◄ الدكتورة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: الأولى   عنوان المحاضرة: مفاهيم أساسية في التحليل العددي

- لقد نوهت الدكتورة في بداية المحاضرة إلى أهمية الالتزام بالحضور في نفس الزمرة.
- بالإضافة إلى ضرورة وجود الكتاب للدكتورة رشا بعاج و برلنت مطاط.
- وكذلك ضرورة وجود آلة حاسبة علمية كونها أساس دراسة مقرر التحليل العددي (١) و (٢).
- يجب على الطالب تعلم كيفية استخدام الآلة الحاسبة.

ملاحظة : في الامتحان عند تقريب الأعداد (لا يسمح بتدوير الأعداد ذات المنازل العشرية إلى أقل من خمسة منازل عشرية).

مثال: (0.943 - مرفوض) بينما (0.94352 - مقبولة)

محتوى المقرر:

- مفاهيم أساسية في التحليل العددي.
- حل المعادلات غير الخطية.
- الاستيفاء بكثيرات الحدود.
- التفاضل والتكامل العددي. (تفاضل – تكامل)

- كل بحث من البحوث السابقة له عدة طرائق للحل لذلك يجب دراسة الطرق كاملة حيث تحدد طريقة حل السؤال في ورقة الامتحان ويجب الالتزام بها...

⬍ لنبدأ الآن محاضرتنا.........

تعريف التحليل العددي: هو بناء خوارزمية عددية لحل مسألة رياضية معرفة ومستمرة .

ملاحظة: يجب وضع الآلة الحاسبة على التقدير الستيني راديان (Rad)

- في الآلة الحاسبة (CASIO fx – 99 IES PLUS) يكون ذلك بالضغط على الزر shift وبعده Mode واختيار الخيار الرابع Rad بالضغط على 4 فيحسب العدد بالراديان ....

- لحل مسألة ما نتساءل أولا فيما إذا كان بإمكاني استخدام التحليل العددي لحل هذه المسألة ام لا ؟

مسألة

لنسأل هل إمكانية الحل موجودة؟

نعم

(وذلك إذا تم الإثبات عن طريق مبرهنة أن هناك حل)

لا

(وذلك إذا تم إثبات أنه لا يوجد إمكانية لإيجاد الحل).

مثال: $\int_{2}^{-3} e^x \, dx$

التمرين قابل للحل ومنه يمكن للتحليل العددي إيجاد الحل

مثال: $\int_{-3}^{3} \ln x \, dx$

التمرين غير قابل للحل ومنه لا يمكن للتحليل العددي إيجاد الحل

- ومنه إذا كان الجواب نعم وكان يوجد إمكانية للحل نطرح سؤال جديد:

هل الطرائق التحليلية موجودة؟؟

نعم

وذلك إذا أعطاني الحل بالطريقة التحليلية ونسميه الحل الصحيح أو الحل الفعلي رمزه T

لا

وذلك إذا أعطاني الحل بالطريقة العددية ونسميه الحل التقريبي ونرمز له ب Q

ملاحظة: - التحليل العددي يختلف عن الحل التحليلي.

- التحليل العددي يعني بناء خوارزمية

- ما هو معيار نجاح الخوارزمية العددية :

a) إذا كان الحل الفعلي موجود يكون : $E_{exact} = |T - Q|$ الخطأ الفعلي

- الخطأ الفعلي دائما موجب لوجود القيمة المطلقة ويمنع حسابه كقيمة سالبة .

ماذا سنفعل بالمقدار السابق أي بالخطأ الفعلي ؟

سنرى إذا كان الخطأ الفعلي :

صغير

فالخوارزمية مقبولة (نقول عنها ناجحة)

كبير

سنحسب المقدار $R_{exact} = \left|\frac{E_{exact}}{T}\right|$

يدعى(الخطأ النسبي)

بعدها سنرى إذا كان الخطأ النسبي :

صغير

مقبول (المتراجحة ناجحة)

كبير

غير مقبول (المتراجحة غير ناجحة)

- إذا لم يكن للمسألة حل تحليلي بالتالي لا يمكن حساب الخطأ الفعلي ويوجد بديل .

b) إذا كان الحل التحليلي غير موجود : فإننا نقوم بحساب الخطأ الأعظمي E_{max}

ملاحظة: كل طريقة عددية لها قانون لحساب الخطأ الأعظمي ......

- الخطأ الأعظمي :

١. لا يتعلق بالحل التحليلي T (بعض المسائل يكون الحل التحليلي فيها موجود ولكن نحن نريد الحل العددي فوجود T وعدمه واحد)

٢. $E_{max} \geq E_{exact}$ (وذلك إذا كان الخطأ الفعلي محسوب وموجود فالمتراجحة محققة)

٣. يحسب الخطأ الأعظمي من المبرهنات والنظريات

٤. يوصف بأنه بخيل (يقصد بذلك أنه علينا تضييق الخطأ الأعظمي قدر الإمكان)

ملاحظة: كل طريقة عددية (خوارزمية عددية) لا تقبل دون تحديد مقدار خطأها الأعظمي

اتفق العلماء على أنه قد لا تتساوى المقادير لكن مقاليبها تكون متقاربة .

أي : Q ≠ T لكن $\frac{1}{Q} \cong \frac{1}{T}$

مثال: $\frac{1}{19} \cong \frac{1}{20}$ ولكن $20 \neq 19$ وبذلك $T = 19 \quad Q = 20$

لو حسبنا الخطأ الأعظمي E_{max} نرى إذا كان :

صغير كبير

مقبول (الخوارزمية ناجحة) عندها نحسب المقدار $R_{max} = \left|\frac{E_{max}}{Q}\right|$

(يدعى خطأ نسبي أعظمي)

إذا كان R_{max}

صغير كبير

مقبول (الخوارزمية ناجحة) غير مقبول (الخوارزمية غير ناجحة)

❖ بعض أنواع الأخطاء المرتكبة: سندرس ثلاثة أنواع:

١. الأخطاء الناتجة عن تدوير الأرقام.

٢. الأخطار الناتجة عن اقتطاع السلاسل غير المنتهية.

٣. الأخطار الناتجة عن التوابع (الدوال) و استقراريتها.

النوع الأول: ما هي أخطاء التدوير (تدوير الأرقام):

أولاً: لنميز بين العدد number والرقم digit

(35172 عدد) بينما (من 1 حتى 9 هي أرقام)

مثال: العدد $T = \pi = 3.1415926$

- لا يمكن استخدام هذا العدد دون أن نجري عليه التدوير (ال يمكن الاقتطاع دون التدوير)
- التدوير: هو عملية اقتطاع لجزء من العدد مع تقدير هل سيتم زيادة هذا العدد أم لا؟؟

(كيفية التدوير : نأخذ رقم المنزلة المطلوب الاقتطاع بالنسبة لها وننظر للرقم الذي يليها إذا كان (الرقم ≥ 5) نضيف واحد أما إذا كان(الرقم < 4) لا نضيف شيئاً بينما إذا كان (الرقم =4) ننظر إلى الرقم الذي يلي الرقم 4 ونكمل على نفس الترتيب.....)

إذا نرمز للقيمة التي تظهر بعد التدوير ب $Q = 3.14159$

- سنأخذ مثال حيث أن هذا المثال ليس له طلبات و إنما هو تدريب لإخراج:
- $Rmax \quad Emax \quad Eexact$

السؤال: اقتطع العدد $T = 2{,}34611$ بالنسبة لمنزلتين عشريتين ثم احسب الخطأ المرتكب نتيجة هذا التدوير

الحل: عندما نقتطع نحصل على Q

طريقة الاقتطاع: نأخذ ثلاث منازل بعد الفاصلة وننظر إلى الرقم الثالث ≥ 5 نضيف 1:

$$Q = 2{,}35 \Leftarrow T = 2{,}34611$$

عندما نقتطع سينتج خطأ لذلك سوف نحسب الخطأ المطلق $Eexact$

$$Eexact = |T - Q| = |2.34611 - 2{,}35| = 0{,}00389$$

$Eexact$ كبير $\Leftarrow$ نحسب الخطأ النسبي

$$Rexact = \left|\frac{Eexact}{T}\right| = \left|\frac{0{,}00389}{2{,}34611}\right|$$

$$Rexact = 0.0016165806$$

أصبح الرقم $Q = 2{,}35$ المدور حيث أخذناه ووضعناه في سؤال الآتي:

تمرين: لدينا المعادلة التفاضلية التالية علماً أن الأرقام مدورة

$$2{,}35y'' + 6y + 11 = 0$$

نظرية : الخطأ الأعظمي المرتكب في التدوير الأرقام العشرية هو

$$Emax = 0{,}5 \times 10^{-n}$$

حيث n هي عدد المنازل العشرية التي تم تدوير الأرقام لها

$$Emax = 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}005$$

$$Rmax = \left|\frac{Emax}{Q}\right| \qquad\qquad Rmax = \left|\frac{0{,}005}{2{,}35}\right|$$

$$Rmax = 0.002127$$

لو فرضنا من المثال السابق أن $T = 2{,}34611$

نلاحظ ان $\quad Eexact < Emax$

$$0{,}00389 < 0{,}005$$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي