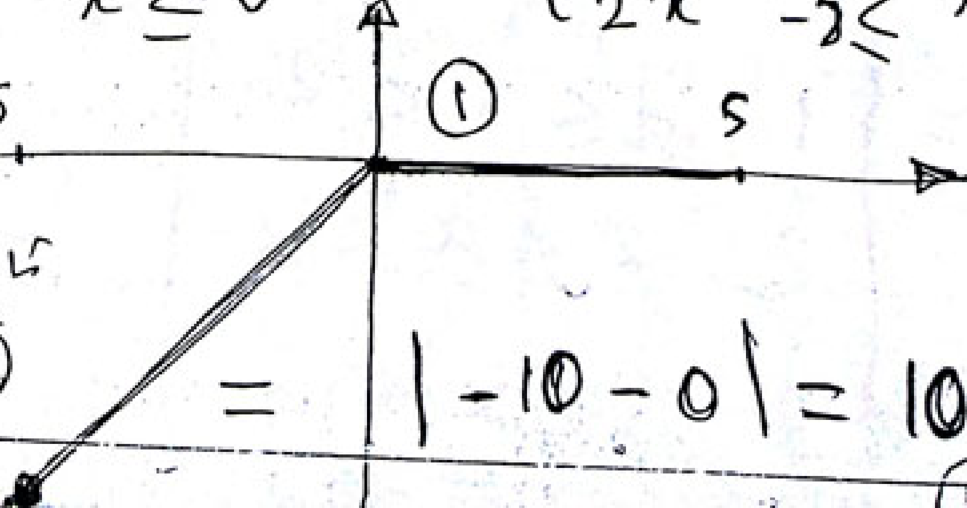
$=\left|0-(-\frac{1}{4})\right| + \left|20-(-\frac{1}{4})\right| = \frac{1}{4}+20+\frac{1}{4}$

$=20\frac{1}{2}=\frac{41}{2}$ (1)

(c)

$f(x)=x-|x| \quad : x\in[-5,5]$

$=x-\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\le 0 \end{cases}$ (1) $=\begin{cases} 0 & 5\ge x>0 \\ 2x & -5\le x\le 0 \end{cases}$



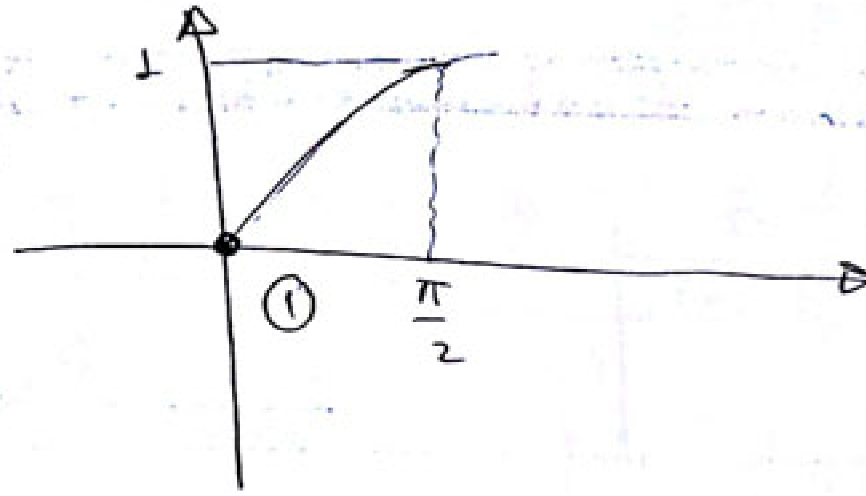
$\overset{5}{\underset{-5}{V}} f = \overset{0}{\underset{-5}{V}} f + \overset{5}{\underset{0}{V}} f$ (1)

$=\left|f(-5)-f(0)\right| + \underset{\text{ثابتة}}{0}$ (1) $=\left|-10-0\right|=10$

$f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\, g$

ب) السؤال ... : $f(x) = \sin x \;;\; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

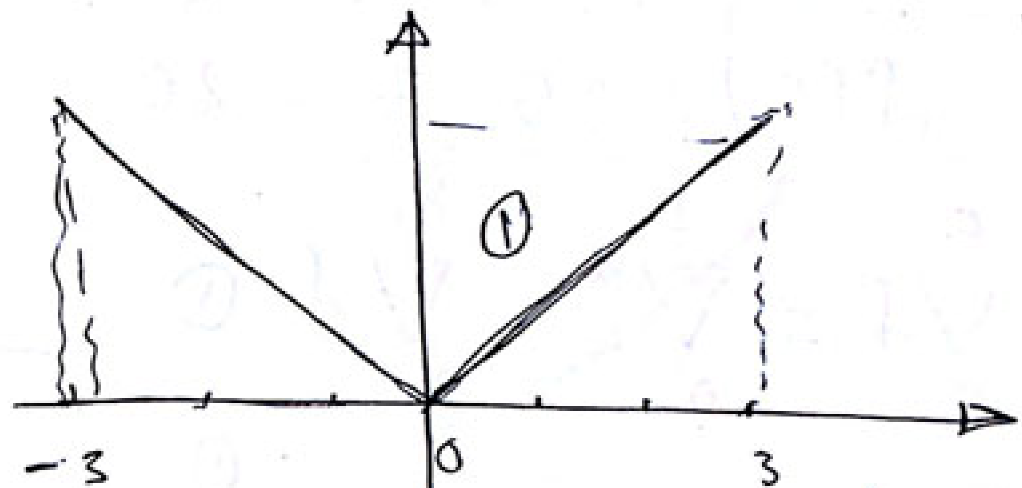
تابع متزايد .



$$\overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| f(\tfrac{\pi}{2}) - f(0) \right| \quad (٢)$$

$$= |1 - 0| = 1 \quad (٢)$$

$f(x) = |x| \;;\; x \in [-3, 3]$



$$\overset{3}{\underset{-3}{V}} f = \overset{0}{\underset{-3}{V}} f + \overset{3}{\underset{0}{V}} f \quad (1)$$

$$= |f(0) - f(-3)| \quad (1)$$

$$+ |f(3) - f(0)| \quad (1)$$

$$= |0 - 3| + |3 - 0| = 6 \quad (1)$$

السؤال الثالث

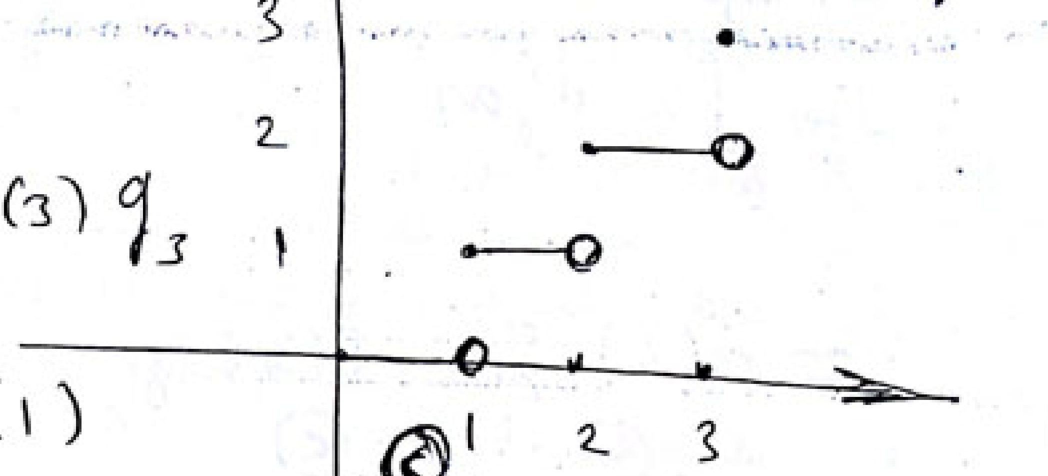
$$\int_{[0,4]} [x]\, d\mu = 0\,\mu[0,1[+ 1\,\mu[1,2[+ 2\,\mu[2,3[+ 3\,\mu[3,4[+ 4\,\mu[4,4] \quad (٤)$$

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & 3 \le x < 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$$

$$= \cancel{0(1)} + 1(1) + 2(1) + 3(1) + \cancel{4(0)} \quad (٥)$$

$$= 6 .$$

$$\int_0^3 (x^2+1)\, d[x] =$$



$$f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\, g_3$$

$$= 2(1) + 5(1) + 10(1)$$

$$= 17$$

7

$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3$

$$\int_0^3 g(x)\, d(x^2+1) = \left[f(x)\, g(x)\right]_0^3 - \int_0^3 f(x)\, dg(x)$$

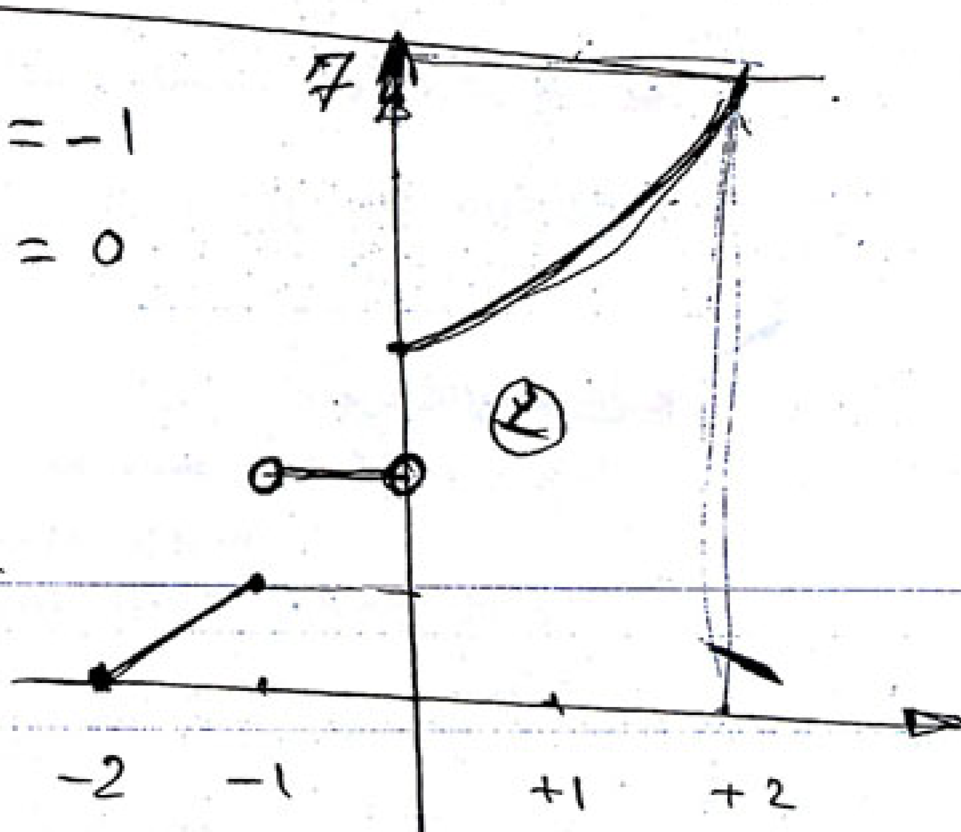
c

$$= \left[(10)(3) - 0\right] - 17 = 13$$

2

$c_1 = -1$

$c_2 = 0$



$$I = \int_{-2}^{2} x^2\, dg(x)$$

$$= \int_{-2}^{-1} x^2 (1)\, dx + \int_{-1}^{0} x^2 (0)\, dx$$

$$+ \int_0^2 x^2 (2x)\, dx$$

0

$$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right] + f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 + 1\,(2-1) + 0$$

1

$$= \frac{1}{3}\left[-1 + 8\right] + \frac{1}{2}(16) + 1 = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}$$

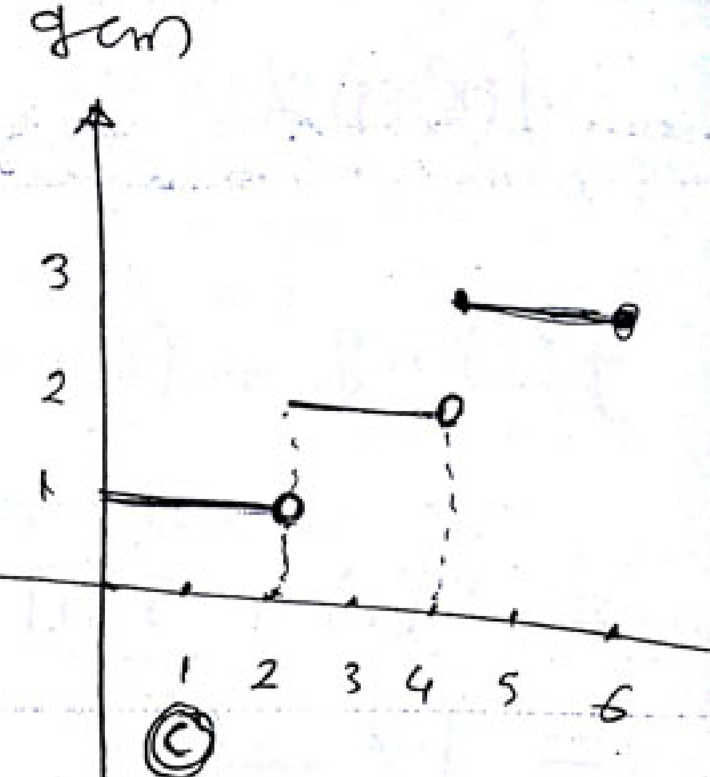
1

$\int_0 x \, d\,\text{gem}$

$$I = \int_0^6 x^2 \, d\,\text{gem}$$

$$= f(2)\cdot g_1 + f(4)\cdot g_2$$

$$= 4\,(1) + 16\,(1) = 20$$



$c_1 = 2, \quad c_2 = 4$

⑤ التاريخ: ٢٣/١/٢٠١٤م

وزارة التعليم العالي – جامعة دمشق

كلية العلوم – قسم الرياضيات

اختبار الفصل الأول

المادة: تحليل 5 المدة: ساعتان

السنة الثالثة: رياضيات الاسم:

السؤال الأول(40 درجة):

1. عرّف ما يلي بالتفصيل(مع توضيح جميع الرموز):

الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] ، **تكامل** استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على المجال [a,b]، **القياس** μ في الفضاء (X,Ω,μ)، **تكامل** لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ.

2. **بيّن** أنه إذا كانت الدالتان f , g متزايدتين على المجال [a,b] فإن f+g دالة متزايدة على المجال [a,b]، لكن (دالة الفرق) f-g و (دالة الجداء) f*g ليس بالضرورة.

السؤال الثاني(20 درجة): إذا كانت f دالة معرفة على المجال [0,1/2] كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

والمطلوب:

1. بين أن f مستمر على [0,1/2]
2. وضح أن f متزايدة [0,1/2]
3. هل f د.ت.م ثم أوجد التغير الكلي
4. بين أن f لا تحقق شرط ليبشتز k=1

السؤال الثالث(20 درجة): احسب تكاملي استيلجس (I_1,I_2) مع الرسم لـ $\alpha(x)$:

$$I_1=\int_{-2}^{2}x^2d\alpha(x):\quad \alpha(x)=\begin{cases}x+2 & -2\le x\le -1\\ 2 & -1\prec x\prec 0\\ x^2+3 & 0\le x\le 2\end{cases}\quad ,\qquad I_2=\int_{0}^{4}x^2d\alpha(x):\quad \alpha(x)=[x]$$

السؤال الرابع(20 درجة):

1. برهن صحة العبارة في فضاء القياس (X,Ω,μ):

$$\forall A,B\in\Omega\qquad \Rightarrow\quad \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$

2. إذا كانت X={a,b,c,d} و τ={{a,b},{d}} أوجد أصغر حلقة وأصغر جبر على X يحوي τ.

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

سلم تصحيح " حيل " : فز...

السؤال الأول :

① الدالة ذات التغير المحدود على المجال $[a,b]$: إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ ، وكانت $\mathcal{P}$ تجزئة عشوائية لهذا المجال

$$\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, x_2, \dots x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b \} ,$$

نأخذ المجموع

$$V(P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

التغير الكلي للدالة f :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(P)$$

فإذا كانت $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ فإننا نسمي f د. ت. م على $[a,b]$

---

② إذا كانت f, g دالتين معرفتين ومحدودتين وحقيقيتين على $[a,b]$.

نأخذ التجزئة العشوائية $\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, \dots x_n : x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b \}$

عندئذ نعرف مجموع استيلجس

$$S(P, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k$$

حيث $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$; $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \underset{[a,b]}{} : P \supset P_\epsilon \Rightarrow | S(P, f, g) - A | < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k = \int_a^b f \, dg = A$$

حيث $\|P\| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

---

③ إذا كانت $X \neq \Phi$ ، وكان $\mathcal{A}$ جبر σ على X . نعرف التابع $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ،

نقول عن التابع μ إنه قياس إذا حقق الشرطين

1. $\mu(\Phi) = 0$

2. $\forall A_i \in \mathcal{A}_{i \in N} : A_i \cap A_j = \Phi_{i \neq j} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

---

④ تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ يُعطى بالشكل

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i) \; ; \; \{c_i\}_{i=1,n} \text{ قيم التابع } f \; , \; A_i \text{ تمثل تجزئة لـ } X$$

$A_i = \{ x \in X : f(x) = c_i \} = f^{-1}(c_i)$

$x_0 \in]0,\frac{1}{2}[\Rightarrow$ [illegible] :

① $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln x_0} = f(x_0)$ ،

② $x_0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -\frac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$ ،

③ $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$ ،

وبالتالي تابع مستمر على $[0,\frac{1}{2}]$.

$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0 \; ; x \in]0,\frac{1}{2}[$

x	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$+ \quad + \quad +$	
$f(x)$	0 ↗ متزايد	$\cancel{\frac{1}{\ln 2}}$ 0

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 0$

---

④ f دالة متزايدة (مطردة) على مجال محدود فهي د. ت. م .

التغيرات $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left|\frac{1}{\ln 2} - 0\right| = \frac{1}{\ln 2}$ 0

---

⑤ شرط ليبشتز مع $k=1$

$\forall u, v \in [0,\frac{1}{2}], \exists L > 0 : |f(u) - f(v)| \le L|u - v|$

لنبين أنه هنالك u ، v من أجلها لا يوجد L يحقق الشرط ،

نأخذ $v = 0$ ، $u \overset{>}{\to} 0$ ولنبين أنه لا يوجد L بحيث $\lim\limits_{\to 0} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \le L$.

$u, v \in [0,\frac{1}{2}]$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\left|-\frac{1}{\ln x} - 0\right|}{x - 0} = -\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x \ln x}$

$= -\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ إذاً لا يوجد L

2014

(٥) f متزايدة، g متزايدة $\Rightarrow$ $(f+g)$ متزايدة

f متزايدة : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

g متزايدة : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

$\Rightarrow$

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2)$$

$$(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2) \quad : \quad x_1 < x_2$$

إذن $f+g$ دالة متزايدة .

مثال (١) الدالتان $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x$ على $[0,1]$ دالتين متزايدتين بينما

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

دالة غير متزايدة على $[0,1]$ لأن

$\varphi'(x) = 2x - 1$

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
إشارة		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	متناقصة	$-\frac{1}{4}$	متزايدة	0

مثال (٢) : دالة الجداء $f(x) = x$ ، $g(x) = x-1$ على $[0,1]$

$$\varphi(x) = x(x-1)$$

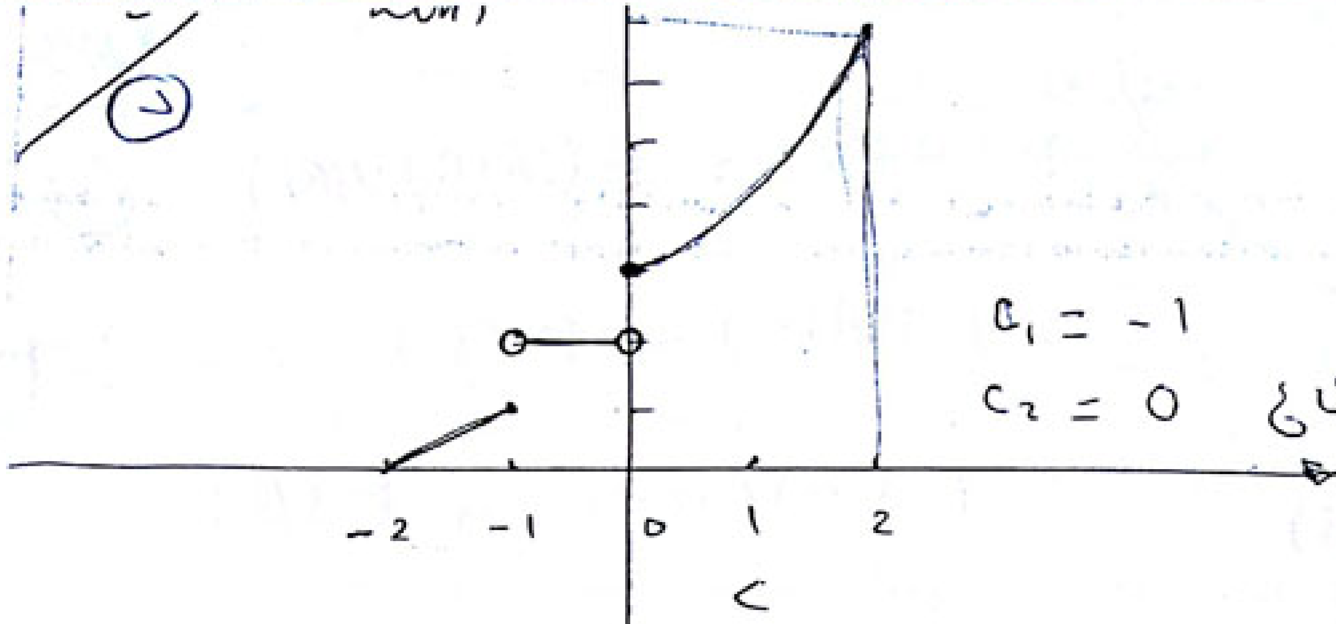
نحصل على دالة (مثل الدالة السابقة) غير متزايدة على $[0,1]$

نستنتج أن f ، g متزايدة $\Rightarrow$ $f+g$ متزايدة

بينما ليس بالضرورة $f-g$ متزايدة ، $f \cdot g$ متزايدة

ب

سؤال الثالث



$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x \\ 2 & -1 < x < \\ x^2+3 & 0 \le x \le \end{cases}$$

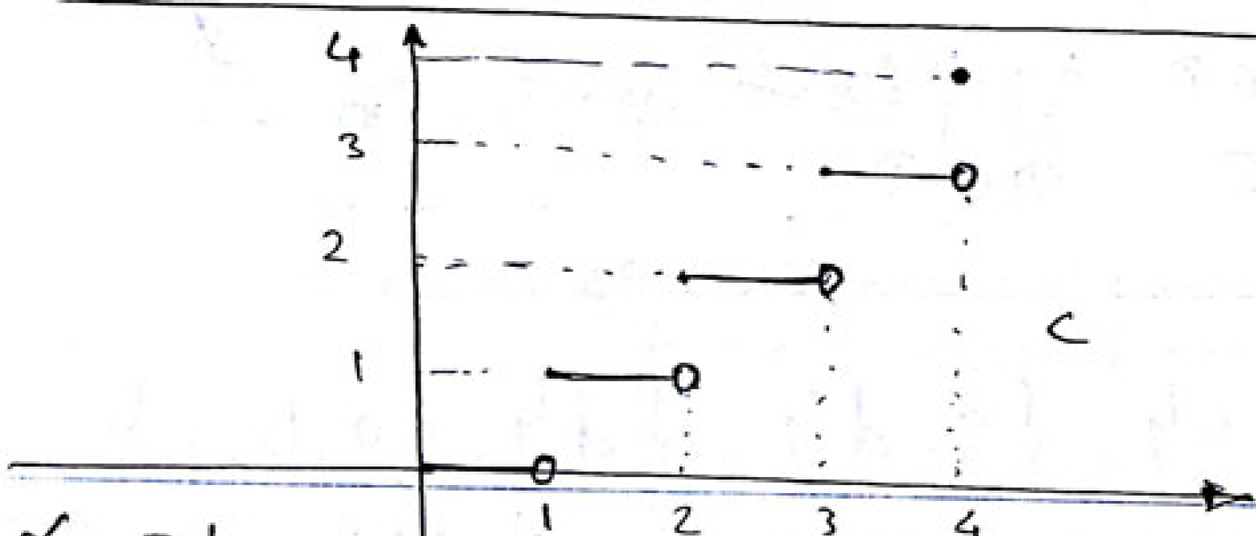
نقاط الانقطاع $c_1 = -1$, $c_2 = 0$

$$I = \int_{-2}^{2} x^2 \, d\alpha(x) = \int_{-2}^{-1} x^2(1)\,dx + \int_{-1}^{0} x^2(0)\,dx + \int_{0}^{2} x^2(2x)$$

$$+ f(-1)\left[\alpha(-1+0) - \alpha(-1-0)\right] + f(0)\left[\alpha(0+0) - \alpha(0-0)\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 + 1\left[2-1\right] + 0$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 8 + 1 = \frac{34}{3}$$



$\alpha(x) = [x]$

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$

$c_3 = 3$, $c_4 = 4$

أربع نقاط انقطاع .

$\alpha_k = 1$ مقدار القفزة

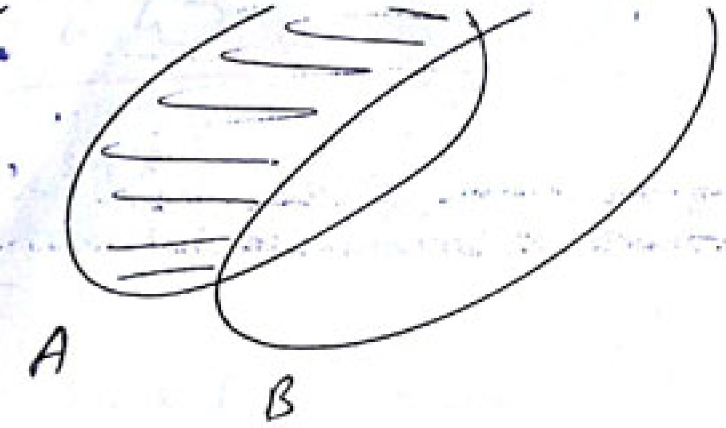
$$\int_0^n f(x)\, d\alpha(x) = \int_0^4 f(x)\, d[x] = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\cdot\alpha_k$$

$$\alpha_k (c_k) = \alpha(k+0) - \alpha(k-0)$$

$$\int_0^4 x^2\, d[x] = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + f(4)\cdot 1$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

السؤال ٢ :



$$\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \cup (B)) \quad ①$$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B) \quad \text{متنافيان :}$$

$$= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B)$$

$$= \underbrace{\mu(A) - \mu(A \cap B)}_{\text{لأن } A \cap B \subseteq A} + \mu(B)$$

وهـ.م

١.

$(A \setminus B) \cup (B) = (A \cup B)$

$A \setminus B \cap B = \phi$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \Rightarrow$

$A \cap B \subseteq A$

$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$

$$X = \{a, b, c, d\} \quad ②$$

$$\tau = \{\{a, b\}, \{d\}\}$$

أصغر حلقة

$$\tau_1 = \{\Phi, \{a, b\}, \{d\}, \{a, b, d\}\}$$

$\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau$ تحقق شروط الحلقة .

$\forall A \setminus B \in \tau \Rightarrow A \setminus B \in \tau \quad \Phi \in \tau$

أصغر جبر.

$$\tau_2 = \{\Phi, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{c\}\} .$$

حلقة الأصغر (الجبر) أصغر جبر.

جبر.

وهـ.م

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة دمشق -كلية العلوم

اختبار الفصل الثاني
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل 5

التاريخ: 1 /6/ 2014 م
الوقت : 2-4
الاسم:

٢

السؤال الأول (20 درجة): برهن صحة نظرية جوردان: الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني المعرف وسيطياً مجمعاً هو أن تكون كلاً من الدالتين x(t),y(t) دالة ذات تغير محدود على المجال $[\alpha,\beta]$.

السؤال الثاني (30 درجة): أثبت أن كلاً من الدوال الآتية ذات تغير محدود، ثم أوجد التغير الكلي لكل دالة، مع الرسم:

1. $f(x)=x-x^2 \quad : \quad x\in[0,1]$
2. $g(x)=x-|x| \quad : \quad x\in[-5,5]$
3. $h(x)=x-[x] \quad : \quad x\in[-2,2]$

السؤال الثالث (30 درجة): أحسب قيمة تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 x\, d[x] \xrightarrow{\text{ثم استنتج}} \int_0^3 [x]dx$

2. $\int_{-2}^{2} x^2\, dg(x) \; : \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & : -2\le x\le -1 \\ 2 & : -1<x<0 \\ x^2+3 & : 0\le x\le 2\end{cases}$

3. $\int_{-1}^{3}(x+1)\, dg(x) \; : \quad g(x)=\begin{cases} 0 & : x=-1 \\ 1 & : -1<x<2 \\ -1 & : 2\le x\le 3\end{cases}$

السؤال الرابع (20 درجة): عرّف القياس وعرّف تكامل لوبيغ للتابع البسيط على فضاء القياس (X,Ω,μ). ثم احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ):

$$\int_{[0,3]}[x]d\mu$$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

السؤال الأول: نظرية جوردان:

k منحني جمع $\Longleftarrow$ $x(t)$, $y(t)$ د.ت.م

k منحني جمع إذاً $l = \sup\limits_{P \in \mathcal{P}[\alpha,\beta]} l(P) < \infty$

لنأخذ $P = \{ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = \beta \}$

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)^2}$$

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < l$$

ولكن $|a_k| = \sqrt{a_k^2} \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

إذاً $\sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

إذاً $V(x(t), P) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < l$

إذاً التغير الكلي للدالة $x(t)$ $\bigvee\limits_{\alpha}^{\beta} x(t) \le l < \infty$ محدود وبالتالي $x(t)$ د.ت.م.

وبالطريقة ذاتها نجد أن $\bigvee\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \le l < \infty$ وبالتالي $y(t)$ د.ت.م. وهـ.ط

$x(t)$, $y(t)$ د.ت.م $\Longleftarrow$ k منحني جمع.

إذاً لنثبت أن $l < \infty$

لنأخذ $l(P)$ حيث $l(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)^2}$

حيث P تجزئة لـ $[\alpha, \beta]$.

$$\ell(P) \le \sum_{k=1} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \le \sum_{k=1} \left[|a_k| + |b_k| \right]$$

$$\ell(P) \le \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})|$$

$$\ell(P) \le V(x(t), P) + V(y(t), P)$$

$$\ell(P) \le \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) = M < \infty$$

د.ت.م $x(t)$ $y(t)$

$$\ell = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} (\ell(P)) < \infty$$

وبالتالي

ق . د . م .

$f(x) = x - x^2$

السؤال الرابع:

1 نلاحظ أن كلاً من x^2 و x دوال متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي f تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين على $[0,1]$ وهذا يعني أن f د . ت . م (نظرية) .

4

---

2 التغير الكلي لـ f على $[0,1]$.

$y = x - x^2$

$0 = x(1-x) \Rightarrow x = 0$, $x = 1$

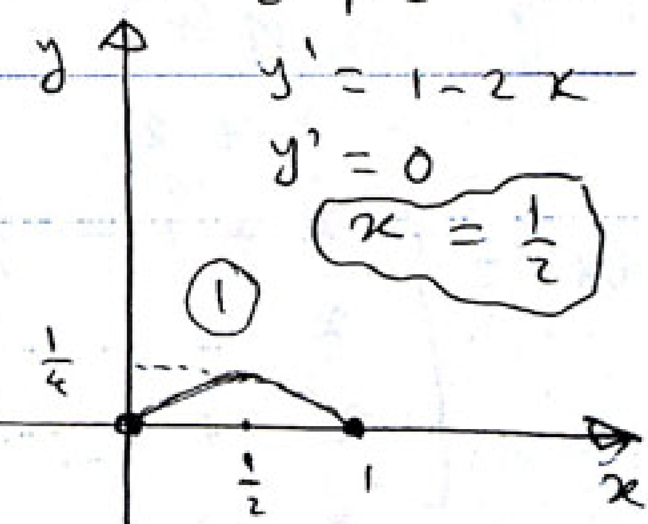
$y' = 1 - 2x$

$y' = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f		0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0	

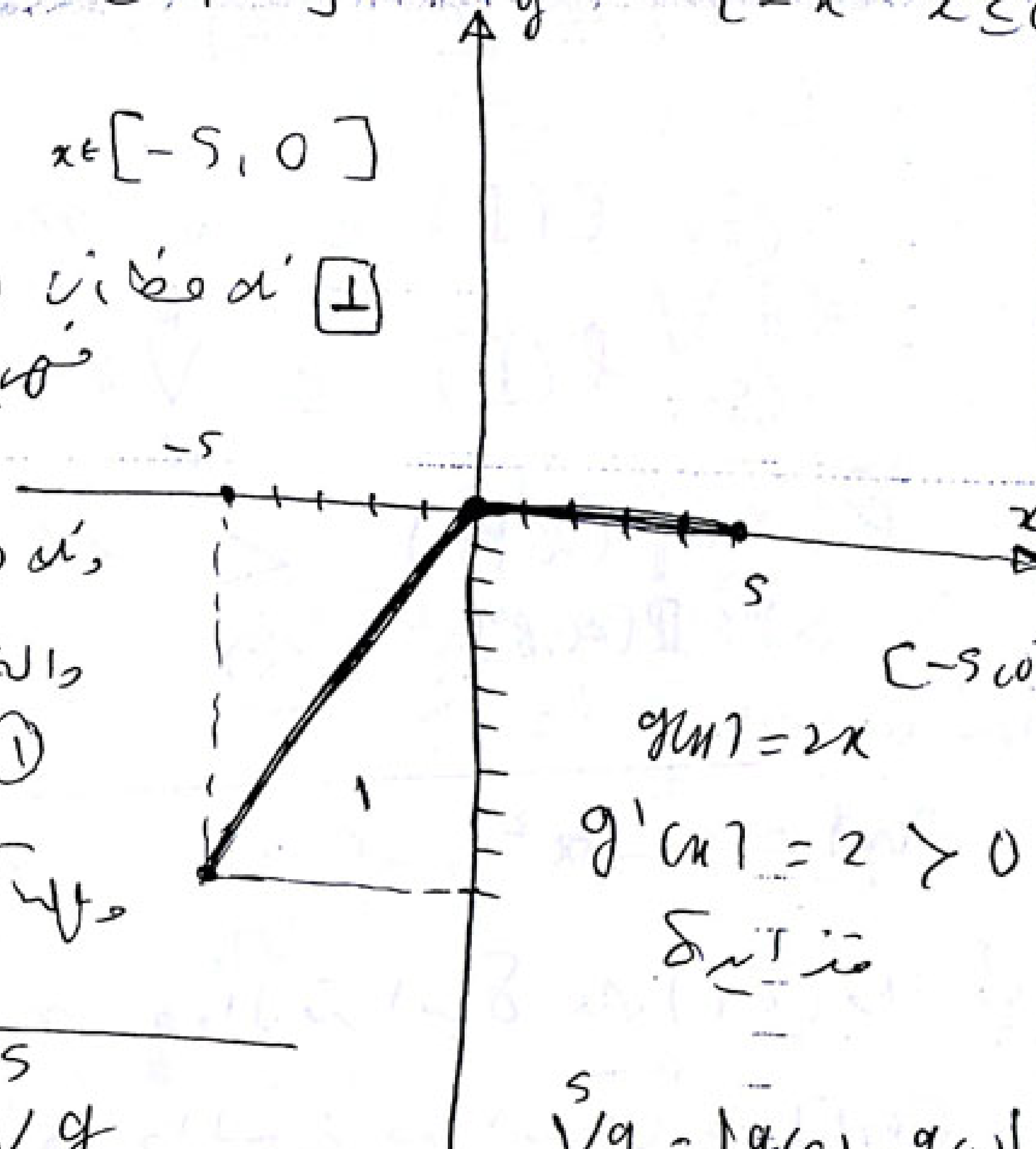


$$\bigvee_0^1 f = \bigvee_0^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^{1} f = |f(\tfrac{1}{2}) - f(0)| + |f(1) - f(\tfrac{1}{2})|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = x - |x| \qquad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,5] \\ 2x & x \in [-5,0] \end{cases}$$



$\boxed{\perp}$ نلاحظ أن $g(x)$ دالة ثابتة على $[0,5]$

فهي د . ت . م ①.

نلاحظ أن $g(x) = 2x$

دالة متزايدة على $[-5,0]$

فهي د . ت . م ①.

وبالتالي $g(x)$ د . ت . م على $[-5,5]$

$[-5,0]$

$g(x) = 2x$

$g'(x) = 2 > 0$

متزايدة

$$\overset{5}{\underset{-5}{V}} g(x) = \overset{0}{\underset{-5}{V}} g + \overset{5}{\underset{0}{V}} g$$

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} g = |g(5) - g(0)| = |0 - 0| = 0$$

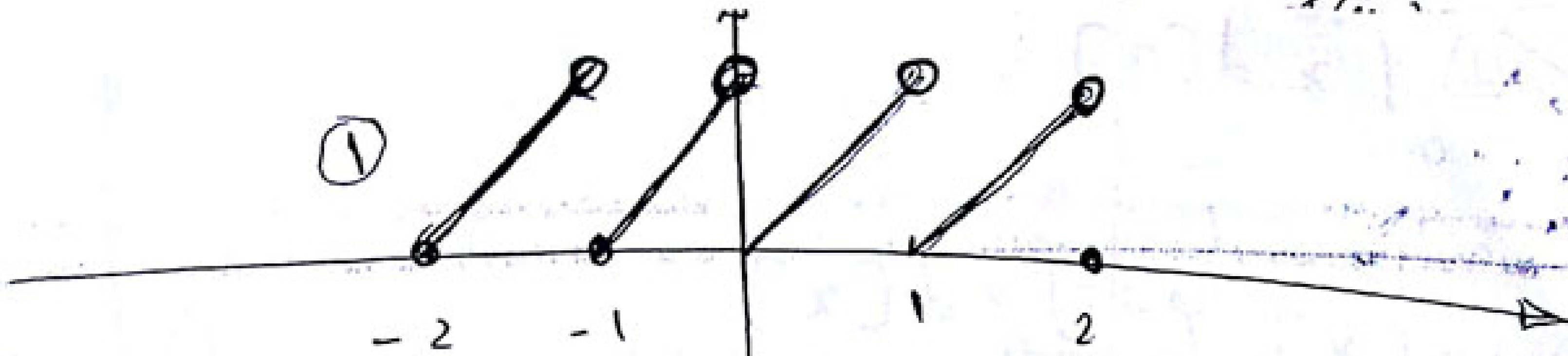
$$= |g(0) - g(-5)| + 0 = |0 - (-10)| = 10$$

$$h(x) = x - [x] \qquad x \in [-2,2]$$

$$h(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ x-2 & x = 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن كلاً من الدالتين $[x]$ و x دوال متزايدة على $[-2,2]$

وبالتالي $h(x)$ كتبت كفرق لدالتين متزايدتين وبالتالي فهي د . ت . م (بين نظرية)



①

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} h(x) = \overset{-1}{\underset{-2}{V}} h(x) + \overset{0}{\underset{-1}{V}} h(x) + \overset{1}{\underset{0}{V}} h(x) + \overset{2}{\underset{1}{V}} h(x)$$

نلاحظ أن هذه التغيرات الكلية في كل مجال جزئي متساوية

لذلك يكفي أن نأخذ أحدها ثم نضرب ب 4 .

لحساب $\overset{-1}{\underset{-2}{V}} h(x)$ نأخذ تجزئة عشوائية نونية منتظمة $[-2,-1]$

$$P = \{-2 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = -1\}$$

$$\Delta x = \frac{-1-(-2)}{n} = \frac{1}{n} \qquad ⓪ \qquad h(x) = x+2$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2 + \frac{1}{n} \\ x_2 &= -2 + \frac{2}{n} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= -2 + \frac{n-1}{n} \\ x_n &= -2+1 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} h(-2) &= -2+2 = 0 \\ h(x_1) &= \cancel{-2} + \frac{1}{n} + \cancel{2} \\ h(x_2) &= \cancel{-2} + \frac{2}{n} + \cancel{2} \\ &\vdots \\ h(x_{n-1}) &= \cancel{-2} + \frac{n-1}{n} + \cancel{2} \\ h(x_n) &= 0 \end{aligned}\right.$$

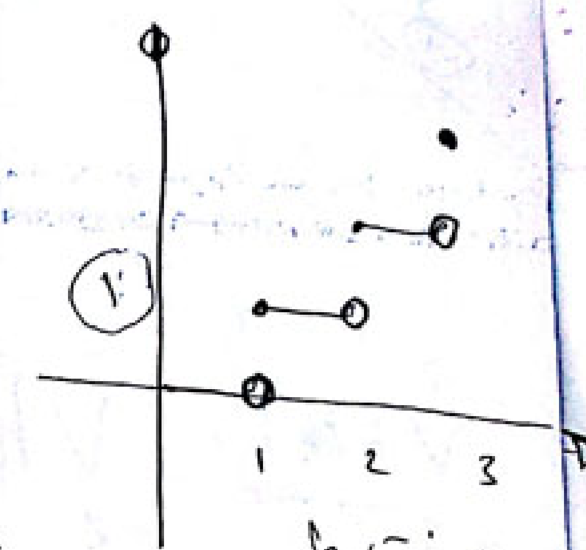
$$V(h(x), P) = |h(x_1) - h(x_0)| + \cdots + |h(x_n) - h(x_{n-1})|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ مرة}} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$\overset{-1}{\underset{2}{V}} h(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{n}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} h(x) = 4(2) = 8$$

① $\int_0 x \, d[x] =$



$f(x) = x$

$g(x) = [x]$ $\Big\}$ $I = \int_0^3 x \, d[x]$

$I = f(1) \cdot g_1 + f(2) \cdot g_2 + f(3) \cdot g_3$

$g_1 = g_2 = g_3 = 1$ مقدار القفزة ٥

نقاط انقطاع .

$I = 1 + 2 + 3 = 6 .$

$\int_0^3 [x] \, dx = \Big[f(x) g(x) \Big]_0^3 - 6$ ٤

$= \big[f(3) \cdot [3] - 0 \big] - 6 = 9 - 6 = 3$

---

② $\int_{-2}^{2} x^2 \, d g(x) = \int_{-2}^{-1} x^2 (1) \, dx + \int_{-1}^{0} x^2 (0) \, dx$

$+ \int_0^2 x^2 (2x) \, dx + f(-1) \Big[g(-1+0) - g(-1-0) \Big]$

$+ f(0) \Big[g(0+0) - g(0-0) \Big]$ 0

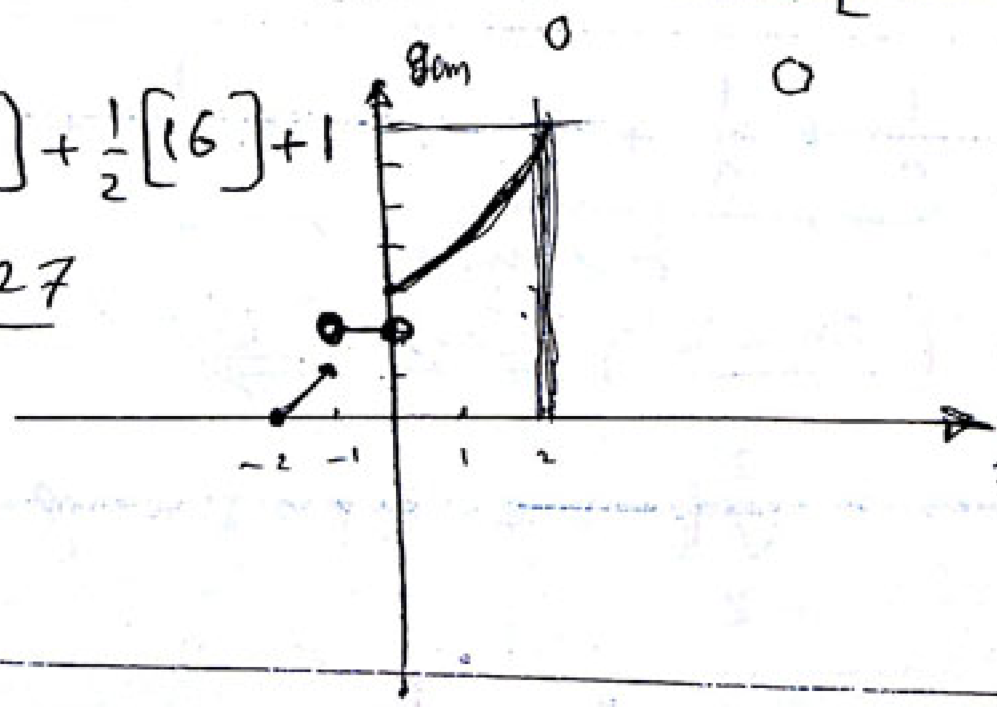
$= \frac{1}{3} \Big[x^3 \Big]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2} \Big[x^4 \Big]_0^2 + (1) \Big[2 - 1 \Big] + 0$

0

$= \frac{1}{3} \big[-1 - (-8) \big] + \frac{1}{2} [16] + 1$

$= \frac{7}{3} + 9 = \frac{7 + 27}{3}$

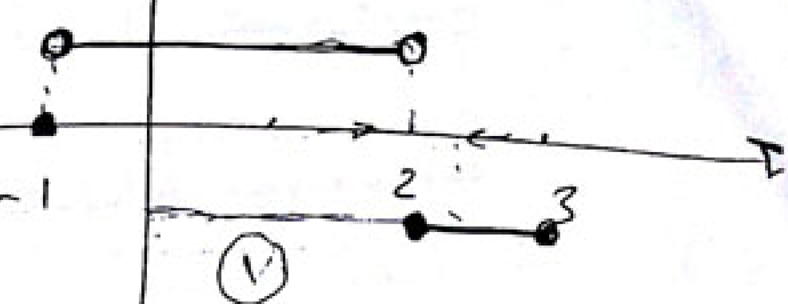
$= \frac{34}{3} .$



$$I=\int_{-1}^{3}(x+1)\,d\,g(x)$$

$$= f(-1)\left[g(-1+0)-g(-1-0)\right]$$

$$+ f(2)\left[g(2+0)-g(2-0)\right]$$



نقاط انقطاع $\{-1, 2\}$

$$I = 0\,[1-0] + 3\,[-1-(1)] = -6 \qquad 1$$

السؤال الرابع 1) عرف القياس: دالة μ تحقق الشرطين:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad 0$$

1) $\mu(\phi)=0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A},\ i\in\mathbb{N} : A_i\cap A_j=\phi \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

2) تكامل لوبيغ لدالة بسيطة f على فضاء قياس X بالنسبة للقياس μ يعطى بـ $\qquad 0$

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\mu(A_i)$$

حيث $\{c_i\}$ قيم الدالة f . A_i تمثل تجزئة لـ X

$$A_i=\{x\in X : f(x)=c_i\}=f^{-1}(\{c_i\}) \quad i=1,n$$

$$\int_{[0,3]}[x]\,d\mu = 0\,\mu([0,1[)+1\,\mu([1,2[)+2\,\mu([2,3[)+3\,\mu([3,3]) \qquad 0.5$$

$$= 0 + 1.1 + 2.1 + 0 = 3 \qquad 0.5 + 0.5$$

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة دمشق ــكلية العلوم

اختبار الفصل الثاني
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل 5

التاريخ: الأربعاء 2015/6/17م
الوقت : 2-4
الاسم:

السؤال الأول (20 درجة): إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك.

السؤال الثاني (30 درجة): أثبت أولاً أن كلاً من الدوال الآتية ذات تغير محدود، ثم أوجد التغير الكلي لكل دالة مع الرسم:

1. $f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,3]$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x+2 & 1\le x\le 2\end{cases}$

3. $f(x)=x-|x| \quad : \quad x\in[-2,2]$

السؤال الثالث (30 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 (x+1)dg(x): \quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x+1): \quad g(x)=[x]$

2. $\int_{-3}^{3} (x^2+1)dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -3\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 3\end{cases}$

3. $\int_1^5 x^2 dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} 0 & x=1 \\ 1 & 1<x<3 \\ 4 & 3\le x\le 5\end{cases}$

السؤال الرابع (20 درجة): عرّف القياس وعرّف تكامل لوبيغ للتابع البسيط على فضاء القياس (X,Ω,μ). ثم احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ):

$$\int_{[0,3]} [x]d\mu$$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

السؤال الخامس:

① f د. ت. م على [a,b] $\Leftarrow$ |f| د. ت. م على [a,b].

f د. ت. م على [a,b] $\Leftarrow$ $\bigvee_a^b f = \sup_{P\in \mathcal{P}[a,b]} V(f,P) < \infty$

حيث $V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n-1})|$

و P تجزئة لـ [a,b] $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

$$\big|\,|f(x_n)| - |f(x_{n-1})|\,\big| \le |f(x_n) - f(x_{n-1})| : k = \overline{1,n}$$

من خواص المتراجحات.

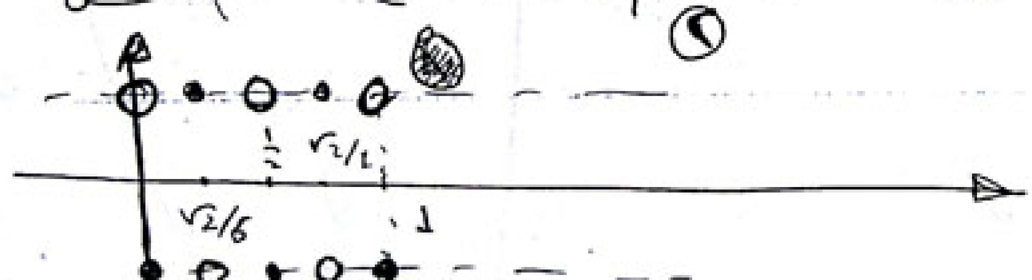
$$\sum_{k=1}^{n} \big|\,|f(x_n)| - |f(x_{n-1})|\,\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$\bigvee_a^b |f| \le \bigvee_a^b f < \infty$$

وهذا يعني أن |f| د. ت. م على [a,b] . و. هـ. د.

|f| د. ت. م على [a,b] $\not\Leftarrow$ بالضرورة أن f د. ت. م على الفترة.

مثال: لنأخذ الدالة f المعرفة على [0,1] المعينة بالشكل



$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

① إن $|f(x)| = 1$ دالة ثابتة على [0,1] فهي د. ت. م على [0,1] بالتعريف.

② نأخذ التجزئة

$$P = \{x_0, x_1, \dots x_n : 0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = 1\}$$

$$f(x) \to (-1)\quad (1)\quad (-1)\quad (-1)$$

[illegible]

[illegible]

(2)

$$2.\ f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ x+2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

x^2 دالة متزايدة على $[0,1[$ وعندها واحد 1

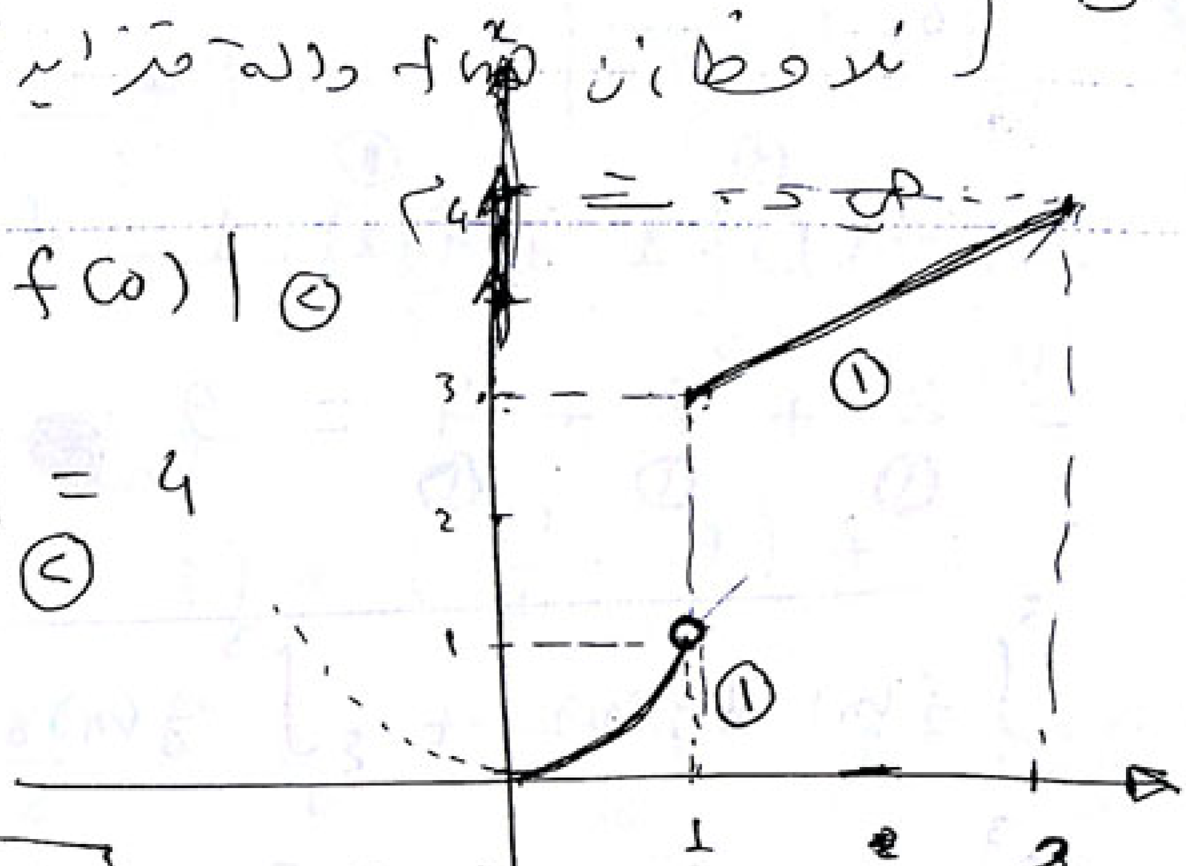
$1 \le 3$ — $x+2$ = = على $[1,2]$ وعندها واحد 3

(٤)

نلاحظ أن $f(x)$ دالة متزايدة على $[0,2]$ وبالتالي

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = |f(2) - f(0)|$$

$$= |4 - 0| = 4$$

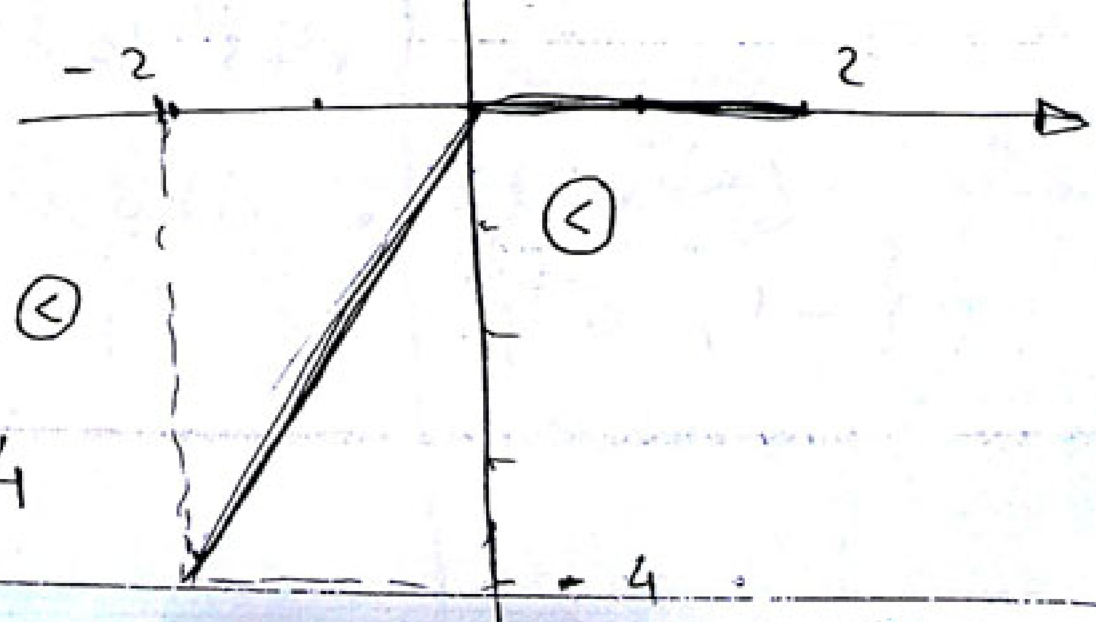


$$\boxed{3.\ f(x) = x - |x|} \ : x \in [-2,2]$$

$$f(x) = x - \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 2 \ge x \ge 0 \\ 2x & -2 \le x \le 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $f(x)$ دالة متزايدة على المجال $[-2,2]$.



$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} f = |f(2) - f(-2)|$$

$$= |0 - (-4)| = 4$$

السؤال الثالث :

(1) $f(x) = x+1$

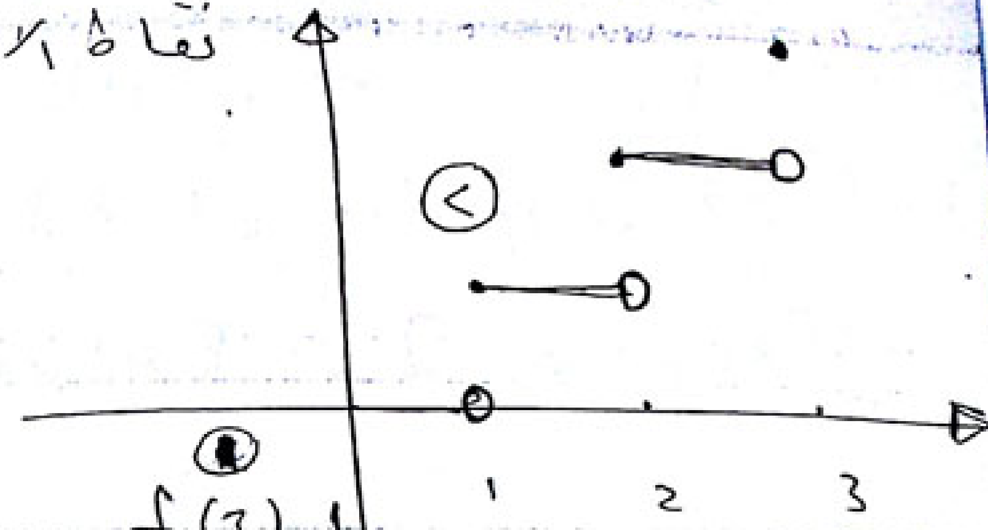
$g(x) = [x]$

نقاط القفز $\{1, 2, 3\}$

$$I = \int_0^3 (x+1)\, dg(x)$$

$$= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$



دالة درجية
مقدار القفزة
(القفزة) واحد

$$\int_0^3 f(x)\, dg(x) + \int_0^3 g(x)\, df(x) = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_0^3$$

$$\int_0^3 [x]\, d(x+1) = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_0^3 - 9$$

$$= \big[(4)\cdot(3) - 0\big] - 9 = 3$$

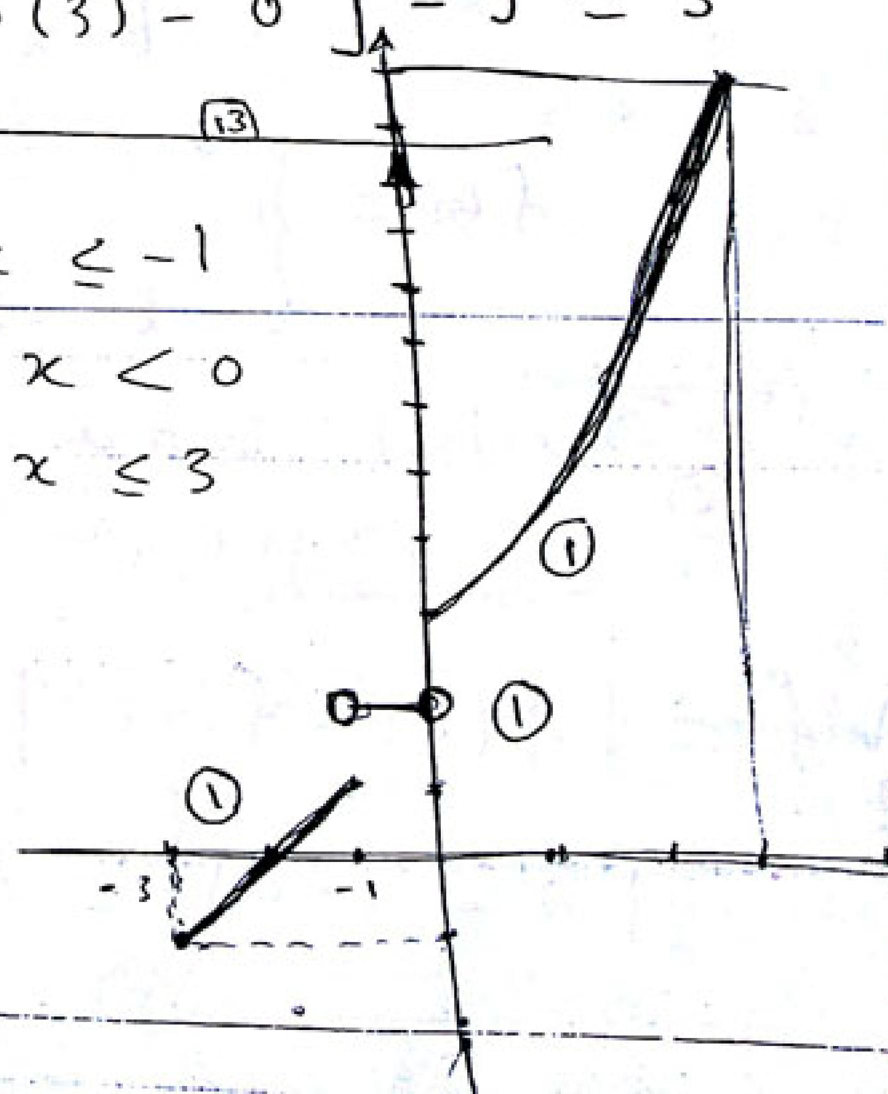
---

(2) $f(x) = x^2+1$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -3 \le x \le -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

نقطتا القفز

$\{-1, 0\}$



$\cancel{2}$ $I = \int_{-3}^{3} (x^2+1)\, dg(x) = \int_{-3}^{-1} (x^2+1) \cdot 1\, dx$ ①

$+ \int_{-1}^{0} (x^2+1)(0)\, dx$ ① $+ \int_{0}^{3} (x^2+1)(2x)\, dx$ ①

$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$ ① $+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$ ①

$I = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-3}^{-1} + 0 + \left[\frac{x^4}{2} + x^2\right]_{0}^{3} + (2)\left[2-1\right]$ ①

$+ (1)\left[3-2\right]$ ①

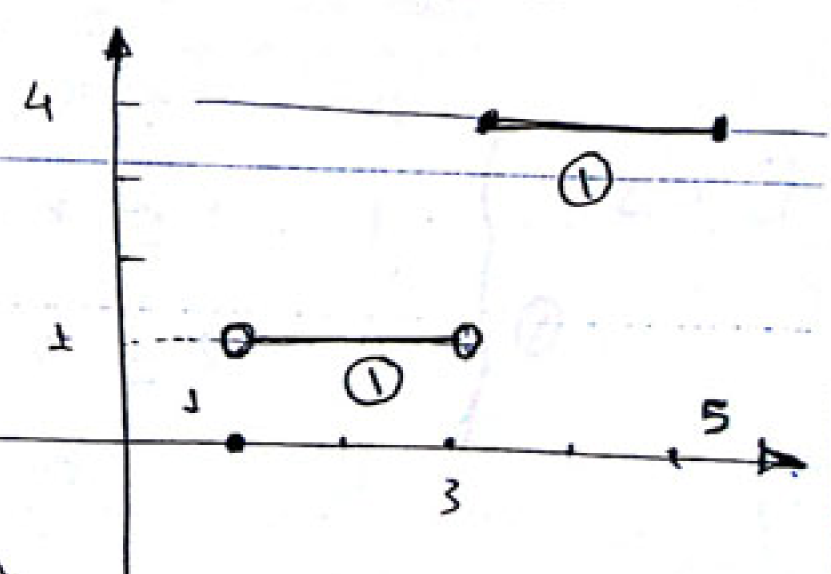
$I = \left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-9-3\right) + \left(\frac{81}{2} + 9\right) + 3$

$= 23 - \frac{1}{3} + \frac{81}{2} = 23 + \frac{243-2}{6} = 23 - \frac{241}{6}$ $\frac{379}{6}$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x < 3 \\ 4 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$ دالة درجية

$\{1, 3\}$ نقاط قفز

$I = \int_{1}^{5} f(x)\, dg(x)$



$= f(1)\left[g(1+0) - g(1)\right]$ ①

$+ f(3)\left[g(3+0) - g(3-0)\right]$ ①

$= 1\left[1-0\right] + 9\left[4-1\right]$ ①

$= 1 + 27 = 28$ ①

السؤال الرابع: (1) القياس: هو تابع μ معرف

(1) $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

1) $\mu(\phi) = 0$ (1)

2) $\forall A_i \in \mathcal{A}$; $A_i \cap A_j = \phi \Rightarrow$ (1)
$i \in \mathbb{N}$; $i \neq j$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (2)$$

(2) تكامل لوبيغ لتابع بسيط f من فضاء قياس X بالنسبة للقياس μ يعطى بالشكل

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \mu(A_i) \quad (2)$$

حيث $\{c_i\}$ (1) قيم التابع f ، A_i تمثل تجزئة لـ X (1) .

$A_i = \{x \in X ; f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$ $i = 1, n$ (1)

(3)

$$\int_{[0,3]} [x] \, d\mu = 0\,\mu[0,1[+ 1\,\mu[1,2[+ 2\,\mu[2,3[+ 3\,\mu(\{3\})$$

$= 0(1) + 1(1) + 2(1) + 3(0) = 3$ (1) (1) (1) (1)

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases} \quad (1)$$

وهو م.

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة دمشق ـكلية العلوم

اختبار الفصل الأول
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل ٥

التاريخ: الأحد ٢٠١٥/٢/١م
الوقت : ٢-٤
الاسم:

٥

السؤال الأول (٢٠ درجة): إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك.

السؤال الثاني (٣٠ درجة): أجب عما يلي:

- إذا كانت f دالة معرفة على المجال [0,1/2] كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ والمطلوب:

١. بين أن f مستمر على [0,1/2].
٢. وضح أن f متزايدة على [0,1/2].
٣. أوجد التغير الكلي للدالة f.
٤. بين أن f لا تحقق شرط ليبشتز k=1

- بين أن الدالة $f(x)=x-x^2$ المعرفة على [0,1] ذات تغير محدود ثم أوجد تغيرها الكلي.

السؤال الثالث (٣٠ درجة): أحسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^2 (x+3)dg(x):\quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^2 g(x)d(x+3):\quad g(x)=[x]$

2. $\int_{-2}^{2}(x^2+1)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases}x+2 & -2\le x\le -1\\ 2 & -1<x<0\\ x^2+3 & 0\le x\le 2\end{cases}$

3. $\int_{-1}^{3} x^2dg(x):\quad g(x)=\begin{cases}0 & x=-1\\ 1 & -1<x<2\\ -1 & 2\le x\le 3\end{cases}$

السؤال الرابع (٢٠ درجة): عرّف القياس وعرّف القياس الخارجي ثم بين بمثال أنه ليس كل قياس خارجي هو قياس.

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

$-1 : [0,1]$ ...

السؤال الأول :

جواب: إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإن $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$

(1) f د.ت.م على $[a,b]$ $\Leftarrow$

$$\bigvee_a^b f = \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$$

ليكن P تجزئة لـ $[a,b]$:

$$P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b : a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

إذن

$$\big| |u| - |v| \big| \le |u - v|$$

$$\big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big| \le |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big| \le \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\bigvee_a^b |f| \le \bigvee_a^b f < \infty$$

ومنه $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$. و.هـ.م

ولكن العكس ليس بالضرورة أن

إذا كانت $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$ فإنه ليس بالضرورة أن تكون f د.ت.م على $[a,b]$

الدليل: المثال التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ب) إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي $f:[0,1]\to\{1,-1\}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ -1 & x\notin Q\end{cases}$$ ©

1) نلاحظ أن $|f(x)|=1 \quad : \forall x\in[0,1]$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}|f| = \sup_{P\in\mathcal{P}[0,1]} \sum_{k=1}^{n} \big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big|$$

(4) $$= \sup_{P\in\mathcal{P}[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |1-1| = 0 < \infty$$

وبالتالي $|f|$ د. ت. م على $[0,1]$. أما الدالة f

نأخذ التجزئة لـ $[0,1]$ التالية

$$P=\{x_0=0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \not\uparrow & \uparrow & & \not\uparrow & \uparrow \\ Q & Q & Q & \dots & Q & Q \end{array}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f = \sup_{P\in\mathcal{P}[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

(4) $$= \sup_{P} \Big[\underbrace{|1-(-1)|}_{1} + \underbrace{|1-(-1)|}_{2} + \dots + \underbrace{|1-(-1)|}_{n} \Big]$$

$$= \sup_{P}[2n] = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty \not< +\infty$$

وبالتالي f د. ليست ذات تغير محدود .

$f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$

السؤال الثاني :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

التصحيح :

① حتى تكون f دالة مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$ يجب أن تحقق ما يلي

1) $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

وهذا محقق لأن

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} \left(-\frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{\ln x_0} = f(x_0)$$

2) $x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$ 0

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{\ln x} = 0 = f(0)$$

3) $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$$

ومنه الدالة f مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$.

---

② $f'(x) = -\dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{1}{x(\ln x)^2} > 0 \; ; \; x \in]0, \frac{1}{2}[$

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+ \; + \; + \; + \; +$	
$f(x)$	0	متزايدة $\nearrow$	$1/\ln 2$

$: f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\ln 2} > 0$

0

ومنه f متزايدة تماما على $[0, \frac{1}{2}]$.

---

③ بما أن f دالة متزايدة تماما على مجال محدود $([0, \frac{1}{2}])$ فهي دالة ذات تغير محدود .

$$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| \frac{1}{\ln 2} - 0 \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

والتغير الكلي هو : 0

س٤ الرابع: القياس: هو تابع μ يحقق ...

٤) ج/ ليبشتز من اجل $n=1$

٢) $\forall u,v \in [0,\frac{1}{2}]\ ,\ \exists L>0 : |f(u)-f(v)| \le L|u-v|$

نبين أن هناك u, v من أجلها لا يوجد L يحقق الشرط أعلاه

ج/ نأخذ $v=0$, $u \xrightarrow{>} 0$ ونبين أنه لا يوجد L يحقق

$u, v \in [0,\frac{1}{2}]$

$$\lim_{u\to 0} \frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} \le L$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{|f(x)-f(0)|}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\left|-\frac{1}{\ln x}-0\right|}{x-0} = -\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x\ln x}$$

نطبق لوبيتال $\frac{\infty}{\infty}$

$$= -\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = -\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = +\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

إذاً لا توجد L تحقق الشرط أعلاه. وه.م.

---

* الفقرة الثانية: $x \in [0,1]$: $f(x) = x - x^2$ د.ت.م.

نلاحظ أن كلاً من x و x^2 دالة متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي f دالة كتبت على شكل فرق لدالتين متزايدتين على المجال $[0,1]$ وهذا يعني أن f د.ت.م (نظرية).

وللحصول على التغير الكلي نكتب:

$f(x) = x - x^2$

$y' = 1 - 2x \Rightarrow 1-2x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+\ +$	0	$-\ -$	
y	0	متزايدة ↗	$\frac{1}{4}$	متناقصة ↘	0

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{1}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f = \left|f(\tfrac{1}{2}) - f(0)\right| + \left|f(1) - f(\tfrac{1}{2})\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

وه.م.

1) $\int_0^2 (x+3)\, d[x] = f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2$ [illegible]

$f(x) = x+3$

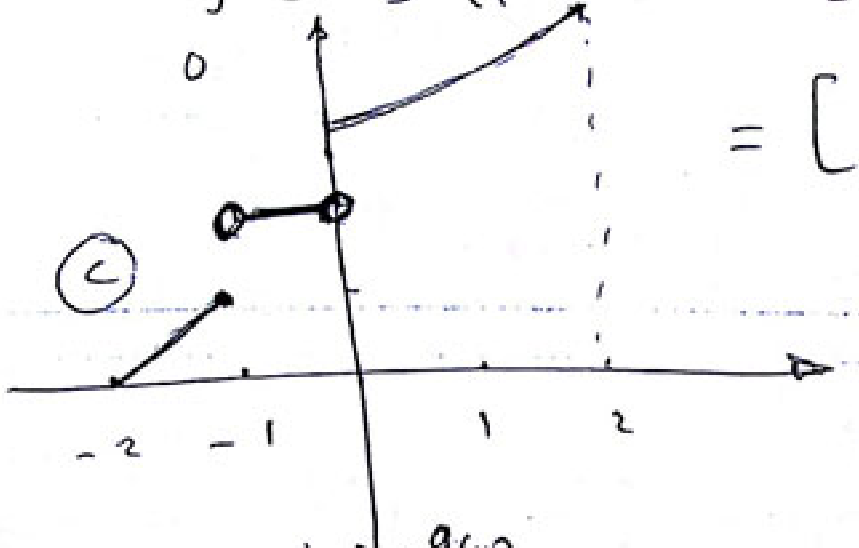
$g(x) = [x]$

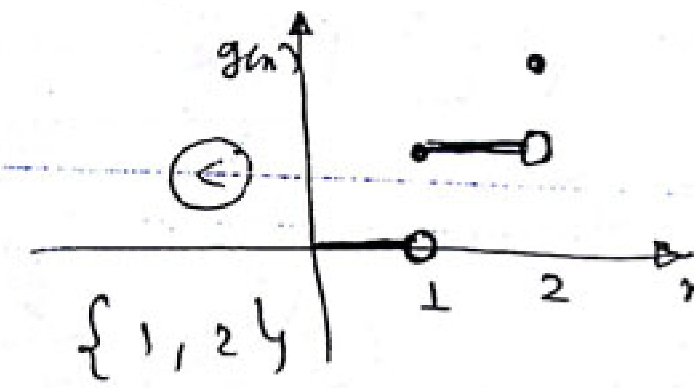
$= 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 9$ ٤

$\{ g_1 = g_2 =$

$\int_0^2 [x]\, d(x+3) = \left[(x+3)[x]\right]_0^2 - 9$

$= \left[5\cdot 2 - (3)(0)\right] - 9 = 1.$ ٤





$\{1, 2\}$

$\{-1, 0\}$

2)

$I = \int_{-2}^{2} (x^2+1)\, d\, g(x) = \int_{-2}^{-1} (x^2+1)(1)\, dx + \int_{-1}^{0} (x^2+1)(0)\, dx$

$+ \int_0^2 (x^2+1)(2x)\, dx + f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$

٤ $+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$

$I = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{-1} + 0 + \left[\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^2 + 2\left[2-1\right] + 1\left[3-2\right]$ ٢

$= \left[-\frac{1}{3} \cancel{-1} + \frac{8}{3} \cancel{+2}\right] + \left[8+4\right] + 3 = 16 + \frac{7}{3} = \frac{55}{3}.$ ٢

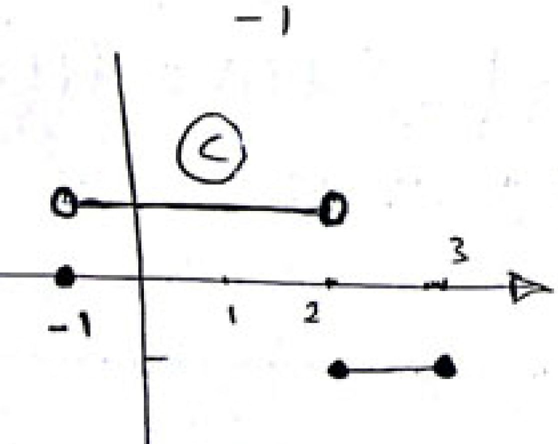
---

3) $I = \int_{-1}^{3} x^2\, d g(x) = f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$ $\{-1, 2\}$

$+ f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right]$ ٤

$= 1(1-0) + 4(-1-1)$ ٢

$= 1 - 8 = -7$ ٢



السؤال الرابع: القياس: هو تابع μ يحقق الشرطين

(جبر (جبر σ)

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$$

1) $\mu(\phi) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A},\ i \in N : A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

القياس الخارجي: هو تابع μ^* يحقق الشروط

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$$

1) $\mu^*(\phi) = 0$ 2) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad : A \subseteq B$

3) $\forall A_i \in P(X),\ i \in N \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

مثال: نأخذ المقياس الخارجي المعرف بالشكل

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\mu^*(A) = \sqrt{|A|} \quad : \quad |A| \text{ عدد عناصر } A$$

نلاحظ

1) $\mu^*(\phi) = \sqrt{|\phi|} = \sqrt{0} = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B| \Rightarrow \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3) $\forall A_i \in P(X),\ i \in N : \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وهذا يبين أن μ^* قياس خارجي.

ولكن لا يمثل قياساً لأن $A \cap B = \phi : \mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

تحليل ... حيث:

$A \cap B = \phi \quad |A \cup B| = |A| + |B| \Rightarrow \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{|A| + |B|} \leq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$

مثال تحقيق: $|A| = 9,\ |B| = 16$ حيث $A \cap B = \phi$

$$\mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

ولكن $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7 \neq 5$

و ط. م.

وزارة التعليم العالي
جامعة دمشق ـ كلية العلوم

السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل ٥

التاريخ: الاثنين ٢٠١٥/٨/٢٤
الوقت : ٢ـ٤
الاسم:

السؤال الأول(٢٠ درجة): عرّف ما يلي بالتفصيل(مع توضيح جميع الرموز):

الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] ، **تكامل** استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على المجال [a,b]، **القياس** μ في الفضاء (X,Ω,μ)، **تكامل** لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ.

السؤال الثاني (٢٠ درجة): أثبت أن كلاً من الدوال الآتية ذات تغير محدود، **دون** إيجاد التغير الكلي للدالة مع الرسم:

$$f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,2] \quad , \quad f(x)=x-|x|: \quad x\in[-2,2]$$
$$f(x)=\sin x: \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad , \quad f(x)=|x|: \quad x\in[-2,2], \quad f(x)=x-[x] \quad : x\in[-2,2]$$

السؤال الثالث(٢٠ درجة): احسب التغير الكلي لكل من الدوال الآتية:

$$f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,2] \quad , \quad f(x)=x-|x|: \quad x\in[-2,2]$$
$$f(x)=\sin x: \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad , \quad f(x)=|x|: \quad x\in[-2,2]$$

السؤال الرابع (٣٠ درجة): احسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم g(x) :

1. $\int_0^3 (x^2+1)dg(x): \quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x^2+1): \quad g(x)=[x]$

2. $\int_{-2}^{2} x^2 dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$

3. $\int_0^6 x^2 dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x<2 \\ 2 & 2\le x<4 \\ 3 & 4\le x\le 6 \end{cases}$

السؤال الخامس (١٠ درجات): برهن صحة العبارة في فضاء القياس (X,Ω,μ):

$$\forall A,B\in\Omega \ \wedge \ \mu(A\Delta B)=0 \ \Rightarrow \ \mu(A)=\mu(B)$$

انتهت الأسئلة   مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق   د. نايف طلي

(9)

السؤال الأول

(أ) تعريف الدالة ذات التغير المحدود على المجال $[a,b]$:

إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$، وكانت P تجزئة عشوائية لهذا المجال $[a,b]$، ولتكن

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n : x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

نأخذ المجموع $V(P,f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

ثم نأخذ $\sup\limits_{P\in\mathbb{P}[a,b]} V(P,f)$ التغير الكلي للدالة f ونرمز له بـ $\overset{b}{\underset{a}{V}}f$

فإذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}}f<\infty$ فإننا نسمي f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$.

(ج) تعريف تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على $[a,b]$

إذا كانت f و g دالتين معرفتين ومحدودتين وحقيقيتين على المجال $[a,b]$. وأخذنا التجزئة العشوائية P لـ $[a,b]$

$$P=\{x_0,x_1,\dots x_n : x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

عندئذ نعرف المجموع (استيلجس) $S(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot\Delta g_k \; : \; t_k\in[x_{k-1},x_k]$

$$\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})$$

فنقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ ويسمى تكامل استيلجس) إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يتحقق الشرط

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists P_{\varepsilon}\in[a,b] : P\supset P_{\varepsilon}\Rightarrow|S(P,f,g)-A|<\varepsilon$$

نرمز لـ A بـ $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\Delta g_k=\int_a^b f\,dg=A$

$: \|P\|=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \quad : \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$

تعريف القياس μ :

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $\mathcal{A}$ جبر σ من X . نعرف القياس μ

بأنه تابع $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$ يحقق الشروط

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A}, \ i \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

---

④ تكامل لوبيغ للتابع البسيط f من X بالنسبة للقياس μ

يُعرف بالشكل $\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$

حيث c_i قيم التابع البسيط f

A_i تشكل تجزئة لـ X أي $\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \\ A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \end{array} \right.$

و A_i تعطى بالشكل :

$$A_i = \{ x \in X : f(x) = c_i \} = f^{-1}(\{c_i\})$$

السؤال الثاني :

① $f(x) = x^2 - x \ : \ [0,2]$

نلاحظ أن كلاً من الدالتين x^2 , x قابلتين للمكاملة على المجال $[0,2]$ وبالتالي f فرق دالتين قابلتين للمكاملة

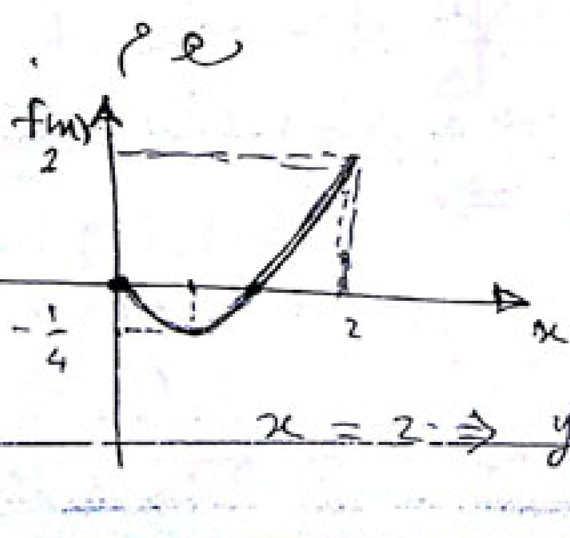
هي د . ت . ا م . نعم

$f'(x) = 2x - 1$

$= 0 \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$



الرسم :

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 , \ x = 1$

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2$

(ج) $f(x) = x - |x| : x \in [-2,2]$

نلاحظ أن الدالة x متزايدة على $[-2,2]$ فهي د.ت.م

x د.ت.م على $[-2,2]$ $\Leftarrow$ $|x|$ د.ت.م على $[-2,2]$

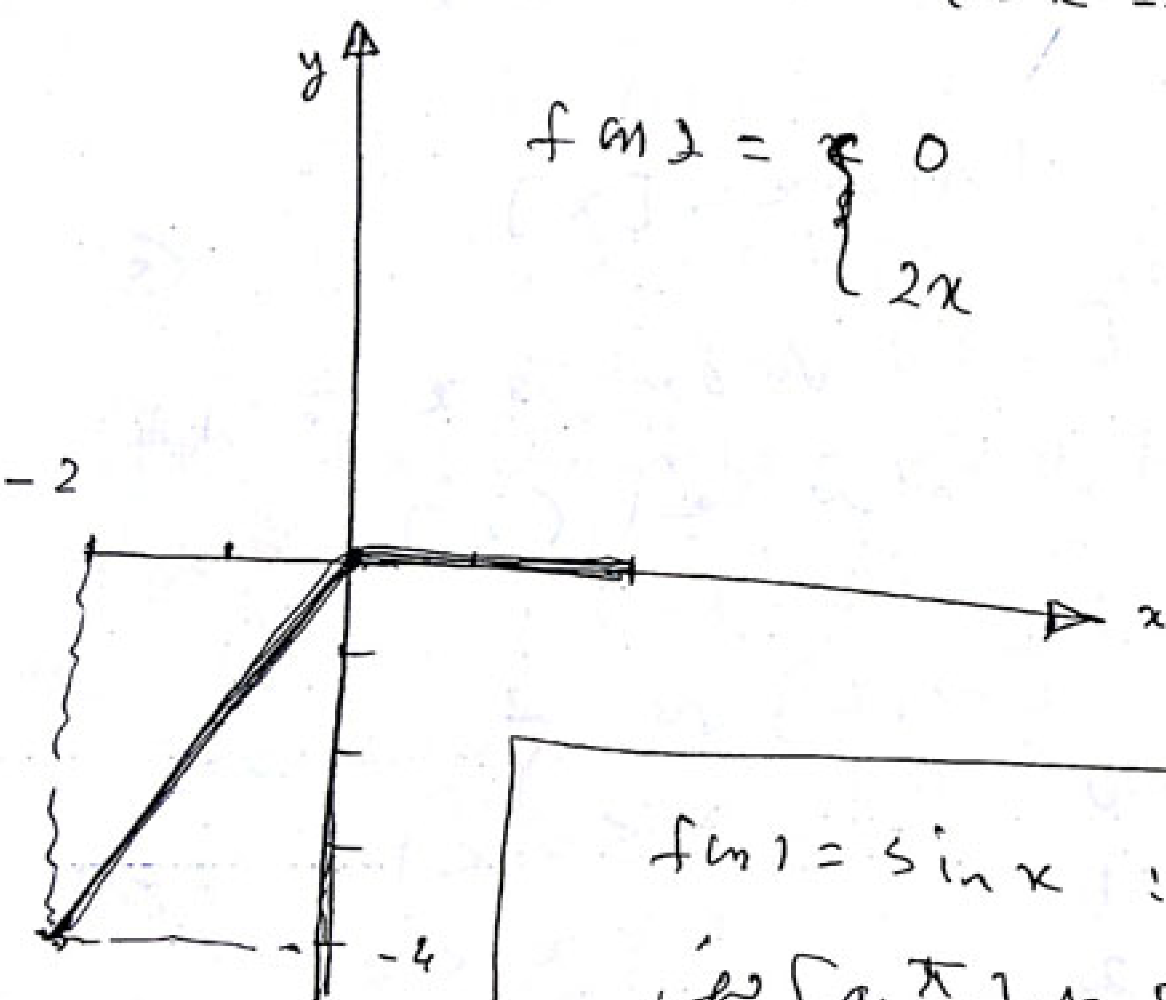
وبالتالي f فرق لدالتين كل منهما د.ت.م على $[-2,2]$

وهذا يعني أن f د.ت.م على $[-2,2]$.

الرسم:

$$f(x) = x - \begin{cases} x & 2 \geq x \geq 0 \\ -x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

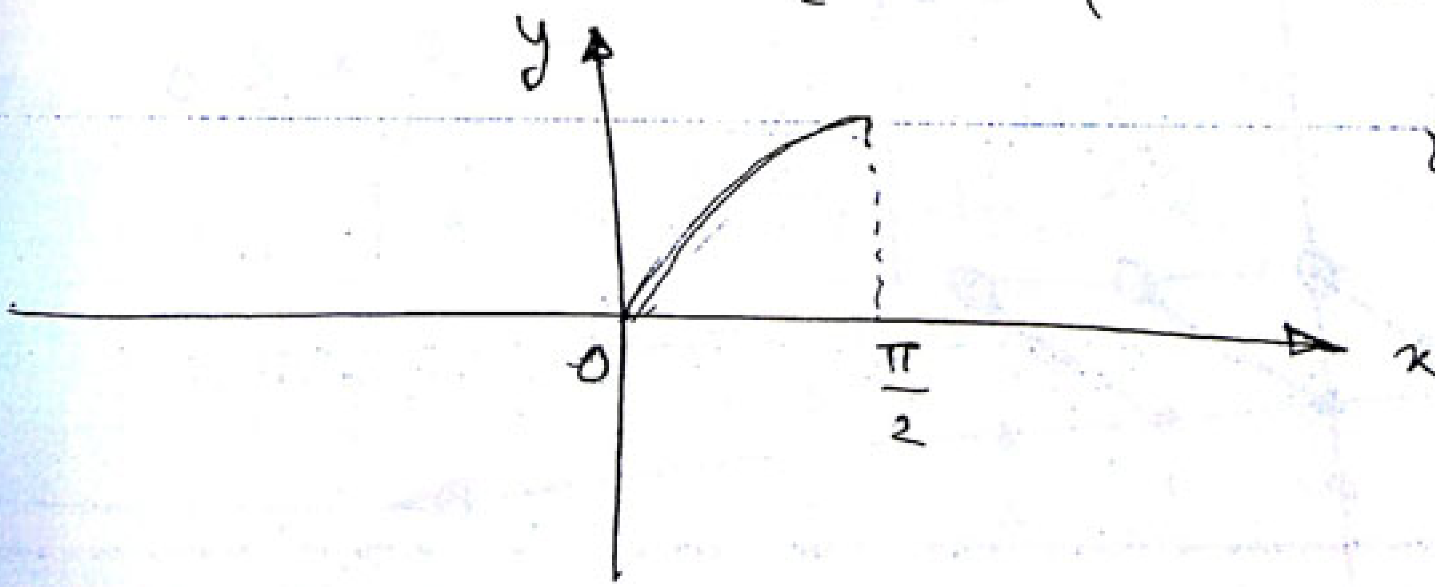


(ب) $f(x) = \sin x : x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الدالة $\sin x$ متزايدة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ فهي

دالة د.ت.م على $[0,\frac{\pi}{2}]$. (ع

الرسم:



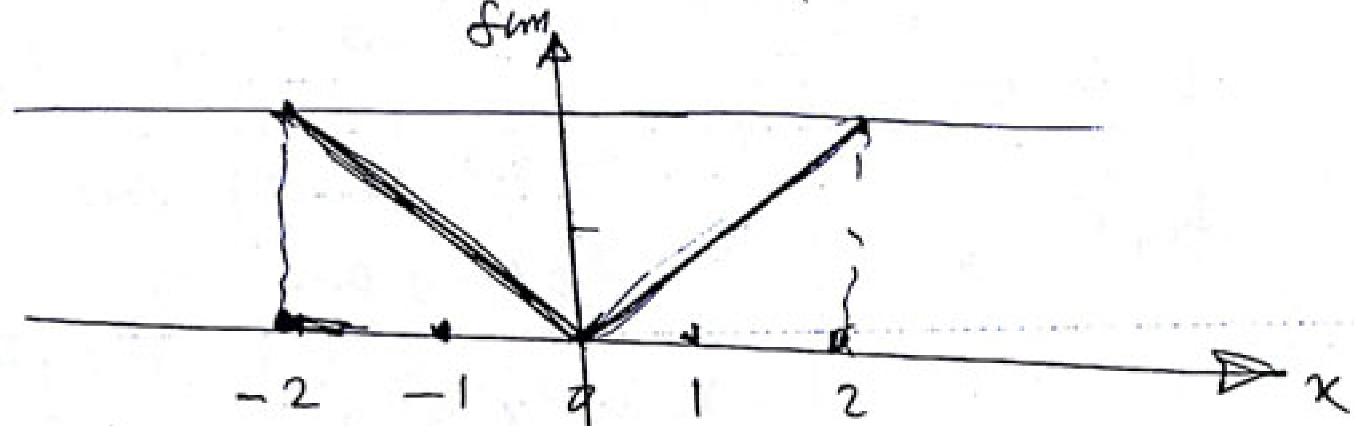
$f(x) = |x| \;,\; x \in [-2,2]$ ④

إن الدالة x متزايدة على $[-2,2]$ ومستمرة .

على $[-2,2]$. وبما أن x دالة ... على $[-2,2]$ فإن

الدالة $|x|$ ... على $[-2,2]$ أيضاً .

الرسم :



$f(x) = x - [x]$ حيث $x \in [-2,2]$ ⑤

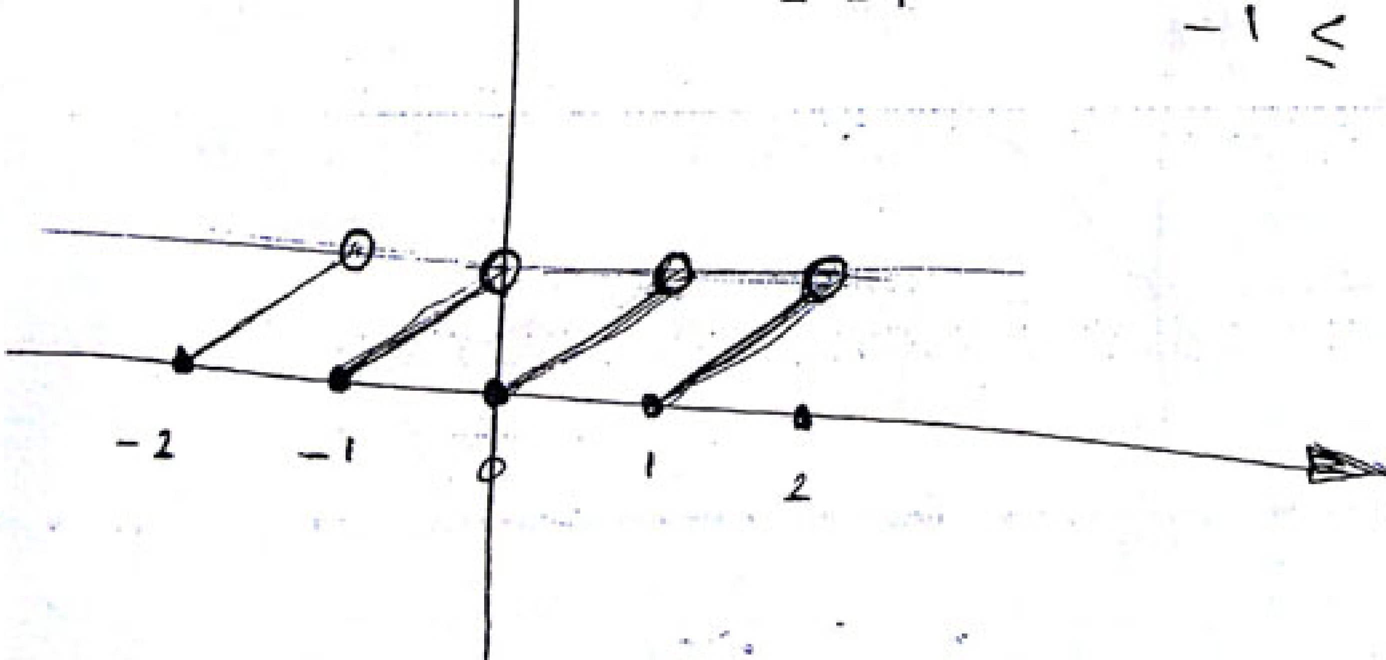
إن الدالة x متزايدة على $[-2,2]$ ؛ } f فرق دالتين

والدالة $[x]$ أيضاً متزايدة على $[-2,2]$ } متزايدتين على $[-2,2]$ إذن

f ... على $[-2,2]$.

الحل :

$$f(x) = x - \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$



$f(x) = x^2 - x \qquad x \in [0, 2]$ نقطة تحول :

(حل)

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f$$

$$= \left| f(0) - f\left(\tfrac{1}{2}\right) \right| + \left| f(2) - f\left(\tfrac{1}{2}\right) \right|$$

$$= \left| 0 - \left(-\tfrac{1}{4}\right) \right| + \left| 2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right) \right| = \frac{5}{2}.$$

---

(2) $f(x) = x - |x| \qquad x \in (-2, 2]$

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} f = | f(+2) - f(-2) |$$ صاعدة لأنها متزايدة

$$= | 0 - (-4) | = 4 .$$

---

(3) $f(x) = \sin x \qquad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}} = \left| f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0) \right|$$ لأنها متزايدة :

$$= | 1 - 0 | = 1$$

---

(4) $f(x) = |x| \quad : \quad x \in [-2, 2]$

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} f = \overset{0}{\underset{-2}{V}} f + \overset{2}{\underset{0}{V}} f$$

$$= | f(-2) - f(0) | + | f(2) - f(0) |$$

$$= | 2 - 0 | + | 2 - 0 | = 4$$

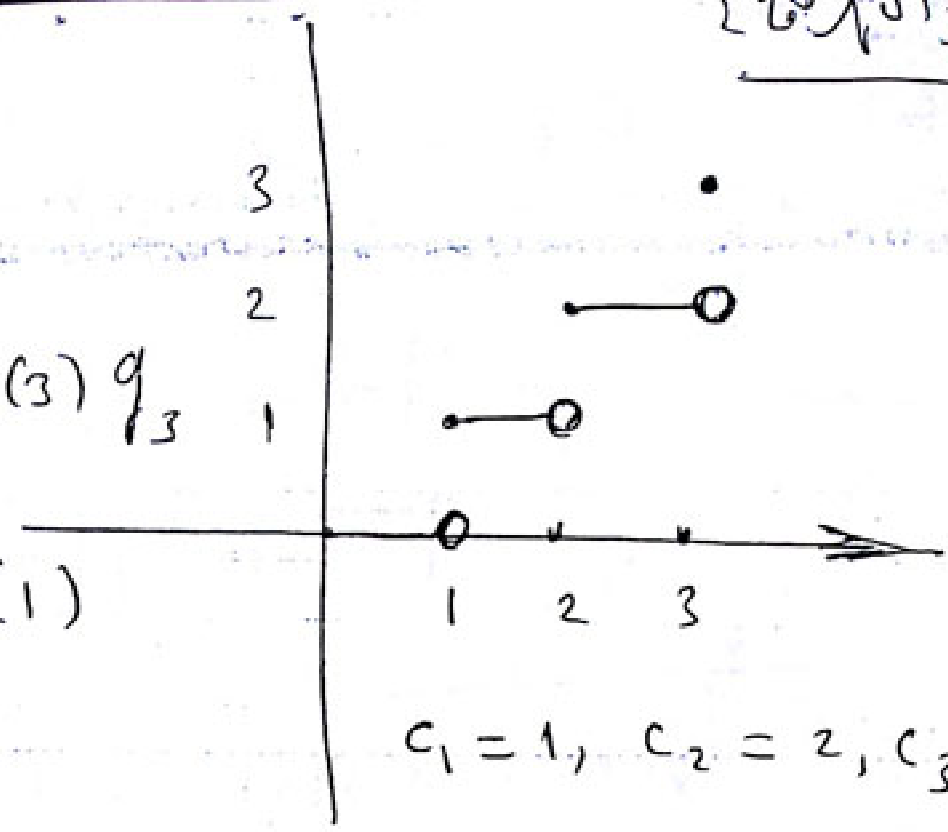
السؤال الثاني

$$\int_0^3 (x^2+1)\, d[x] =$$

$$f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\, g_3$$

$$= 2(1) + 5(1) + 10(1)$$

$$= 17$$



$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3$

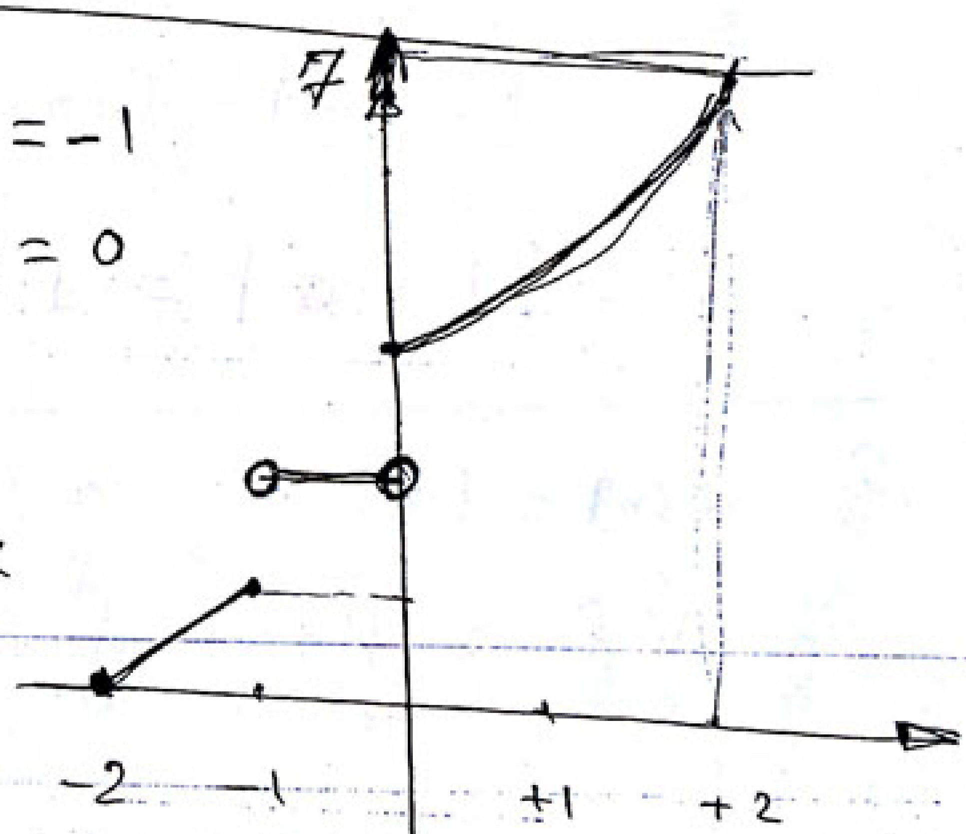
$$\int_0^3 g(x)\, d(x^2+1) = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_0^3 - \int_0^3 f(x)\, dg(x)$$

$$= \big[(10)(3) - 0\big] - 17 = 13$$

2

$c_1 = -1$

$c_2 = 0$



$$I = \int_{-2}^{2} x^2\, d\,g(x)$$

$$= \int_{-2}^{-1} x^2 (1)\, dx + \int_{-1}^{0} x^2 (0)\, dx$$

$$+ \int_0^2 x^2 (2x)\, dx$$

$$+ f(-1)\big[g(-1+0) - g(-1-0)\big] + f(0)\big[g(0+0) - g(0-0)\big]$$

$$= \frac{1}{3}\big[x^3\big]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\big[x^4\big]_0^2 + 1\,(2-1) + 0$$

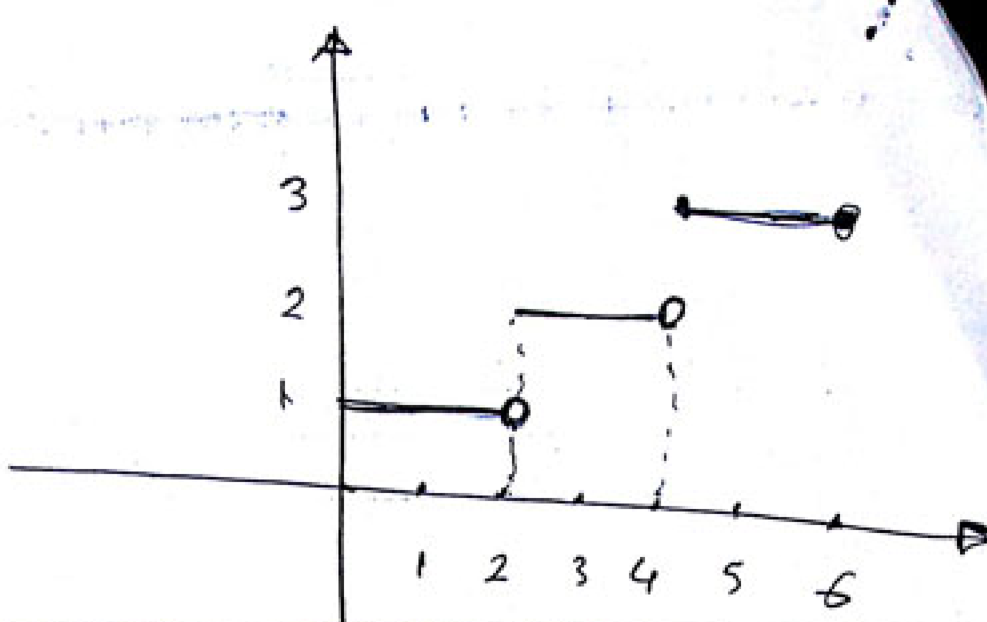
$$= \frac{1}{3}\big[-1+8\big] + \frac{1}{2}(16) + 1 = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}$$

cc $\int_0 x \, dg(x)$

$$I = \int_0^6 x^2 \, dg(x)$$

$$= f(2) \cdot g_1 + f(4) \cdot g_2$$

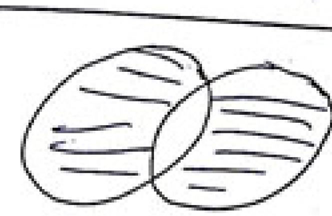
$$= 4(1) + 16(1) = 20$$



$c_1 = 2, \quad c_2 = 4$

السؤال الثاني:

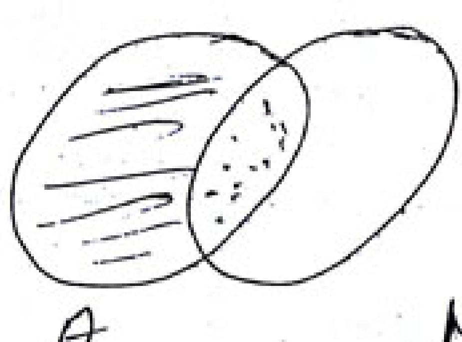
$$\mu(A \Delta B) = 0$$



$$\mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0 \qquad \because (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \phi$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) = 0$$

$$\mu(B \setminus A) = 0$$



$$\mu(A \setminus B) = 0$$

$$\mu(A \setminus (A \cap B)) = 0$$

$$\mu(A) - \mu(A \cap B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap B) \quad (1)$$

$$\mu(B \setminus A) = 0$$

$$\mu(B \setminus (A \cap B)) = 0$$

$$\mu(B) - \mu(A \cap B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cap B) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$$

تم.