Subject : 2017/10/10

البنى الجبرية - الحدود والمصفوفات - الفضاءات الشعاعية (المتجهية)
التطبيقات الخطية.

مقدمة في البنى الجبرية :

سنتعرف في هذا الفصل على مفاهيم أساسية ستتطلبها دراسة الجبر الخطي.

تعريف : الجداء الديكارتي : لتكن A، B مجموعتين غير خاليتين نعرف الجداء الديكارتي ونرمز له : $A \times B$ بأنه المجموعة :

المحاضرة الأولى

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

ويمكن تعميم الجداء الديكارتي لعدد منته من المجموعات.
فإذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات غير خالية عددها n فإننا نرمز للجداء الديكارتي لهذه المجموعات $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ بالرمز $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ونعرفه كما يلي :

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in A_i \ , i = 1, 2, \dots\}$$

ملاحظة :

نقول عن العنصرين : $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ حيث : $a_i = b_i$ إذا كان $a_i = b_i$ أي :

$$a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_i = b_i \\ \text{من أجل كل} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يعني a, b متساويان

من الجداء الديكارتي $\prod_{i=1}^{n} A_i$ إذا وفقط

Scanned by CamScanner

Subject : / /

تعريف : لتكن A ، B مجموعتين غير خاليتين ولتكن G مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ عندئذ :

1- نقول عن المجموعة G أنها بيان في المجموعة $A \times B$ .

2- اذا كان $G \subseteq A \times B$ بياناً وكان $(a,b) \in G$ فاننا نقول أن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق البيان G .

3- اذا كان G بياناً في $A \times B$ فاننا نقول عن الثلاثية $(A, B, G)$ انها علاقة ثنائية بين عناصر من المجموعة A و عناصر من المجموعة B ونرمز لها بالرمز $f(A, B, G)$ .

أي :

اذا كان $a \in A$ و $b \in B$ فاننا نقول أن العنصر b ارتبط بالعنصر a وفق العلاقة f .

ونرمز لذلك بالرمز $a f b$ عندما وفقط عندما $(a,b) \in G$ .

أي :

$$a f b \Leftrightarrow (a,b) \in G$$

اذن : العلاقة الثنائية $f(A, B, G)$ لها ثلاثة مكونات :

1. المجموعة A : هي منطلق العلاقة f .
2. المجموعة B : هي مستقر العلاقة f .
3. المجموعة G : هي بيان العلاقة f .

ملاحظة :

نقول عن العلاقتين الثنائيتين $f_1(A_1, B_1, G_1)$ و $f_2(A_2, B_2, G_2)$ انهما متساويتان اذا كان لهما المنطلق نفسه والمستقر نفسه والبيان نفسه .

الرمز $\subseteq$ يعني المجموعة الجزئية

Scanned by CamScanner

Subject : / /

$$f_1 = f_2 \iff \begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 = B_2 \\ G_1 = G_2 \end{cases}$$

**مثال 1:**

لتكن $A = \{2, 5, 9\}$ و $B = \{a, b\}$ عندئذٍ:

1- الجداء الديكارتي للمجموعتين $A$ و $B$ هو المجموعة:

$$A \times B = \{(2,a), (2,b), (5,a), (5,b), (9,a), (9,b)\}$$

ملاحظة:

يمكن أيضاً تشكيل الجداء الديكارتي $B \times A$ (أوجد ذلك).

2- إذا كانت المجموعة $G$ هي: $G = \{(2,b), (5,b), (9,a)\}$

فإن $G$ تشكل بياناً في $A \times B$ لأن $G \subseteq A \times B$.

3- الثنائية $(2,b)$ تعني أن العنصر $2 \in A$ يرتبط بالعنصر $b \in B$ بالعلاقة الثنائية $(A, B, G)$.

4- هل تشكل $G_1 = \{(2,a), (2,b), (a,5)\}$ بياناً في $A \times B$؟

الجواب: لا لأن $(a,5) \notin A \times B$ وبالتالي $G_1$ ليست مجموعة جزئية من $A \times B$.

**التطبيقات:** سنتطرق لتعريف التطبيقات وبعض التطبيقات الخاصة التي تهمنا في دراسة الجبر الخطي.

تعريف: (التطبيق):

إذا كانت $f(A, B, G)$ علاقة ثنائية عندئذٍ نقول أن العلاقة $f$ تطبيق إذا وفقط كان لكل عنصر من $A$ مقابل وحيد في $B$.

نرمز للتطبيق بالكتابة:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

كل عنصر $x$ من $A$ يقترن بـ $y$ من $B$ ($y$ صورة $x$ بـ $f$).



Scanned by CamScanner

Subject : / /

★ نرمز العلاقة: $y = f(x)$ من أجل كل $x \in A$ بقاعدة الربط التطبيق $f$.

★ لكل تطبيق منطلق ومستقر وقاعدة ربط.

★ نعرف بيان التطبيق $f$ على أنه المجموعة:

$$G: \{(x,y) : (x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

★ الشرط الذي يجب أن تحققه العلاقة $f(A,B,G)$ لتكون تطبيقاً هو:

$$\forall x_1, x_2 \in A : [x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)]$$

**مثال:**

لتكن العلاقات التالية ممثلة بيانياً على شكل المخطط، استنتج أي من هذه العلاقات تشكل تطبيقاً.

أولاً:

ان $f$ ليست تطبيقاً لأن في $A$ عنصراً لم يرتبط بأي من عناصر $B$

ثانياً:

ان العلاقة $f$ تشكل تطبيقاً لأن كل عنصر من $A$ ارتبط بعنصر وحيد من $B$

ثالثاً:

ان العلاقة $f$ لا تشكل تطبيقاً لأنه يوجد عنصر من $A$ ارتبط بعنصرين من $B$

يوجد عنصر من A ارتبط بعنصرين من B

يمكن أن يرتبط عنصران من A بعنصر من B والعكس غير صحيح

انتهت المحاضرة

إعداد الطالبة: رجاء + بيان + لؤي

Scanned by CamScanner