أسئلة مقرر الهندسة التحليلية لطلاب السنة الاولى رياضيات

جامعة دمشق — التاريخ : ٢٠١٧/١٢/١٣

كلية العلوم — الفصل الدراسي الاول — الاسم : محمد أسعد الفرا

السؤال الأول :

١- اوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين

$$D\begin{cases} Q_1(x,y,z) \equiv x+2y-2z+3=0 \\ Q_2(x,y,z) \equiv 5x+y-z-5=0 \end{cases}$$

٢- اوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $M_\circ(1,2,3)$ ويعامد المستويين Q_1 و Q_2

٣- اوجد مسقط المستقيم D على المستوي $Q(x,y,z) \equiv 2x+y+3z+7=0$

٤- بين وضع المستوي Q_1 بالنسبة للكرة S المعطاة بالمعادلة

$$S(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z-11=0$$

السؤال الثاني :اوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني المعين بالمعادلات الوسيطية

$$x = 3\cos 3t + 7t \qquad y = 2\sin 3t \qquad z = e^{t^2} + t$$

عند النقطة $t = 0$

السؤال الثالث : عين مركز تناظر السطح S المعين بالمعادلة

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + xz - 3yz - 2x + y - 4z = 0$$

السؤال الرابع : تعطى المعادلة النموذجية لمجسم القطع الناقص بالعلاقة التالية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

و معادلة المستويات الموازية للمستوي الإحداثي oxy بالمعادلة $z=h$

اذا قطعنا مجسم القطع الناقص بأحد هذه المستويات

المطلوب

١- اوجد معادلة المنحني الناتج وحدد نوعه و نصفا محوريه a' و b' في الحالة $|h|<c$

٢- عين قيمة h التي تبلغ من اجلها a' و b' القيمة العظمى

٣- حدد المقطع في الحالتين $|h|>c$ و $|h|=\pm c$

1-) إيجاد معادلة المستويين المنصفين الداخلي والخارجي

$$\frac{Q_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} = \mp \frac{Q_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{5x+y-z-5=0}{\sqrt{25+1+1}}$$

نأخذ جداء الطرفين بالوسطين

$$\sqrt{27}\,(x+2y-2z+3) = \mp\sqrt{5}\,(5x+y-z-5)$$

لمعرفة معادلتي المستوي الداخلي والخارجي لدينا:

$$\vec{N_1}(1,2,-2) \qquad \vec{N_2}(5,1,-1)$$

$$\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} = 5+2+2 = 9 > 0$$

1-) الإشارة (+) توافق معادلة المستوي المنصف الخارجي

2-) // (-) " " " " الداخلي

$$x(\sqrt{27}-5\sqrt{5}) + y(2\sqrt{27}-\sqrt{5}) + z(-2\sqrt{27}+\sqrt{5}) + (3\sqrt{27}+5\sqrt{5}) = 0$$

معادلة المنصف ~~الداخلي~~ الخارجي

$$x(\sqrt{27}+5\sqrt{5}) + y(2\sqrt{27}+\sqrt{5}) + z(-2\sqrt{27}) - \sqrt{5}) + (3\sqrt{27}-5\sqrt{5}) = 0$$

معادلة المنصف الداخلي

2-) بما أن المستوي يعامد المستويين Q_1 و Q_2 فإن ناظمه يعامد الناظمين، نقوم بإيجاد الجداء الخارجي لهما

$$\vec{N} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k}$$

$$\vec{N} = (0, 9, -9)$$

لدينا $M_0(1,2,3)$ النقطة المعلومة

ونفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي

$$\vec{MM_0} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{MM_0}\cdot\vec{N} = 0$$

$$\vec{MM_0} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

$$\vec{N}\cdot\vec{MM_0} = p(x-1) + q(y-2) + r(z-3) = 0$$

$$= 0 + 9y - 9z + 9 = 0$$

$$Q(x,y,z) = 9y - 9z + 9 = 0$$

$$Q(x,y,z) = y - z + 1 = 0$$

3- P) نوجد حزمة المستويات المارة بالمستقيم D

$$Q(x,y,z) + \lambda Q_2(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2y-2z+3) + \lambda(5x+y-z-5) = 0$$

$$= x+2y-2z+3+5\lambda x+\lambda y-\lambda z-5\lambda = 0$$

$$Q_\lambda \equiv x(1+5\lambda)+y(2+\lambda)+z(-2-\lambda)+3-5\lambda=0$$

نجد، من بينها مستوي Q' يعامد المستوي Q (ناظميهما متعامدان)

$$\vec{N_\lambda} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{N_\lambda}\cdot\vec{N}=0$$

$$\vec{N_\lambda} = (1+5\lambda, 2+\lambda, -2-\lambda) \qquad \vec{N}=(2,1,3)$$

$$\vec{N_\lambda}\cdot\vec{N} = 2(1+5\lambda)+1(2+\lambda)+3(-2-\lambda)=0$$

$$=10\lambda+\lambda-3\lambda\ 2+2-6=0$$

$$=8\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{4}$$

نعوض λ في Q_λ لنحصل على المعادلة Q' :

$$x\left(1+5\frac{1}{4}\right)+y\left(2+\frac{1}{4}\right)+z\left(-2-\frac{1}{4}\right)+3-5$$

$$\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}y-\frac{9}{4}z+\frac{7}{4}=0$$

$$Q'(x,y,z) = 9x+9y-9z+7=0$$

إن المستقيم D' هو المستقيم المعين بمعادلتي Q, Q' :

$$D' : \begin{cases} Q(x,y,z) = 2x+y+3z+7=0 \\ Q'(x,y,z) = 9x+9y-9z+7=0 \end{cases}$$

4-) نوجد مركز الكرة S بالمقارنة مع الصيغة العامة لمعادلة الكرة

$$C=(-3,2,-1) \quad \begin{cases} a=-3 \Leftarrow -2a=6 \\ b=2 \Leftarrow -2b=-4 \\ c=-1 \Leftarrow -2c=2 \end{cases}$$

نحسب نصف قطر الكرة من العلاقة

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

$$R=\sqrt{9+4+1+11}=\sqrt{25}=5$$

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي Q وفق العلاقة:

$$\delta = \frac{|pa+qb+rc+h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

حيث $\vec{N}(p,q,r)$ ناظم المستوي Q

$$\delta = \frac{|1(-3)+2(2)+2(-1)-11|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{|-8|}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

نقارن البعد مع R من أجل دراسة الوضع النسبي للمستوي مع الكرة نجد:

$$R=5 > \frac{8}{3} = \delta$$

وبالتالي المستوي Q يقطع الكرة S بدائرة

السؤال الثاني :

نوجد احداثيات النقطة M_0 بتعويض $t=0$ بالمعادلات الوسيطية فنجد :

$$x_0 = 3 \qquad y_0 = 0 \qquad z_0 = 1$$

$$M_0(3, 0, 1)$$

$$x' = -9\sin 3t + 7$$

$$y' = 6\cos 3t$$

$$z' = 2t\,e^{t^2} + 1$$

$$x'_{t=0} = 7$$

$$y'_{t=0} = 6$$

$$z'_{t=0} = 1$$

نفرض M (x, y, z) نقطة متحركة على المستوي الناظم

ولدينا معادلة المستوي الناظم للمنحني في النقطة M_0 من الشكل :

$$x'_{t=0}(x - x_0) + y'_{t=0}(y - y_0) + z'_{t=0}(z - z_0) = 0$$

$$7(x-3) + 6(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$7x + 6y + z - 22 = 0$$

لدينا معادلة المستقيم المماس في النقطة M_0 من الشكل :

$$\frac{x - x_0}{x'_{t=0}} = \frac{y - y_0}{y'_{t=0}} = \frac{z - z_0}{z'_{t=0}}$$

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-1}{1}$$

السؤال الثالث

نقوم بحساب المشتقات الجزئية لمعادلة السطح :

$$f'_x = 2x - 4y + z - 2$$

$$f'_y = 4y - 4x - 3z + 1$$

$$f'_z = -2z + x - 3y - 4$$

بحل جملة المعادلات = حل مشترك نحصل على مركز تناظر السطح

نوجد محدد الأمثال Δ لهذه الجملة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8-9) + 4(8+3) + 1(12-4) = 18 \neq 0$$

إذاً الجملة حل وحيد نوجد $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (كرمر)

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-8-9) + 4(2+12) + 1(3-16) = 9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(2+12) - 2(8+3) + 1(-16+1) = -9$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(16+3) + 4(-16+1) + 2(12-4) = -6$$

$$M\left(x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z_0 = \frac{\Delta z}{\Delta}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{9}{18},\ \frac{-9}{18},\ \frac{-6}{18}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$$

السؤال الرابع :

لإيجاد معادلة المنحني الناتج نقوم بتقاطع هذا المجسم مستويات توازي المستوي xoy أي نعوض $z=h$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \quad (\text{مقدار ثابت}) \end{cases}$$

وهنا نميز الحالات الآتية

١- $|h|<c$ عندئذٍ فإن

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad ; \quad \frac{h^2}{c^2}<1$$

هذا يعني أن المقطع قطع ناقص حقيقي نصفا قطريه المحوريين هما

$$\acute{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \qquad \acute{b}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

الطلب (٢) :

$\acute{a},\acute{b}$ تصلان إلى قيمتيهما العظمى عندما $h=0$

نعوض $h=0$ في

$$\acute{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

$$\acute{b}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

فيصبح لدينا

$$a=\acute{a}$$

$$b=\acute{b}$$

الطلب ٣

٢- $|h|>c$

عندئذٍ فإن

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad ; \quad \frac{h^2}{c^2}>1$$

$\Leftarrow$ $1-\dfrac{h^2}{c^2}$ هو مقدار سالب وبالتالي

المقطع بالمستوي $z=h$ هو قطع ناقص وهمي (تخيلي)

٣- $|h|=\pm c$

$$\acute{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}=a\sqrt{1-1}=0$$

$$\acute{b}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}=b\sqrt{1-1}=0$$

فنحصل على نقطة $(0,0)$ أي أن القطع المتكون من مقطع المجسم بالمستوي $z=h=c$ يتحول إلى نقطة أو (مجمع القطع الناقص في المستويات $z=\mp c$

أنس القزاز

سيريا مات