$\boxed{1}$

حل تمارين:

$\boxed{116 / 2}$

أثبت أن المؤثرات T_1, T_2, T_3, T_4 من R^2 في R^2 المعرفة كما يلي:

$T_1 : (\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1, 0)$

$T_2 : (\xi_1, \xi_2) \longmapsto (0, \xi_2)$

$T_3 : (\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_2, \xi_1)$

$T_4 : (\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\gamma \xi_1, \gamma \xi_2)$

هي مؤثرات خطية.

$- T_1 : R^2 \longrightarrow R^2$

$x \longmapsto T_1 x = (\xi_1, 0) \; : \; x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$

1) $\forall x_1 = (\xi_1, \xi_2), x_2 = (\eta_1, \eta_2) \in R^2$

$T_1 (x_1 + x_2) = T_1 ((\xi_1, \xi_2) + (\eta_1, \eta_2))$

$= T_1 (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2) = (\xi_1 + \eta_1, 0)$

$= (\xi_1, 0) + (\eta_1, 0) = T_1 x_1 + T_1 x_2$

2) $\forall \alpha \in R, \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2;$

$T_1 (\alpha x) = T_1 (\alpha (\xi_1, \xi_2)) = T_1 (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2)$

$= (\alpha \xi_1, 0) = \alpha (\xi_1, 0) = \alpha T_1 x$

منا ① و ② نجد أن المؤثر T_1 خطي.

$$T_4 : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$x \longmapsto T_4 x = (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2)$$

/ $\boxed{1}$

1) $\forall x_1 = (\xi_1, \xi_2), x_2 = (\eta_1, \eta_2) \in R^2$;

$$T_4(x_1 + x_2) = T_4((\xi_1, \xi_2) + (\eta_1, \eta_2))$$

$$= T_4((\xi_1 + \eta_1), (\xi_2 + \eta_2)) = (\gamma(\xi_1 + \eta_1), \gamma(\xi_2 + \eta_2))$$

$$= ((\gamma\xi_1 + \gamma\eta_1), (\gamma\xi_2, \gamma\eta_2))$$

$$= (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2) + (\gamma\eta_1, \gamma\eta_2)$$

$$= T_4 x_1 + T_4 x_2$$

2) $\forall \alpha \in R, \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$;

$$T_4(\alpha x) = T_4(\alpha(\xi_1, \xi_2)) = T_4(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2)$$

$$= (\gamma(\alpha\xi_1), \gamma(\alpha\xi_2)) = (\alpha(\gamma\xi_1), \alpha(\gamma\xi_2))$$

$$= \alpha(\gamma\xi_1, \gamma\xi_2) = \alpha T_4 x$$

من 1، 2 نجد أن المؤثر T_4 خطي.

$\boxed{3/\ 116:}$ حدد المدى والساحة والفضاء الصفري $\mathcal{N}(T)$

للمؤثرات T_1، T_2، T_3، T_4 في المسألة رقم 2؛

T_1: ساحته R^2 ومداه (مستقره الفعلي) هو المحور ox

وهو فضاء جزئي من R^2 أما الفضاء الصفري فهو:

$$\mathcal{N}(T_1) = \{x : x \in R^2 \wedge T_1 x = 0\}$$

2] $N(T_1) = \{(\xi_1,\xi_2);\ T_1(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1,0) = (0,0)\}$

$= \{(\xi_1,\xi_2) : \xi_1 = 0\} = \{(0,\xi_2) : \xi_2 \in R\}$

$= 0\xi_2$ المستقيم

أي أن الفضاء الصفري هو $0y$.

والتأويل الهندسي له هو المسقط على $0x$.

T_2: الساحة R^2، المدى المحور $0y$، الفضاء الصفري $0x$

التأويل الهندسي هو المسقط على $0y$

T_3: الساحة R^2، المدى R^2، الفضاء الصفري هو المبدأ

التأويل الهندسي له هو النظير بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث

T_4: الساحة R^2، المدى R^2، التأويل الهندسي له هو التحاكي.

$\boxed{2}$

6/ 117 : وإذا كان جداء (مركبا) مؤثرين خطيين موجودا

$T_1 : X \to Y$, $T_2 : Y \to Z$ فبين أنه خطي:

$$T_3 = T_2 T_1 : X \to Z$$

$$x \longmapsto T_3 x = T_2 T_1 x = T_2(T_1(x))$$

1) $\forall x, y \in X : T_3(x+y) = T_2 T_1 (x+y)$

$= T_2(T_1(x+y)) = T_2(T_1(x) + T_1(y))$ لأن T_1 خطي

$= T_2(T_1(x)) + T_2(T_1(y))$ لأن T_2 خطي

$= T_2 T_1(x) + T_2 T_1(y) = T_3 x + T_3 y$

2) $\forall \alpha \in R, \forall x \in X$

$T_3(\alpha x) = T_2 T_1 (\alpha x) = T_2(T_1(\alpha x))$

$= T_2(\alpha T_1(x)) = T_2(\alpha(T_1(x)))$

$= \alpha T_2(T_1(x)) = \alpha T_2 T_1(x) = \alpha T_3(x)$

من 1، 2 نجد أن T_3 خطي.

$\boxed{3}$ اكتب المؤثرات الواردة في التمرين 2 مستخدماً المصفوفات: 117 / 7

$$T_1(X) = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(X) = AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$T_3(X) = AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}$$

$$T_4(X) = AX = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\xi_1 \\ \gamma\xi_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{117/14}$ إذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً وكان $\dim X = \dim Y = n < \infty$ ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $R(T) = Y$ هو أن T^{-1} يكون موجود : $\boxed{3}$

$\Leftarrow$) لنفرض أن $R(T) = Y$ ولنثبت أن T^{-1} موجود ولنثبت أن T متباين عندئذ $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow Tx_1 - Tx_2 = T(x_2 - x_1) = 0$

ومنه إما ($T = 0$) وبالتالي $\forall x \in X : Tx = 0$ أي هو المؤثر الصفري وبالتالي $R(T) = \{0\}$ وهذا غير ممكن لأن $R(T) = Y$

أو $x_1 - x_2 = 0$ ومنه $x_1 = x_2$ و T متباين $\Leftarrow$ T^{-1} موجود.

$\Rightarrow$) لنفرض أن T^{-1} موجود وبالتالي $\dim R(T) = \dim X$ ومنه $R(T) = Y$ لأنه أياً كان $R(T) \subset Y$ من الممكن أن يكون $\dim R(T) \neq \dim X$ في هذه الحالة وبالتالي $\dim R(T) < \dim Y$ وهذا مرفوض.

$\boxed{117/15}$ لنأخذ الفضاء المتجهي X المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على R والتي لها مشتقات في جميع المراتب في كل نقطة من R ولنعرف : $T: X \longrightarrow X$ ~~$y(t) = Tx(t) = x'(t)$~~ بالمساواة $y(t) = Tx(t) = x'(t)$ أثبت ~~$R(T)$~~ أن $R(T)$ يساوي X بأكمله إلا أن T^{-1} ليس موجوداً قارن هذه المسألة بالمسألة 14 واعط التعليق المناسب:

لدينا x دالة حقيقية معرفة على R و $x \in X$

$T: X \longrightarrow X$
$x \longmapsto Tx = y = x'(t)$ ، لو أخذنا أي عنصر من $X \Leftarrow$ النواتج جميعاً المشتق الفعلي $\Leftarrow X$ من سيكون أيضاً المستمر $\Leftarrow X$ حتماً من

$R(T)$ هو X بأكمله.

T^{-1} غير موجود لأنه غير متباين طالما $Tx = 0$ من أجل كل دالة ثابتة صورتها الصفر وبالتالي يوجد عناصر غير صفرية في النواة مثال :

$5x \xrightarrow{\text{صورتها}} 5$ وبأخذ الصورة العكسية $5 \longrightarrow 5x + C \Leftarrow$ غير متباين

4

- البعد هنا (dim) غير منته بخلاف المسألة 14 منه

(117/13) ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثر خطي عكسه موجود فإذا كانت $\{x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً في $D(T)$ فبين أن المجموعة $\{Tx_1, \ldots, Tx_n\}$ مستقلة خطياً:

يجب أن نبرهن أنه إذا كان $\alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n = 0$ فإن $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ بحيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ ، لدينا T خطي ومنه:

$$\alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n = T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0 \quad (*)$$

وبما أن T^{-1} موجود نطبقه على طرفي $(*)$ فيكون:

$$T^{-1}(T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)) = T^{-1}(0)$$

لكن: $T^{-1} \circ T = T^{-1}T = I$ (التطبيق المطابق) ونعلم أنه إذا كان عكس مؤثر خطي موجود فهو خطي أيضاً أي $T^{-1}(0) = 0$ وعليه

$$I(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

لأن $\{x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً.

مبرهنة هامة: إذا كان X فضاء متري متراص وكانت M مجموعة جزئية مغلقة في X $\Leftarrow$ M متراصة.

- نأخذ متتالية من عناصر M ولتكن $\{x_n\} \ni M$
وبما أن M جزئية من X فعناصر المتتالية أيضاً من X
وبما أن X متراص فالمتتالية المأخوذة تملك متتالية جزئية متقاربة
ولكون الفضاء متري ستتقارب هذه المتتالية الجزئية من نفس
النقطة التي تتقارب منها المتتالية الأصلية، وحسب مبرهنة النقطة
الملاصقة فإن نهاية هذه المتتالية تنتمي للصاقة M وبما أن M
مغلقة فهي تساوي لصاقتها وبالتالي نهاية المتتالية تنتمي لـ M
ومن ثم M متراصة.

$\boxed{4}$

تمرين: ليكن X, Y فضاءين متريين و X فضاء متراص.
برهن أنه إذا كان $T: X \longrightarrow Y$ تطبيق متباين وغامر ومستمر
فإن T هوميومورفيزم؛

((الهوميومورفيزم: هو تطبيق متباين وغامر ومستمر وكان عكسه مستمر))

- بما أن كل مجموعة جزئية من فضاء متري متراص تكون مغلقة
ومحدودة والمطلوب: إثبات أنه:
$T^{-1}: Y \longrightarrow X$ مستمر ويكفي لذلك إثبات أن
الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في المستقر هي مغلقة في
المنطلق: $\forall E \in X: (T^{-1})^{-1}(E) = T(E) = F$
إن F مغلقة في Y لأنه لو فرضنا جدلاً العكس لكان:
مفتوحة $\Leftarrow T^{-1}(F) = E$ وهذا غير ممكن لأن T مستمر.

مبرهنة: لدينا X تام و $M \subseteq X$:

M تامة $\Leftrightarrow$ M مغلقة في X

($\Leftarrow$) لنفرض أن الفضاء الجزئي M تام ، عندئذٍ فإنه يقابل كل x من $\bar{M}$ متتالية (x_n) في M متقاربة من x ، ولما كانت (x_n) متتالية كوشي و M تام فإنه يوجد للمتتالية (x_n) نهاية في M وهذه النهاية وحيدة إذن $x \in M$ $\Leftarrow$ M مغلقة لأن النقطة x من $\bar{M}$ كانت كيفية .

($\Rightarrow$) لنفرض أن M مجموعة مغلقة وأن (x_n) متتالية كوشي في M عندئذٍ نرى أن x_n تتقارب من نقطة x في X الأمر الذي يقتضي أن $x \in \bar{M}$ ومنه $x \in M$ لأن $M = \bar{M}$ (M مغلقة فرضاً) نستنتج من هذا أن المتتالية كوشي الاختيارية (x_n) تتقارب في M الأمر الذي يثبت أن M تام

131/2 ليكن X, Y فضائين منظمين أثبت أن الشرط اللازم ... وآهو أن تكون الصورة

M محدودة

ولنبرهن أن $\overrightarrow{T}(M)$ محدودة في Y:

$\forall x \in M ; Tx \in \overrightarrow{T}(M)$

$\boxed{5}$ ١

ومن (*) وكون الـ$\|x\|$ محدودين نجد أن:

$\|Tx\| \leq C \cdot \|x\| \leq C \cdot K = m \quad , \forall x \in M$

وهذا يبين لنا أن $\overrightarrow{T}(M)$ مجموعة محدودة،

$\Rightarrow$) لنفرض أن الصورة المباشرة لكل محدودة هي محدودة ولنبرهن أن T محدود: لنثبت ذلك بحالة خاصة بأخذ المجموعة هي الكرة الواحدية المغلقة: $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ محدودة $\Leftarrow$ ~~صورة~~ صورة $B(0,1)$

$\exists C : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$

ومنه T محدودة $\Leftarrow$

ليكن $y \in X \Leftarrow \frac{y}{\|y\|} \in B(0,1) \Leftarrow$

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq C \cdot \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|y\|} \|Ty\| \leq C \cdot \frac{\|y\|}{\|y\|} = C \Rightarrow \|Ty\| \leq C\|y\|$$

$\Leftarrow T$ محدود

$\boxed{3/131}$ إذا كان $T \neq 0$ مؤثر خطي محدود فبين أنه إذا كان x أي عنصر من $D(T)$ يحقق الشرط $\|x\| < 1$ فإنه تصبح المتباينة $\|Tx\| < \|T\|$:

لدينا T محدود ومنه $\|Tx\| \leq C\|x\|$ وكون لدينا $\|x\| < 1$ فإنه يكون:

$$\|Tx\| \leq C \cdot 1 = C = \|T\|$$

خاصية هامة لفضاءات الجداء الداخلي:

$$\|ax\|^2 = \langle ax, ax\rangle = a\bar{a}\langle x,x\rangle = |a|^2\|x\|^2$$

- متباينة شفارتز ومتباينة المثلث

إن الجداء الداخلي والنظيم الناتج عنه يحققان متباينة شفارتز ومتباينة المثلث كما يلي:

1) متباينة شفارتز: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$

والشرط اللازم والكافي كي تتحقق المساواة هو أن تكون $\{x,y\}$ مجموعة مرتبطة خطياً.

2) متباينة المثلث: $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ وشرط المساواة $y=0$ أو $x=cy$ $(c \geq 0$ حقيقي$)$

- البرهان:

- إذا كان $y=0 \Leftarrow$ $\langle x,y\rangle = \langle x,0\rangle = 0$

نفرض أن $y \neq 0$ ومنه $\forall \alpha$ فإن:

$$0 \leq \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle =$$

$$= \langle x,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\left[\langle y,x\rangle - \bar{\alpha}\langle y,y\rangle\right]$$

إذا اخترنا $\bar{\alpha} = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$ نلاحظ أن: $\langle y,x\rangle - \bar{\alpha}\langle y,y\rangle = 0$

$$\Leftarrow \quad \|x-\alpha y\|^2 = \langle x,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

نعوض $\bar{\alpha}$ بقيمتها المأخوذة مسبقاً $\Leftarrow$

$$\|x-\alpha y\|^2 = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

حيث: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ $\Leftarrow$

$$\langle x,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

$\boxed{7}$

$\|y\|^2$

نضرب بـ $\|y\|^2 \Leftarrow$

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq |\langle x,y\rangle|^2$$

بجذر الطرفين $\Leftarrow$ $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

- إن الشرط اللازم والكافي كي تتحقق المساواة هو أن يكون $y=0$ أو أن يكون $\|x-\alpha y\|^2=0$ وواضح أن المساواة الأخيرة تكافئ $x-\alpha y=0$ أي $x=\alpha y$ الأمر الذي يثبت الارتباط الخطي.

-(2 $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$ و $\{\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle\}$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

واستناداً لمتباينة شفارتز $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- إن الشرط اللازم والكافي للمساواة هو أن يكون:

$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2\|x\| \cdot \|y\|$ إن: $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$

هو $2\,Re\langle x,y\rangle \Leftarrow$ $2Re\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$

أي: $2\,Re\langle x,y\rangle = 2\|x\|\|y\| \Leftarrow Re\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$

وحسب متباينة شفارتز:

$$Re\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x,y\rangle|$$

وبما أن القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يمكن أن يكبر قيمته المطلقة فلابد من إيجاد مساواة تقتضي الارتباط الخطي.

وبالاعتماد على القسم الأول من المبرهنة نبرهن $y=0$ أو $x = cy$

وبعد وضع إشارة التساوي. $Re\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$

$\Leftarrow$ القسم الحقيقي للعدد العقدي مساوي لقيمته المطلقة ومنه لابد أن يكون قسمه التخيلي صفراً لذا فإن $0 \leq Re\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle$

كما أن $0 \leq c$ وهذا ناتج من أن $0 \leq \langle x,y\rangle = \langle cy,y\rangle = c\cdot\|y\|^2$

---

4 / 131 أعط برهان على صحة أنه إذا كان T مستمراً في نقطة واحدة فقط فإنه مستمر دون الإفادة من أن الشرط اللازم والكافي كي يكون T مستمراً هو أن يكون محدوداً:

- ليكن T مستمر في النقطة x_0 مثلاً عندئذ: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \|x-x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$

ولنثبت أن T مستمر، لنأخذ: $x - x_0 = \dfrac{\delta}{\|x-x'\|}\cdot(x-x')$

حيث x' نقطة اختيارية و $\|x-x'\| \leq \delta_1 \Leftarrow$

$\|x - x_0\| = \dfrac{\delta}{\|x-x'\|}\cdot\|x-x'\| = \delta$

$\Rightarrow \|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\| =$

$= \|T\cdot\delta$ ...

$\boxed{9}$

(131/5) بين أن المؤثر $T: \ell^{\infty} \to \ell^{\infty}$ ؛

$y = (\eta_i) = Tx$

حيث $\eta_i = \xi_i / j$ ، $X = (\xi_i)$ هو مؤثر خطي ومحدود:

$x = (\xi_i) \Rightarrow Tx = (\eta_1, \eta_2, \dots)$

حيث: $\eta_1 = (\xi_1/1, \xi_2/1, \xi_3/1, \dots)$

$\eta_2 = (\xi_1/2, \xi_2/2, \xi_3/2, \dots)$

$\vdots$

- خطي: أياً كان العدد α وأياً كان: $x_1 = (\xi_i^{(1)}) \in \ell^{\infty}$

و $x_2 = (\xi_i^{(2)}) \in \ell^{\infty}$:

$-T(x_1 + x_2) = T(\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)}) = (\eta_i)$

$= (\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)}/1, \xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)}/2, \dots) =$

$= (\xi_i^{(1)}/1, \xi_i^{(1)}/2, \dots) + (\xi_i^{(2)}/1, \xi_i^{(2)}/2, \dots)$

$= \eta_j^{(1)} + \eta_j^{(2)} = Tx_1 + Tx_2$

$- T(\alpha x) = T(\alpha \xi_i) = (\eta_j) = (\alpha \xi_i / j) = \alpha (\xi_i / j)$

$= \alpha \cdot T(x)$

$\| Tx \| = \sup_j (\eta_j) = \sup_j (\xi_i / j) = \sup \{ \xi_i \} = \| X \|$

أي $\| x \| = \| Tx \| \Leftarrow T$ محدود.

(131/6) ليكن T مؤثر خطي محدود من فضاء منظم X على فضاء منظم Y فإذا وجد عدد موجب b بحيث أن: $(\forall x \in X)$

$\| Tx \| \geq b \| x \|$ فبين أن $T^{-1}: Y \to X$ يكون موجود ومحدود:

- ليكن $Tx = 0$ عندئذ $\| Tx \| \geq b \| x \|$ $0 = \| Tx \|$ وبالتالي

$\| x \| = 0 \Leftarrow x = 0$ ومنه T^{-1} موجود وذلك حسب

الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر T^{-1} موجوداً هو أن يكون : « $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ »

{132/10} لنعرف على $C[0,1]$ المؤثر S المحدد بالمساواة $y(s) = s\int_0^1 x(t)\,dt$ والمؤثر T بالمساواة: $y(s) = s\,x(s)$

هل S و T تبديليان وعيّن كلاً من $\|S\|$ و $\|T\|$ و $\|ST\|$ و $\|TS\|$

$$TS(x) = T\left(s\int_0^1 x(t)\,dt\right) = s^2\int_0^1 x(s)\,ds ,$$

$$ST(x) = S(s\,x(s)) = s\int_0^1 s\,x(s)\,ds = s^2\int_0^1 x(s)\,ds$$

$$\Leftarrow \quad \forall x \in C[0,1];\ ST(x) = TS(x)$$

أي أن T, S تبديليان.

$$\|S(x)\| = \max_{s\in C[0,1]} \left| s\int_0^1 x(t)\,dt \right|$$

$$= \max|s|\left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \leq \max_t |x(t)| \int_0^1 dt = \|x\|$$

$$\frac{\|S(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \sup_S \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} \leq 1$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\|S\| \leq 1} \quad (1)$$

لنأخذ عنصر معين $x = x_0 = 1 \Leftarrow \|x\| = 1 \Leftarrow$

$$\|S\| \geq \|S(x)\| = \left\|s\int_0^1 dt\right\| \geq 1 \Rightarrow \|S\| \geq 1 \quad (2)$$

من 1 , 2 نجد أن $\|S\| = 1$ وبالمثل نجد أن $\|T\| = 1$

وبما أن $TS = ST$ فإن: $\|TS\| = \|ST\|$

$$- \quad \|ST\| \leq \|S\|\|T\| = 1 \Rightarrow \|ST\| \leq 1 \quad (1)$$

ومن أجل $x = 1$ نجد $\|x\| = 1$

$$S.T(x) = s^2\int_0^1 x(s)\,ds = s^2$$

$$\|ST\| \geq \|ST(x)\| = \max_{s\in C[0,1]} s^2 = 1 \Rightarrow$$

$$(2) \quad \|ST\| \geq 1$$

من 2 , 1 نجد أن

$$\|ST\| = 1$$

من 1، 2 نجد أن $\|ST\| = 1$

11

9 / 131 ليكن المؤثر: $T: C[0,1] \to C[0,1]$

$$y(t) = \int_0^1 x(\tau)\,d\tau$$

$T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$

حدد كل من $R(T)$ أي المستقر الفعلي وليس المستقر وحدد $C[0,1]$ ثم قرر إذا كان T^{-1} خطي ومحدود.

- $R(T)$ هو الفضاء الجزئي من ~~الفضاء~~ لجميع الدوال القابلة للمفاضلة والمستمرة على المجال $[0,1]$ والتي مشتقاتها مستمرة.

~~$T^{-1}(y(t)) = x(t)$~~ ~~قاعدة ربطه $T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$~~ -

نولد دالة التكامل وهذا التكامل تابع لحده الأعلى فمشتقه هو تابع ما تحت التكامل ومشتقه دالة مستمرة مرة واحدة على الأقل و $R(T)$ هو جزء من المستقر $\Leftarrow R(T)$ هو جزء قابل للمفاضلة ومشتقه مستمر.

- $T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$ قاعدة ربطه $y(t) \mapsto T^{-1}(y(t)) = x(t)$

$x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ؛ $0 < t \le 1$ إذا أخذنا $t = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt$ قيمة دالة المستقر عند $\frac{1}{2}$

نستنتج أنه لدينا قيمة وحيدة.

T متكاملة $\Leftarrow T^{-1}$ اشتقاق.

إذ $\int_a^b x_2(t)\,dt = \int_a^b x_1(t)\,dt$ هذا التابع متباين لأنه محدود وبالتالي لا يوجد شائب لأن T^{-1} تطبيق موجود قاعدة الربط هي المشتق لأن تكامل دالة ما بالنسبة لحدها الأعلى مشتقه هو تابع ما تحت التكامل على أن نبدل تكامله بحده الأعلى.

131/9 تتمة: ان T^{-1} خطي حيث: $T^{-1}(y)=y'$

12

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha y_1'+\beta y_2'=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

إلا أنه T^{-1} ليس محدود طالما $\|T^n\|=1$ و:

$$|(t^n)'|=n|t^{n-1}|$$

$$\|T^{-1}(t^n)\|=|(t^n)'|=n|t^{n-1}|=n$$

$$\Leftarrow \quad n=\|T^{-1}\| \quad (\text{n كيفية})$$

141/1 أثبت أنه الداليين المعرفين على $C[a,b]$:

اذا افترضنا عنصراً مثبتاً t_0 ووضعنا: $f_1(x)=x(t_0)$

والدالي على ℓ^2: $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j a_j$ بحيث (α_j) عنصر مثبت

خطيانه:

$$f_1(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)(t_0)$$

$$=\alpha x(t_0)+\beta y(t_0)=\alpha f_1(x)+\beta f_1(y)$$

$$f(\alpha x+\beta y)=\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha\xi_j+\beta\eta_j)\alpha_j$$

$$=\alpha\sum\xi_j\alpha_j+\beta\sum\eta_j\alpha_j=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

141/2 بين أنه الداليين المعرفين على $C[a,b]$ بالمساواتين:

خطيانه ومحدودان
$$\begin{cases} f_1(x)=\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt\,; & (y_0\in C[a,b]) \\ f_2(x)=\alpha x(a)+\beta x(b)\,; & (\alpha,\beta \text{ fixed}) \end{cases}$$

13 $f_1(\alpha x+\beta y)=\int_a^b (\alpha x+\beta y)(t)\cdot y_0(t)\,dt$

$=\int_a^b (\alpha x(t)+\beta y(t))\,y_0(t)\,dt = \alpha\int_a^b x(t)\cdot y_0(t)\,dt +$

$+\beta\int_a^b y(t)\cdot y_0(t)\,dt = \alpha f_1(x)+\beta f_1(y) \Rightarrow$ خطي f_1

$|f_1(x)| = \left|\int_a^b x(t)\cdot y_0(t)\,dt\right| = \max|x(t)|\cdot\int_a^b y_0(t)\,dt$

$=\|x\|\cdot\underbrace{\int_a^b y_0(t)\,dt}_{C} \Rightarrow$ محدود f_1

$f_2(\alpha_1 x+\beta_1 y) = \alpha(\alpha_1 x+\beta_1 y)(a)+\beta(\alpha_1 x+\beta_1 y)(b)$

$=\alpha(\alpha_1 x(a)+\beta_1 y(a))+\beta(\alpha_1 x(b)+\beta_1 y(b))$

$=\alpha_1(\alpha x(a)+\beta x(b))+\beta_1(\alpha y(a)+\beta y(b))$

$=\alpha_1 f_2(x)+\beta_1 f_2(y) \Rightarrow$ خطي f_2

$|f_2(x)| = |\alpha x(a)+\beta x(b)| \le \alpha|x(a)|+\beta|x(b)|$

$\le \alpha\max_{t\in[a,b]}|x(t)| + \beta\max_{t\in[a,b]}|x(t)| \le \underbrace{(\alpha+\beta)}_{C}\|x\|$

محدود. f_2 $\Leftarrow$

141/3 حدد النظيم للدالي الخطي f المعرف على $C[0,1]$

$f(x)=\int_{-1}^{0} x(t)\,dt-\int_0^1 x(t)\,dt$

$|f(x)| = \left|\int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt\right| \le \left|\int_{-1}^{0} x(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right|$

$\le \max_t|x(t)|\int_0^1 dt + \max_t|x(t)|\int_0^1 dt$

$=\|x\|(1)+\|x\|(1)=\|x\|(2) \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|}\le 2$

$\Rightarrow \|f\|\le 2$ (1)

$\boxed{14}$

لنختر $x(t)=1$ عندئذٍ $\|x\|=1$

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| \int_0^1 dt - \int_{-1}^0 dt \right| = \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \|f\| \geq 2 \quad (2)$$

من ١ و ٢ نجد $\|f\|=2$

16/141 الفضاء $C^1[a,b]$ هو الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة على $I=[a,b]$ حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|$$

-1- بين أن موضوعات النظيم محققة :

-1- $\|x\| \geq 0$ وضوحاً

-2- $\|x\|=0 \Leftrightarrow \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| = 0$

أي : $x(t)=0 \wedge x'(t)=0$ ومنه $x=0$

-3- $\|\alpha x\| = \max_t |\alpha x(t)| + \max_t |\alpha x'(t)|$

$= |\alpha| (\max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|) = |\alpha| . \|x\|$

-4- $\|x+y\| = \max_t |(x+y)(t)| + \max_t |(x'+y')(t)|$

$\leq \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| + \max_t |y(t)| + \max_t |y'(t)|$

$= \|x\| + \|y\|$

وبالتالي موضوعات النظيم محققة

15

-2- أثبت أن $f(x)=x'(c)$ حيث $c=\frac{a+b}{2}$ يعرف دالياً خطياً ومحدوداً على $C^1[a,b]$:

دالي خطي لأنه: $f : C^1[a,b] \longrightarrow R$

$$f(x+y)=(x+y)'(c)=x'(c)+y'(c)=f(x)+f(y)$$

$$f(\alpha x)=(\alpha x)'(c)=\alpha \cdot x'(c)=\alpha \cdot f(x)$$

ومحدود لأن: $|f(x)|=|x'(\frac{a+b}{2})| \leqslant \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$

$$\leqslant \max_t |x'(t)|+\max_t |x(t)| \Rightarrow |f(x)| \leqslant ||x||$$

-3- إذا اعتبرنا f دالي على الفضاء الجزئي من الفضاء المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة فإن f غير محدود:

- لنأخذ مثلاً $x=t^n$ عندئذٍ: $||x||=\max_t|x(t)|=b^n$

$$|f(x)|=|x'(t)|=|n.t^{n-1}| \leqslant \max_t |n.t^{n-1}|=n.b^{n-1}$$

وبالتالي: $\frac{|f(x)|}{||x||} \leqslant \frac{n.b^{n-1}}{b^n}=\frac{n}{b}$

و n كيفي $\Leftarrow$ f غير محدود.

141 / 7

إذا كان f دالي خطي محدود على فضاء منظم عقدي فهل يكون $\overline{f}$ (المرافق العقدي لـ f) محدود وخطي:

$$|\overline{f}(x)|=|f(x)| \underset{\text{محدود } f}{\leqslant} C||x||$$

- لدينا $g=\overline{f}$ محدود لأنه:

- لكنه g غير خطي لأن:

$$g(\alpha x)=\overline{f(\alpha x)}=\overline{\alpha}\ \overline{f(x)}$$

$$=\overline{\alpha}\ g(x)$$

أمثلة على الداليات الخطية

الجداء العددي

ليكن a عنصر مثبت في الفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث: $a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

يعين الضرب العددي المألوف لدى تثبيت أحد العاملين دالياً:

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \qquad x \longmapsto f(x)=\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3 = x.a$$

هذا الدالي خطي ومحدود.

إثبات الخطية:

ليكن $\mathbb{R}^3 \ni x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ و $\alpha\in K=\mathbb{R}$ لنثبت أن: $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

وذلك:

$\alpha x=(\alpha\eta_1,\alpha\eta_2,\alpha\eta_3)$ ومنه:

$$f(\alpha x)=\alpha_1(\alpha\eta_1)+\alpha_2(\alpha\eta_2)+\alpha_3(\alpha\eta_3)$$

$$=\alpha\alpha_1\eta_1+\alpha\alpha_2\eta_2+\alpha\alpha_3\eta_3=\alpha(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3)=\alpha f(x)$$

ليكن $\mathbb{R}^3 \ni x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ و $\mathbb{R}^3 \ni y=(w_1,w_2,w_3)$ ومنه:

$x+y=(\eta_1+w_1,\eta_2+w_2,\eta_3+w_3)$ لنثبت أن: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

وذلك:

$$f(x+y)=\alpha_1(\eta_1+w_1)+\alpha_2(\eta_2+w_2)+\alpha_3(\eta_3+w_3)$$

$$=\alpha_1\eta_1+\alpha_1w_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_2w_2+\alpha_3\eta_3+\alpha_3w_3$$

$$=\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3+\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\alpha_3w_3=f(x)+f(y)$$

$\boxed{17}$

إثبات المحدودية:

نلاحظ أن: $|f(x)| = |x \cdot a| = |\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3| \leq \|x\|\cdot\|a\|$

جداء داخلي وليس الجداء المألوف

حسب متباينة كوشي شفارتز

ومنه f محدود

ومنه:

$$\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(f)}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(f)}} |f(x)| \leq \|a\|$$

$\Leftarrow$ $(*)$ $\|f\| \leq \|a\|$ هذا من جهة

من جهة ثانية: <u>أوجد النظيم.</u>

لنضع $x=a$ و a هو شعاع في $\mathbb{R}^3$ ومنه يمكن حساب $f(a)$:

نعلم أن:

$$f(x) = \alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3$$

ومنه:

$$f(a) = \alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2+\alpha_3\alpha_3 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = \|a\|^2$$

~~وبالتالي~~: ونعلم أنه $\|a\|\cdot\|f\| \leq |f(a)|$ وبالتالي:

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

$\Leftarrow$ $(*)'$ $\|f\| \geq \|a\|$

من $(*)$ و $(*)'$ نجد أن: $\|f\| = \|a\|$

هذا المؤثر مستمر لأنه محدود.

3 - التكامل المحدد: دورة

لتكن $C[a,b]$ فضاء الدوال المستمرة على الفترة (المجال) المغلق $[a,b]$

و لنعرف الدالي:

$$f : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

حيث x نقطة من الفضاء $C[a,b]$، كل نقطة من الفضاء $C[a,b]$ هي دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فتكامل ريمان المحدد موجود و منه $f(x)$ موجود.

كل دالة مستمرة على ساحة مغلقة يكون: $\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq M(b-a)$

حيث: $M = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

واضح أن الدالي f هو دالي خطي.

إثبات المحدودية:

$x \in C[a,b]$ فإن: $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

و منه:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|\,dt \leq \int_a^b dt \max_{t\in[a,b]}|x(t)| = [t]_a^b \|x\| = (b-a)\,\|x\|$$

بالتقسيم على $\|x\| \neq 0$ و بأخذ الـ Sup:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in D(f)}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b-a$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(f)}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(f)}} |f(x)|$$

$\Leftarrow$ و منه: $(*)\ \|f\| \leq b-a$ هذا من جهة.

هذا يبين أن الدالي f محدود.

من جهة ثانية :

لنأخذ : $x(t) = x_0(t) = 1$ (الدالة الثابتة) ، نلاحظ أن التابع x مستمر على الفترة المغلقة $[a,b]$ ومنه $1 \in C[a,b]$ وأن $\|x_0\| = 1$

~~نلاحظ أن~~ ولدينا كون f محدود $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{|f(1)|}{\|1\|} = |f(1)| = \int_a^b 1\, dt = [t]_a^b = b - a$$

$$\Leftarrow \quad \|f\| \geqslant b - a \quad (*)'$$

من $(*)$ و $(*)'$ نجد أن : $\|f\| = b - a$

4- الفضاء $C[a,b]$:

لنثبت نقطة t_0 من الفترة $[a,b]$، ولنعرف الدالي :

$$f : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x(t_0)$$

أي إنّ صورة الدالة x وفق الدالي f هي قيمة الدالة x عند النقطة المثبتة t_0 .

عند تغيير t_0 نحصل على دالي آخر .

هذا الدالي خطي ومحدود :

إثبات الخطية :

$$f(x+y)(t_0) = (x+y)(t_0) = x(t_0) + y(t_0) = f(x)(t_0) + f(y)(t_0)$$

وهذا صحيح أياً كانت t_0 من الفترة $[a,b]$، ومنه :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x)(t_0) = (\alpha x)(t_0) = \alpha x(t_0) = \alpha f(x)(t_0)$$

وهذا صحيح أياً كانت t_0 من الفترة $[a,b]$، ومنه :

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$\boxed{20}$

إثبات المحدودية:

نلاحظ أن:

$$|f(x)| = |x(t_0)| \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \|x\|$$

بتقسيم الطرفين على $\|x\| \neq 0$ نجد:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(f)}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in D(f)}} |f(x)| \leq 1$$

ومنه: $\|f\| \leq 1$ (*) هذا من جهة

من جهة ثانية:

لنأخذ حالة خاصة: $C[a,b] \ni x = x_0 = 1$

ومنه: $x_0(t_0) = 1$

نلاحظ أن: $|f(x)| \leq \|f\| . \|x\|$

$$\Rightarrow \|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x\|} = |f(x_0)| = \cancel{\|f\|} |x_0(t_0)| = 1$$

ومنه $\|f\| \geq 1$ (*)'

من (*) و (*)' نجد أن: $\|f\| = 1$

جداء داخلي

كل نظيم يشتق من دالة جداء داخلي لابد وأن يحقق مساواة متوازي الأضلاع $\boxed{21}$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

الإثبات:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$l_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x,x \rangle + 2\langle y,y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = l_2$$

22 أمثلة على فضاءات جداء داخلي

١- الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$: هو فضاء هلبرت :

أخذ عنصرين $\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ & $\mathbb{R}^n \ni y = (\eta_i) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

يُعرّف عليه جداءً داخلياً بالشكل :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n$$

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ هو فضاء جداء داخلي.

لنثبت أنه تحقق خواص دالة الجداء الداخلي :

1) $\forall x \in X = \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle \geq 0$

$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geq 0$

مجموع مربعات أكبر أو يساوي الصفر ومنه $\langle x, x \rangle \geq 0$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad : \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x = (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots, \alpha \xi_n)$

$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \xi_i)(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha (\xi_i \eta_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \alpha \langle x, y \rangle$$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

كون فضاء جداء داخلي حقيقي.

$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \qquad \mathbb{R}^n \ni y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i = \langle y, x \rangle$$

4) $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_{\mathbb{R}^n}$

$x = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftarrow$ أي: $x = (0, 0, \dots, 0)$ ومنه:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

$\langle x, x \rangle = 0$: حيث أن $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \xi_i^2 = 0 \quad \forall i = \overline{1:n} \Rightarrow \xi_i = 0 \quad \forall i = \overline{1:n}$$

$$\Rightarrow x = (0, 0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ $\boxed{24}$

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ $z = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i w_i + \eta_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i w_i$$

$$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

2- الفضاء الوحدي C^n : بنفس الأسلوب لكن مرافق المركبة الثانية أي

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n$$

وهو ف.ج. $\|x\| = \left(|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2\right)^{1/2}$ نظامي

3- الفضاء $L^2[a,b]$: وهو فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً وهو متمم للفضاء $C[a,b]$

~~يمكننا الحصول على~~ دالة الجداء الداخلي ~~بالمساواة~~: عليه معرفة بالشكل:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

وعندنا أن $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\, dt\right)^{1/2}$

بفرض $x(t)$ و $y(t)$ دوال حقيقية.

إذا كانت $x(t)$ ، $y(t)$ دوال عقدية ، فإن دالة الجداء الداخلي تعطى بالمساواة

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

26

إن تقارب هذه المتسلسلة $\sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i \bar{\eta}_i = \langle x,y \rangle$ ناتج من متباينة كوشي شوارتز $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

حيث $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum \xi_i \bar{\xi}_i} = \sqrt{\sum |\xi_i|^2}$ وكذلك $\|y\| = \sqrt{\sum |\eta_i|^2}$

وبالتالي: $|\langle x,y \rangle| \leq (\sum |\xi_i|^2)^{1/2} (\sum |\eta_i|^2)^{1/2}$ لكون العنصرين x,y من ℓ^2

موجود / موجود

وبالتالي $\langle x,y \rangle$ موجود والنظيم محدد بالمساواة

$\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2} = (\sum |\xi_i|^2)^{1/2}$

$\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\, dt \right)^{1/2}$

4- فضاء المتتاليات لهلبرت ℓ^2: وهو فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً وهو متمم لفضاء $C[a,b]$ بحيث

إن الفضاء ℓ^2 هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي المعرف بالمساواة:

$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i \bar{\eta}_i \;;\; x,y \in \ell^2, x = \xi_i, y = \eta_i$ وكلاً من x,y يحقق

$\sum |\xi_i|^2 < \infty$

$\sum |\eta_i|^2 < \infty$

تسمية الورقة المرفقة

أمثلة على فضاء باناخ دون أن يكون فضاء هلبرت: ليس كل

الفضاء ℓ^p

دورة : $p \neq 2$

إن الفضاء ℓ^p عندما يكون $p \neq 2$ ليس فضاء جداء داخلي وبالتالي فإن ℓ^p لأنه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع

ليس فضاء هلبرت.

$\boxed{27}$

البرهان:

لنأخذ $x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ نجد: $\|x\| = 2^{1/p}$ حسب النظم على ℓ^p

$y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ نجد: $\|y\| = 2^{1/p}$ هو $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$

ومنه:

$x + y = (2, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ نجد: $\|x+y\| = 2$

$x - y = (0, 2, 0, \dots) \in \ell^p$ نجد: $\|x-y\| = 2$

بالاستفادة من مساواة متوازي الأضلاع:

$$\ell_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 4 = 8$$

$$\ell_2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right) = 4 \cdot 2^{2/p}$$

نلاحظ أن $\ell_1 \neq \ell_2$ عندما $p \neq 2$

بما أن ℓ^p تام فإن ℓ^p حيث $p \neq 2$ هو فضاء باناخ دون أن يكون فضاء هلبرت لأنه ليس مولد من جداء داخلي حيث لم يحقق مساواة متوازي الأضلاع

2- الفضاء $C[a,b]$:

$\boxed{28}$

إن الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي، وبالتالي فإنه ليس فضاء هلبرت.

البرهان: لكنه ف. باناخ

النظيم $\|\cdot\|$ المعرف على $C[a,b]$ هو: $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

لنأخذ:

$x(t) = 1$ نجد أن: $\|x\| = 1$

$y(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$ نجد أن: $\|y\| = 1$ (عندما $t=b$)

ومنه:

$x(t) + y(t) = 1 + \dfrac{t-a}{b-a}$ نجد أن: $\|x+y\| = 2$ (عندما $t=b$)

$x(t) - y(t) = 1 - \dfrac{t-a}{b-a}$ نجد أن: $\|x-y\| = 1$ (عندما $t=a$)

بالاستفادة من مساواة متوازي الأضلاع:

$$l_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$l_2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(1+1) = 4$$

$$l_1 \neq l_2$$

هام: إذا كان الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي ، ~~فإن~~ فيمكن الحصول عليه من خلال المساواة

$\boxed{29}$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

الإثبات:

لدينا:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

بالطرح:

$\boxed{30}$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle$$

بما أن الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي فإن $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ومنه

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

د- أنه إذا كان فضاء جداء داخلي عقدي، فإن:

$$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (*)$$

$$\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) \quad (\acute{*})$$

يطلق على الدستور السابق اسم متطابقة الاستقطاب

من $(*)$ و $(\acute{*})$ نجد أن:

$$\langle x,y\rangle = \operatorname{Re}\langle x,y\rangle + i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle$$

أي:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

أو: يمكن التعبير عنها على شكل:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \|x + i^n y\|$$

لنثبت صحة هذه العلاقة:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

بالطرح:

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 = 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle \quad \boxed{1}$$

$\boxed{31}$

$$\|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle$$

$$= \|x\|^2 - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle + i(-i)\langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-iy\|^2 = \langle x-iy, x-iy\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,-iy\rangle + \langle -iy,x\rangle + \langle -iy,-iy\rangle$$

$$= \|x\|^2 + i\langle x,y\rangle - i\langle y,x\rangle - i(i)\langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + i\langle x,y\rangle - i\langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

بالطرح:

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = -2i\langle x,y\rangle + 2i\langle y,x\rangle$$

نضرب الطرفين بـ (i):

$$i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) = -2i(i)\langle x,y\rangle + 2i(i)\langle y,x\rangle$$

$$i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) = 2\langle x,y\rangle - 2\langle y,x\rangle \quad \boxed{2}$$

بجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$:

$$4\langle x,y\rangle = \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

بقسمة الطرفين على (4) يتم المطلوب.

انتهت المحاضرة

مؤثر الإسقاط :

ليكن Y فضاء جزئي مغلق من فضاء هلبرت H (حسب مبرهنة المجموع المباشر)

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

أي لكل عنصر x من H تمثيل وحيد بالشكل : $x = y + z$ حيث:

$$y \in Y \qquad z \in Y^{\perp}$$

لنعرف التطبيق: سؤال هام ،

$$P : H \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto Px = y$$

يسمى التطبيق P مؤثر الإسقاط لـ H على Y ، ويحقق ما يلي :

برهن أنه خطي ومحدود وأوجد نظيمه وهل هو مرافق.

١- المؤثر P خطي ، لأن:

لتكن x و x' نقطتين من H ومنه لكل من x و x' تمثيل وحيد بالشكل:

$$x = y + z \qquad x' = y' + z'$$

حيث $y, y' \in Y$ و $z, z' \in Y^{\perp}$

ليكن α و β مقداران سلميان من الحقل K.

ومن ثم فإن:

$$H \ni \alpha x + \beta x' = \alpha(y+z) + \beta(y'+z') = (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')$$

تمثيل لـ $(\alpha x + \beta x')$. وحيد أيضاً

حيث:

$$\alpha y + \beta y' \in Y \quad \text{و} \quad \alpha z + \beta z' \in Y^{\perp}$$

(نظراً لأن كل منهما فضاء متجهي جزئي)

ومنه:

$$P(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y' = \alpha Px + \beta Px'$$

$H = Y \oplus Y^{\perp}$ الفكرة دائماً تكمن من

حيث $x = y + z$

2- المؤثر P محدود، لأن:

لتكن x نقطة ما من H ومنه لـ x تمثيل وحيد بالشكل: $x = y + z$ حيث:

$y \in Y$ و $z \in Z = Y^{\perp}$ ومنه:

$$\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \langle y+z, y+z \rangle = \langle y,y \rangle + \langle y,z \rangle + \langle z,y \rangle + \langle z,z \rangle$$

بما أن $y \in Y$ و $z \in Y^{\perp}$ فإن:

$$\langle y,z \rangle = \langle z,y \rangle = 0$$

وبالتالي:

$$\|x\|^2 = \langle y,y \rangle + \langle z,z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

كما أن:

$Px = y$ ومنه: $\|Px\|^2 = \|y\|^2$

وبالتالي:

$$\|Px\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|Px\| \leq \|x\| \quad \boxed{*}$$

أي المؤثر P محدود ومستمر.

أيضاً:

إذا لم يكن Y الفضاء الصفري فإن $\|P\| = 1$ (نظيم المؤثر P)، لأن:

من جهة:

بقسمة طرفي العلاقة $\boxed{*}$ على $\|x\|$ (بحيث $x \neq 0$) نجد أن:

$$\frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|P\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|P\| \leq 1 \quad \boxed{1}$$

من جهة ثانية:

ليكن $\phi \neq x \in H$ بحيث أن: $x = x + 0$ و $0 \in Z$ و $x \in Y$

إن $Px = x$ أي $\|Px\| = \|x\|$,

لدينا:

$$\|P\| \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|}_{x \neq 0} = \frac{\|x\|}{\|x\|}_{x \neq 0} = 1 \Rightarrow \|P\| \geq 1 \quad \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أن $\|P\| = 1$

3- المؤثر p تطبيق مرادح أي $p^2=p$ ، لأن: $\boxed{34}$

أيا كان $H \ni x = y+z$ حيث $y \in Y$ و $z \in Y^{\perp}$ فإن: $px = y \in Y$

ومن ثم فإن:

$$p^2 x = p(px) = py = y = px$$

4- مدى المؤثر p $R(p)$ هو Y

نواة المؤثر p $N(p)$ هي $Z = Y^{\perp}$

أي: $H = R(p) \oplus N(p)$

35

174/2 مبرهنة فيثاغورث : إذا كان $x \perp y$ في فضاء جداء داخلي فبين أن: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

ثم عمم هذا الدستور على m من المتجهات المتعامدة مثنى

$\|y_1 + \cdots + y_m\|^2 = \|y_1\|^2 + \cdots + \|y_m\|^2$

$\|\sum_{i=1}^{m} y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2$

- $x \perp y \Leftarrow \langle x,y\rangle = 0 \Leftarrow \langle y,x\rangle = 0$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$

$+ \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

174/3 إذا كان X في المسألة السابقة حقيقياً فبين صحة العكس أي أن العلاقة الواردة سابقاً تقتضي أن يكون $x \perp y$ وأثبت أن هذا لا يصح عند كون X عقدياً وأورد أمثلة على ذلك:

- X حقيقي والمساواة صحيحة $\Leftarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Rightarrow \langle x+y, x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle$

$= 0 \Rightarrow 2\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$

- X عقدي: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 \Rightarrow \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$

$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \underline{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2$

$\Rightarrow 2\,Re\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow Re\langle x,y\rangle = 0$

36

174/4 إذا كان X فضاء جداء داخلي حقيقي، فبين أن الشرط $\|x\| = \|y\|$ يقتضي أن يكون $\langle x+y, x-y\rangle = 0$

- ما هو المعنى الهندسي لهذا إذا كان $X = R^2$ وما الذي يقتضيه هذا الشرط إذا كان X عقدياً:

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle$$
$$= \|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle = 0$$

والمعنى الهندسي له هو أن القطران في المعين متعامدان.

$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} - \langle x,y\rangle = -2\,Img\,\langle x,y\rangle$

174/6 ليكن $x \neq 0$ و $y \neq 0$، بين أنه إذا كان $x \perp y$ فإن $\{x,y\}$ مجموعة مستقلة خطياً:

لدينا بالفرض $x, y \neq 0$، $x \perp y$

$\{x,y\}$ مستقلة خطياً عندما: $\alpha x + \beta y = 0$ وبالتالي:

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = 0 \Rightarrow \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = 0$$
$$\Rightarrow |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2 = 0$$

لدينا $x, y \neq 0 \Leftarrow \|x\|^2, \|y\|^2 \neq 0 \Leftarrow$

$|\alpha|^2 = 0$ ، $|\beta|^2 = 0 \Leftarrow |\alpha| = 0, |\beta| = 0 \Leftarrow \alpha = 0, \beta = 0$

وهذا الحل وحيد وبالتالي تكون هذه الجملة مستقلة خطياً.

174/7 إذا كان $\langle x,u\rangle = \langle x,v\rangle$ أياً كان x في فضاء جداء داخلي فبين أن $u = v$:

$$\langle x,u\rangle = \langle x,v\rangle \ \forall x \Rightarrow \langle x,u\rangle - \langle x,v\rangle = 0 \ \forall x$$
$$\Rightarrow \langle x, u-v\rangle = 0$$

وبالتالي إما أن يكون $x \perp u-v$ وهي مرفوضة لأنها حالة خاصة لـ x أو أن يكون $x = 0$ وكذلك هي حالة خاصة لـ x

لأنه في نص المسألة لدينا أيا كانت x وبالتالي يكون $\boxed{37}$

$u - v = 0$ صحيحة $(\forall x)$ $\Leftarrow$ $u = v$

• طريقة ثانية: لدينا $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ صحيحة أيا كانت x

وبالتالي نختار $x = u - v$ $\Leftarrow$ $\langle u - v, u - v\rangle = 0$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 = 0 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$$

---

11 / 174 ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الأزواج المرتبة من الأعداد العقدية، هل يمكن الحصول على النظيم المعرف على X بالمساواة:

$$x = (\xi_1, \xi_2) \; ; \; \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$$

انطلاقا من جداء داخلي:

• لا، النظيم غير مشتق من جداء داخلي لأنه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع. لنأخذ مثلا:

$$x = (1,1) \;,\; y = (1,-1)$$

$$\|x\| = |1| + |1| = 2 \;,\; \|y\| = |1| + |-1| = 2$$

$$\|x+y\| = |2| + |0| = 2 \;,\; \|x-y\| = |0| + |2| = 2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \stackrel{?}{=} 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$4 + 4 \stackrel{?}{=} 2(4+4)$$

$$8 \neq 16$$

---

11 / 194 ليكن H فضاء هلبرت و M جزئية محدبة في H، (x_n) متتالية في M بحيث أن $\|x_n\| \to d$ حيث $d = \inf_{x \in M} \|x\|$

بين بأن (x_n) متقاربة في H وأورد مثالا يوضح هذا في R^2 أو R^3:

$8 \neq 10$

$\boxed{194/1}$ ليكن H فضاء هلبرت و M جزئية محدبة في H، (x_n) متتالية في M بحيث أن $\|x_n\| \to d$ حيث $d = \inf_{x\in M} \|x\|$

بين بأن (x_n) متقاربة في H وأورد مثالا يوضح هذا في R^2 أو R^3 :

~~38~~

$\boxed{38}$

لنثبت أن (x_n) كوشية :

- لدينا حسب متساواة متوازي الأضلاع :

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 = -\|x_n - x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

وبما أن المجموعة M محدبة و $x_n, x_m \in M$ فإن: $\frac{x_n + x_m}{2} \in M$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\| \geqslant d \Rightarrow \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant d^2$$

$$\Rightarrow -4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \leqslant -4d^2 \Rightarrow$$

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant -4d^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} -4d^2 + 2d^2 + 2d^2 = 0$$

ومنه المتتالية (x_n) كوشية في فضاء هلبرت وبالتالي (x_n) متقاربة في H.

• مثال على ذلك في R^2 : إن R^2 بالكامل هو فضاء هلبرت تام معرف عليه جداء داخلي نأخذ عليه مجموعة محدبة ، إن القطعة المستقيمة محدبة.

$\inf M = -1$, $M =]-1,+1[$ يعني وجود متتالية من عناصر M تسعى لـ -1 $\Leftrightarrow$

$x_n \in M$: $\lim x_n = -1$

$$\langle f, g\rangle = \int_{a=-1}^{b=1} f(x).g(x)\,dx.$$

39 $\boxed{181/2}$ أورد أمثلة لفضاءات جزئية من ℓ^2:

إن ℓ^2 هو فضاء المتاليات (الحقيقية أو العقدية) لهلبرت

حيث: $\left(x \in \ell^2 \Leftrightarrow x = (\xi_i)_{i \geq 1} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty\right)$

• ومن الأمثلة على الفضاءات الجزئية منه:

$$M = \{x : x \in \ell^2 \wedge \xi_i = 0 \text{ ماعدا عدد منته منها}\} \subseteq \ell^2$$

ولنبين أن M فضاء جزئي من ℓ^2: أياً كان $x = (\xi_i)_{i \geq 1}$ و $y = (\eta_i)_{i \geq 1}$

من M فإن $x + y \in \ell^2$ ولنبين أنه من M

$$x + y = (\xi_i)_{i \geq 1} + (\eta_i)_{i \geq 1} = (\xi_i + \eta_i)_{i \geq 1}$$

ξ_i جميعها أصفار ماعدا عدد منته منها

η_i - - - - - - - -

$\Leftarrow$ $\xi_i + \eta_i$ جميعها أصفار ماعدا عدد منته منها

أي $M \ni x + y$.

أياً كان $x = (\xi_i)_{i \geq 1}$ من ℓ^2 و $K \ni \alpha$ فإن: $\alpha x = (\alpha \xi_i)_{i \geq 1}$

من ℓ^2 ولنبرهن أنه من M: ξ_i جميعها أصفار باستثناء عدد منته منها

ومنه سيكون $\alpha \xi_i$ جميعها أصفار باستثناء عدد منته منها أي

$M \ni \alpha x$ ومما سبق نجد أن M فضاء جزئي من ℓ^2.

$\boxed{182/4}$ بين أن الشرطين يحملها ...

αx و M وهما سيتم نجد أن M فضاء جزئي من

182/4 بين أن الشرطين $x_n \perp y$ و $x_n \to x$ معاً تستلزمان أن $x \perp y$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \perp y \\ x_n \to x \end{array} \right.$$ عندئذٍ $x \perp y$ أي $\langle x, y \rangle = 0$

* $\langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$

$$\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{?} \langle x, y \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \to x \\ y \to y \end{array} \right.$$ هذه التي تحتاجها المتتاليات وحسب مبرهنة استمرار الجداء الداخلي فإن:

$\boxed{40}$

$\langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$ ولما كانت $\langle x_n, y \rangle = 0$

وذلك لأنه $y \perp x_n \Leftarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftarrow x \perp y$

182/5: أثبت أنه إذا كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي فإن الشرطان معاً: $\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle \wedge \|x_n\| \to \|x\|$ يقتضيان التقارب $x_n \to x$:

$$0 \leq \|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle$$

$$= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2$$

لكن $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$

$\|x\| \longrightarrow \|x\|$ و $\langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$

بالتعويض $\Leftarrow$ $\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\| = 0$

$$\Rightarrow \|x_n - x\|^2 \to 0 \Rightarrow x_n \to x$$

182/6: أثبت أنه لو كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي عقدي فإن الشرطين $\|x_n\| \to \|x\|$،

$\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle$ معاً يقتضيان التقارب $x_n \to x$

* لدينا $\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle$ وبالتالي:

$$\langle x, x_n \rangle = \overline{\langle x_n, x \rangle} \longrightarrow \overline{\langle x, x \rangle}$$

و لكن $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}$ حقيقي

$\boxed{41}$ $\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle$

$= \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle + \|x\|^2$

$= \|x_n\|^2 - \overline{\langle x_n, x\rangle} - \langle x_n, x\rangle + \|x\|^2$

$\to 2\|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle = 0$

182/7 برهن أنه في فضاء جداء داخلي فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المساواة:

$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad (\forall\alpha)$

($\Leftarrow$) ليكن $x \perp y \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \overset{??}{=} \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$

$\|x\|^2 + \bar\alpha\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + \alpha\underbrace{\langle y,x\rangle}_{0} + |\alpha|^2\|y\|^2 \overset{??}{=} \|x\|^2$

$- \bar\alpha\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} - \alpha\underbrace{\langle y,x\rangle}_{0} + |\alpha|^2\|y\|^2$

$\Rightarrow \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$

($\Rightarrow$) لنفرض أن:

$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \; ; \forall\alpha$

$\Rightarrow \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 \; ; \forall\alpha$

$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \; ; \forall\alpha$

$\Rightarrow \bar\alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle = -\bar\alpha\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle$

$(\div 2) \Rightarrow \bar\alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle = 0$ صحيحة $\forall\alpha$ وبالتالي صحيحة $\forall\bar\alpha$، بأخذ $\alpha = 1$

$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = 0$

$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 0$

بأخذ $\alpha = i$ $\Leftarrow$

$-i\langle x,y\rangle + i\langle x,y\rangle = 0$

$(\times i) \Rightarrow \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} = 0$

$\Rightarrow 2\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 0$

وبالتالي $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$

$\boxed{42}$ 183/8 أثبت أنه في فضاء جداء داخلي يكون

... فضاء جداء داخلي يكون

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المتباينة

$\boxed{42}$

$$\|x+\alpha y\| \geq \|\alpha\| \quad (\forall \alpha)$$

$\Leftarrow$) بفرض $x \perp y$ ، لنفرض جدلاً أنه:

$$\exists \alpha ; \|x+\alpha y\| < \|x\| \Rightarrow \|x+\alpha y\|^2 < \|x\|^2$$

$$\langle x+\alpha y , x+\alpha y\rangle < \|x\|^2$$

$$\|x\|^2 + \alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 < \|x\|^2$$

$$\underbrace{\alpha\langle y,x\rangle}_{=0} + \underbrace{\bar{\alpha}\langle x,y\rangle}_{=0} + |\alpha|^2\|y\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2\|y\|^2 < 0$$

وهذا مرفوض

وبالتالي الفرضية صحيحة أي $\|x+\alpha y\| \geq 0 \quad (\forall \alpha)$

$\Rightarrow$) لنفرض أنه $\|x+\alpha y\| \geq \|x\| \quad \forall \alpha$

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle +$$

$$+ |\alpha|^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 \geq 0 \quad (\forall \alpha)$$

نختار α بالشكل:

$$\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$

$\Leftarrow$

$\boxed{43}$ $$-\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}-\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}+\left|-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\right|^2\|y\|^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$-\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle+|\langle x,y\rangle|^2\geq 0$$

$$-2|\langle x,y\rangle|^2+|\langle x,y\rangle|^2\geq 0$$

$$0\geq -|\langle x,y\rangle|\geq 0 \Rightarrow |\langle x,y\rangle|=0$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle=0 \Rightarrow x\perp y$$

183/9 ليكن V الفضاء المتجهي لجميع الدوال العقدية المستمرة على $J=[a,b]$ ، لنفترض أن $X_1=(V,\|\cdot\|_\infty)$
$X_2=(V,\|\cdot\|_2)$
حيث $\|x\|_\infty=\max_{t\in J}|x(t)|$ وأنه: $\|x\|_2=\langle x,x\rangle^{1/2}$
حيث: $\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$ و
أثبت أن التطبيق المطابق $X\to X$ لـ X_1 على X_2 مستمر:

* : نعلم أن: الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X\to Y$ من فضاء متري (X,d) في فضاء متري (Y,d) مستمر في نقطة x_0 من X هو أن يقتضي الشرط $x_n\to x$ الشرط $Tx_n\to Tx$

$$\|x\|_2^2=\int_a^b|x(t)|^2dt\leq\max_{t\in J}|x(t)|^2\int_a^b dt=(b-a)\|x\|_\infty^2$$

- لدينا $T: X_1\to X_2$ المطابق ولنأخذ (x_n) في X_1 بحيث $x_n\to x$ وعندئذ: $\|x_n-x\|_\infty\to 0$

$$\|Tx_n-Tx\|_2^2\underset{\text{مطابق}}{=}\|x_n-x\|_2^2\leq(b-a)\|x_n-x\|_\infty^2\to 0$$
عندئذ

أي أن $Tx_n\to Tx$ ومنه نجد أن T مستمر.

---

(44) 194/1 ليكن H فضاء هلبرت و M جزئية محدبة
حيث: $\|x_n\|\to d$ بحيث
M في H:

الشرط اللازم والكافي في ...

* نعلم أن: الشرط اللازم والكافي لكي يكون $T: X \to Y$ من فضاء متري (X,d) في فضاء متري (Y,d) مستمر في نقطة x_0 من X هو أن يحقق الشرط: $x_n \to x$ الشرط $Tx_n \to Tx$

$$\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \leqslant \max_{t\in J} |x(t)|^2 \int_a^b dt$$

$$= (b-a)\|x\|_\infty^2$$

- لدينا $T: X_1 \to X_2$ المطابق ولنأخذ (x_n) في X_1 بحيث $x_n \to x$ وعندئذ $\|x_n - x\|_\infty \to 0$ عندئذ

$$\|Tx_n - Tx\|_2^2 \underset{\text{مطابق } T}{=} \|x_n - x\|_2^2 \leqslant (b-a)\|x_n - x\|_\infty^2 \to 0$$

ومنه نجد $Tx_n \to Tx$ أي أن T مستمر

---

(44) **(194/1)** ليكن H فضاء هلبرت و M جزئية محدبة في H و (x_n) متتالية في M بحيث أن $\|x_n\| \to d$ حيث:

$d = \inf_{x\in M} \|x\|$ نبين أن (x_n) متقاربة في H:

- لنثبت أن (x_n) كوشية: لدينا حسب مساواة متوازي الأضلاع

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 = -\|x_n + x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

بما أن المجموعة M محدبة و $x_n, x_m \in M$ فإن:

$$\frac{x_n + x_m}{2} \in M \Rightarrow \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\| \geqslant d \Rightarrow$$

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant d^2 \Rightarrow -4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \leqslant -4d^2$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \leqslant -4d^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} -4d^2 + 2d^2 + 2d^2 = 0$$

ومنه المتتالية (x_n) كوشية في فضاء هلبرت وبالتالي (x_n) متقاربة في H

آخر المحاضرة (2)

تمرينية النظم (ب)

4- متراجحة المثلث: لنأخذ T_1 ، T_2 مؤثرين خطيين من مجموعة المؤثرات التي منطلقها $D(T)$ عندئذ:

$$\|T_1 + T_2\| \overset{??}{\leq} \|T_1\| + \|T_2\|$$

$$* \ \|T_1 + T_2\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \|(T_1 + T_2)(x)\|$$

$$= \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \|T_1(x) + T_2(x)\| \overset{?}{\leq} \sup \|T_1(x)\| + \sup \|T_2(x)\|$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|$$

- لدينا العلاقة الصحيحة التالية:

$$\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|$$

((وذلك لأن المستقر فضاء منظم)) $\leq \sup\|T_1(x)\| + \sup\|T_2(x)\|$

وبالتالي أصبح $\sup\|T_1(x)\| + \sup\|T_2(x)\|$ يمثل حد أعلى لـ $\|T_1(x) + T_2(x)\|$

ولما كان $\sup$ هو أصغر الحدود العليا فيكون:

$$\sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2(x)\|$$

حيث x من $D(T)$