نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : الرابعة   عنوان المحاضرة: الشكل القطبي للعدد العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-طويلة عدد عقدي و خواصها

2-الشكل القطبي للعدد العقدي

3-مجموعة من الأمثلة

طويلة عدد عقدي

ليكن لدينا العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ نعرف طويلة هذا العدد العقدي بأنها العدد الحقيقي غير السالب المعطى بالشكل :

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

لاحظ: لو كان العدد العقدي هو عدد حقيقي (قسمه التخيلي معدوم $\beta = 0$) فإن طويلة هذا العدد تطابق القيمة المطلقة لقسمه الحقيقي:

$$z = \alpha + 0.i \Longrightarrow |z| = \sqrt{\alpha^2 + 0^2} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

انتبه : في كتابتنا $|z|$ فهنا نعني طويلة (لأن المضمون عدد عقدي)
أما في نهاية السطر الذي وصلنا إلى $|\alpha|$ و هي قيمة مطلقة ناتجة عن جذر مربع عدد حقيقي

انتبه لو ربعنا طرفي العلاقة الأخيرة التي وصلنا لها لوجدنا أنه:

$$\alpha^2 = |\alpha|^2 \quad , \forall \alpha \in R$$

و لكن بالحالة العامة لا يمكن القول أن :

$$|z|^2 = z^2$$

إلا إذا كان z حقيقي بحت

لأنه بالحالة العامة

$$z^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$$

فهو ليس حقيقي و بالتالي لن يكون مساوياً للعدد الحقيقي $|z|^2$

خواص الطويلة :

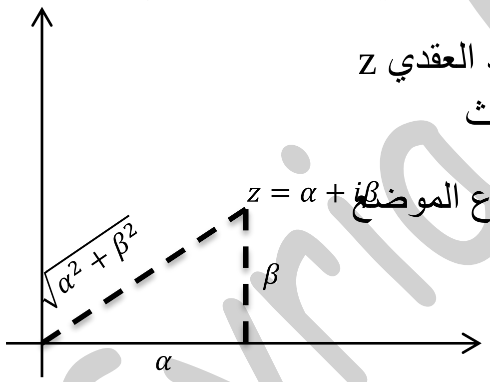
1) $|z| \geq 0 , \forall z \in \mathbb{C}$
2) $|-z| = |z| = |\bar{z}|$
3) $|z^n| = |z|^n$
4) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
6) $z . \bar{z} = |z|^2$
7) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (سنبرهنها هندسياً)
& $|z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$
8) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

في الخاصة 7 لا يهم شكل المتراجحة و لكن المهم الانتباه إلى الحد الأكبر و الحد الأصغر

سؤال : ماذا تعني طويلة عدد عقدي هندسيا؟!

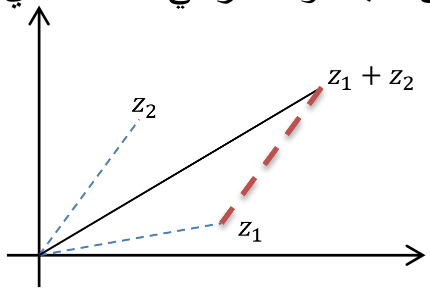
إن طويلة العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ تعبر هندسياً عن بعد النقطة z عن مبدأ المستوي العقدي أو بمعنى آخر هي طويلة شعاع الموضع oM (حيث M النقطة الممثلة للعدد العقدي z في المستوي العقدي)

و يبدو ذلك جلياً من خلال التمثيل الهندسي المجاور إذ نجد أن بعد العدد العقدي z عن المبدأ ما هو الوتر في المثلث القائم فبالاستفادة من مبرهنة فيثاغورث نجد فعلاً أن طويلة عدد عقدي تطابق البعد بين هذا العدد العقدي و شعاع الموضع



سؤال: أثبت صحة المتباينة $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

في الحقيقة إن $z_1 + z_2$ هو شعاع في المستوي العقدي , كما أن طويلة z_1 هي بعد z_1 عن المبدأ و طويلة z_2 هي بعد z_2 عن المبدأ و طويلة $z_1 + z_2$ هي بعد $z_1 + z_2$ عن المبدأ و للنظر في المثلث الذي رؤوسه $o, z_2, z_1 + z_2$

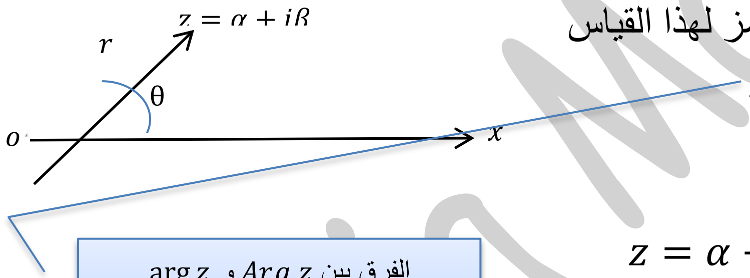


و نعلم حسب خواص أي مثلث أن مجموع طولي أي ضلعين هو أصغر من طول الضلع الثالثة (و تتحقق المساواة إذا وقعت الرؤوس على استقامة واحد)

بهذا نكون قد شملنا أهم الأفكار المتعلقة بطويلة عدد عقدي ..و لنتعرف الآن على شكل آخر للعدد العقدي :

الشكل القطبي للعدد العقدي

ليكن $z = \alpha + i\beta$ عدداً عقدياً و $\overrightarrow{oM}$ الشعاع الممثل لـ z في المستوي العقدي و لنرمز بـ r لطويلة العدد العقدي z أي $(|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = r)$ و لنرمز أيضاً بـ θ للزاوية المباشرة التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{oM}$ مع المحور الحقيقي (ox) (فإذا كان قياس الزاوية المحصورة بين ox و $\overrightarrow{oM}$ هي θ_0 عندئذٍ يكون $\theta_0 + 2\pi k$ قياساً لهذه الزاوية و ذلك أياً كان $(k \in \mathbb{Z}$



◀نرمز لأي قياس من هذه القياسات بـ arg z كما نرمز لهذا القياس إذا انتمى للمجال نصف المفتوح $]-\pi, \pi]$ بـ Arg z

و من الواضح أن $\alpha = r\,cos\theta \;\;\&\;\; \beta = r\,sin\theta$

و بالتالي أصبح يمكننا أن نعبر عن العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$

بدلالة الإحداثيات القطبية r, θ كما يلي :

$$\underbrace{\boxed{\begin{aligned} z &= rcos\theta + i\,rsin\theta \\ &= r(cos\theta + isin\theta) \end{aligned}}}_{\text{الشكل القطبي}}$$

الفرق بين $Arg\ z$ و $\arg z$

هو أن $Arg\ z$ نستخدمها فقط إذا كانت $\theta \in]-\pi, \pi]$

انتبه: إن الزاويتين $\frac{\pi}{4}\ \&\ \frac{\pi}{4} + 2\pi$

لهما نفس القياس لكنهما عددين مختلفين تماماً

مثال:

اكتب العدد العقدي $z = 1 + i\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي

لدينا: $r = |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

$$cos\theta = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2} \quad , sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow Argz = \frac{\pi}{3}$$

و بالتالي الشكل المثلثي هو : $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

تنويه1: سنعتمد اختصاراً الرمز $[r,\theta]$ للشكل المثلثي للعدد العقدي ففي مثالنا هذا .. الشكل المثلثي هو $[2,\frac{\pi}{3}]$

تنويه2: من الممكن تعيين الزاوية θ باستخدام العلاقة $tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ مع الأخذ بعين الاعتبار الربع الذي تنتمي له .

مثال 2 :

اكتب بالشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3} \ , z_2 = 3 \ , \ z_3 = -3 \ , z_4 = 5i \ , z_5 = -2i$$

الحل :

♥من أجل z_1 :

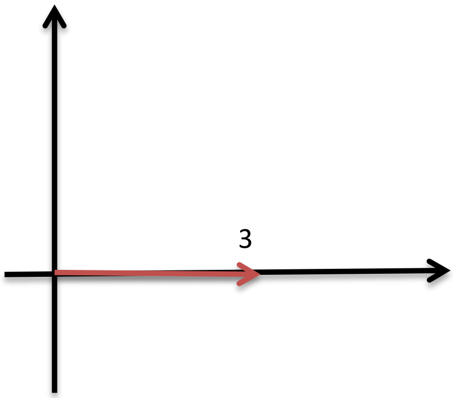
$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$tan\theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

لما كان $z = -1 - i\sqrt{3}$ في الربع الثالث و الـ $\frac{\pi}{3}$ في الربع الأول كان لابد من أن نطرح منها π لنحصل على قياس الزاوية المطلوب في الربع الثالث و بالتالي نخلص إلى أن $z_1 = \left[2, -\frac{2\pi}{3}\right]$

♥من أجل z_2 :

$$r = |z_2| = |3| = 3$$
$$\Rightarrow Argz = 0 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow z = [3,0]$$

ذلك لأن العدد العقدي هنا قسمه التخيلي معدوم و بالتالي هو يقع على المحور الحقيقي (الزاوية بين شعاعه و المحور الحقيقي معدومة)

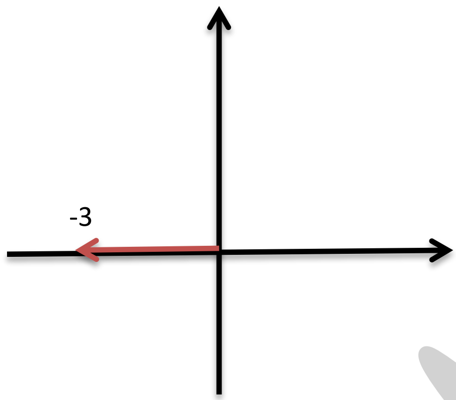


♥من أجل z_3 :

$$r = |z_3| = |-3| = 3 \ \& \ Argz = \pi \Rightarrow z_3 = [-3, \pi]$$

((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد حقيقي سالب هي π –))

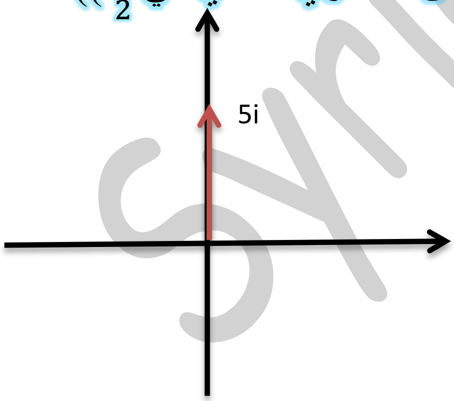
ملاحظة: لم نختر $-\pi$ لأن مجال القيم الرئيسية كان $]-\pi, \pi]$



♥من أجل z_4 :

$$r = |z_4| = 5 \Longrightarrow Argz_4 = \frac{\pi}{2} \ \Longrightarrow z_4 = \left[5, \frac{\pi}{2}\right]$$

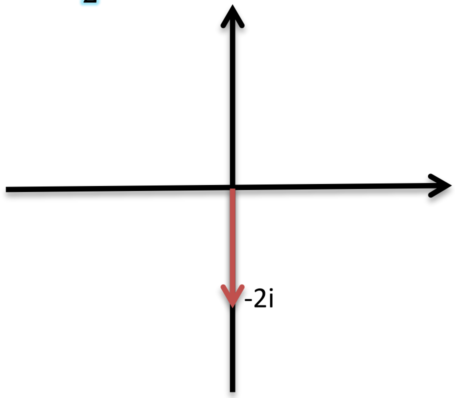
((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد عقدي بحت واقع في النصف العلوي من المستوي العقدي هي $\frac{\pi}{2}$))



♥من أجل z_5 :

$$r = |z_5| = 2$$
$$Argz_5 = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow z_5 = \left[-2, -\frac{\pi}{2}\right]$$

((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد عقدي بحت واقع في النصف السفلي من المستوي العقدي هي $-\frac{\pi}{2}$))



انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما