نظري

◄ دكتور المادة : حزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السادسة ◄ عنوان المحاضرة: نظرية الزمر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- بدأنا بفصل جديد وهو نظرية الزمر.

٢- تعريف الزمرة ومبرهنات عنها.

تعريف الزمرة: لتكن G مجموعة غير خالية نسمي كل تطبيق من الشكل G :

ملاحظة : (* سنعبر عنها بدل من اشارة الضرب × كما يلي)

$$* : \quad G \times G \to G$$
$$(a,b) \longmapsto a * b$$

عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي) (عملية داخلية) على المجموعة G

تعريف: لتكن E, G مجموعتان غير خاليتان نسمي كل تطبيق :

$$*: E \times G \to G$$

قانون تشكيل خارجي على G من اليسار.

ملاحظة: دائماً نميز إن كان هذا القانون من اليسار او من اليمين عندما تكون E على اليمين يكون قانون تشكيل خارجي من اليمين.

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية وليكن التطبيق :

$.: G \times G \to G$ (.) عبارة عن إشارة ضرب

عملية ثنائية على G نقول ان الثنائية $(G,.)$ تشكل زمرة اذا حققت الشروط التالية:

١) $\forall\, a,b \in G\,;\ \ a.b \in G$

٢) العملية (.) تجميعية $\forall\, a,b,c \in G\,;\ \ (a.b).c = a.(b.c)$

٣) يوجد في G عنصر بحيث $e \epsilon G$ بحيث :

نسمي e عنصر محايد $\forall\, a \epsilon G\,; a.e = e.a = a$

٤) $\forall\, a \epsilon G\,; \exists\, a^{-1} \epsilon G : a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

نسمي العنصر a^{-1} مقلوب العنصر a

تعريف : نقول عن الزمرة $(G,.)$ إنها تبديلية إذا حققت الشرط :

$$\forall\, a,b \epsilon G\,;\;\; a.b = b.a$$

ملاحظة: اذا كانت العملية معرفة على زمرة ضرب $(.)$ نسميها زمرة ضربية.

واذا كانت العملية معرفة على زمرة جمع$(+)$ نسميها زمرة جمعية.

	الزمرة الجمعية $+$	الزمرة الضربية $.$
شكل العناصر	$a + b$	$a.b$
العنصر المحايد	0	$1, e$
المقلوب أو النظير	نظير a هو $-a$	مقلوب a هو a^{-1}
التشكيل	$a + (-b)$	$a.b^{-1}$
المضاعف أو القوة	مضاعف a هو : $n.a$ $n \epsilon Z$	قوة a هي $a^n : n \epsilon z$

ملاحظة : لتكن G زمرة و $a \epsilon G$ و $n \epsilon Z$

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a.a.a.a.\ldots.a}^{n\ \text{مرة}} & n > 0 \\ e = 1 & n = 0 \\ \underbrace{a^{-1}.a^{-1}\ldots\ldots a^{-1}}_{-n\ \text{مرة}} & n < 0 \end{cases}$$

مثال(١): مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالنسبة لعملية الجمع هي الأعداد $(\mathbb{Z},+)$ تشكل زمرة جمعية تبديلية

والعنصر المحايد فيها الصفر. **(تحقق من الشروط الأربعة الواردة بالتعريف).**

ولكن $(\mathbb{Z},.)$ ليست زمرة بالنسبة لعملية ضرب الاعداد لأنها لا تحقق هذا الشرط :

$\exists\, 2 \epsilon \mathbb{Z} : \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ لا يوجد مقلوب للعدد 2 وبذلك لا تحقق الشرط الأخير فهي ليست زمرة بالنسبة للضرب

مثال(٢): لنفرض ان $M_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} : a,b,c,d \in Z$

مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية .

ان $M_2(\mathbb{Z})$ تشكل زمرة جمعية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، والعنصر المحايد فيها هو المصفوفة الصفرية وهي ايضاً تبديلية (جمع المصفوفات تبديلي)

ونظير العنصر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ هو $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \subseteq -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

مثال(٣): لتكن : $M_2(R)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} a,b,c,d \in R \\ a.d-c.b \neq 0 \end{matrix}\right\}$

مجموعة المصفوفات المربعة والحقيقية من المرتبة الثانية تشكل زمرة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات والعنصر المحايد لها هو المصفوفة الواحدية.(ملاحظة ليست تبديلية لان ضرب المصفوفات ليس تبديلي).

تمهيدية : لتكن $(G,.)$ زمرة عندئذ :

١) العنصر المحايد في G وحيد .
٢) مقلوب أي عنصر في G وحيد .
٣) قانون الاختصار محقق أي إذا كان $a.b=c.b \quad : \quad \forall a,b,c \in G$
فإن $a=c$
٤) $\forall a,b \in G\,;\,(a^{-1})^{-1}=a$
٥) $\forall\, a_1,a_2,a_3,\dots\dots.a_n \in G;$
$$(a_1,a_2,a_3,\dots\dots.a_n)^{-1}={a_n}^{-1},{a_{n-1}}^{-1},{a_{n-2}}^{-1}\dots\dots.{a_1}^{-1}$$

الإثبات :

١) ليكن $e_1,e_2 \in G$ كل منهما عنصر محايد لنأخذ الجداء لهذين العنصريين
$$e_2=e_2.e_1=e_1 \Rightarrow e_1=e_2$$
٢) ليكن $a \in G$ ولنفرض أن $b_1\,,b_2 \in G$ كل منهما مقلوب للعنصر a

طالما b_1 هو المقلوب ل a فإن : $b_1.a=a.b_1=e$

طالما b_2 هو مقلوب العنصر a فإن : $b_2.a=a.b_2=e$

$$\Leftarrow b_1=e.b_1=(b_2.a)b_1=b_2(a.b_1)=b_2.e=b_2$$

٣) لتكن $a,b,c \in G$ بحيث : $a.b=c.b$ فإن:
$$b^{-1}.(a.b)=b^{-1}.(c.b) \Longrightarrow a(b.b^{-1})=c(b.b^{-1}) \Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{c}$$

٤) ليكن $a \in G$ عندئذ: $a^{-1} \in G$ وان $(a^{-1})^{-1} \in G$ ويحقق:

$$\underbrace{a^{-1}}_{\text{عنصر}} . \underbrace{(a^{-1})^{-1}}_{\text{مقلوبه}} = e$$

نضرب الطرفين ب a

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

٥) يتم اثباته من خلال الاستقراء :

نثبته من أجل $n = 2$

ليكن $a, b \epsilon G$ عندئذٍ $a.b \in G$ وإن $(a.b)^{-1} \in G$

ويحقق $(a.b).(a.b)^{-1} = e$

$$\Rightarrow a(b.(a.b)^{-1}) = e$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$b.(a.b)^{-1} = a^{-1}$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

تعريف الزمرة الجزئية : لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية في G نقول ان $(H,.)$ زمرة جزئية في G إذا كانت $(H,.)$ زمرة بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G او بمعنى آخر إن H زمرة بحد ذاتها .

مبرهنة : لتكن (G) زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية في G عندئذٍ الشروط الاتية متكافئة :

١) H زمرة جزئية في G .
٢) H تحقق الشروط الاتية :
- $\forall\, a, b \,\epsilon\, H \,;\, a.b \,\epsilon H$ **(a)**
- $\forall\, c \,\epsilon\, H \,;\; c^{-1} \,\epsilon\, H$ **(b)**

٣) $\forall\, a, b \,\epsilon\, H \,;\, a.b^{-1} \,\epsilon\, H$

الاثبات :

$(1 \leftarrow 2)$ لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ الشروط $\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}$ محققة .

$(2 \leftarrow 3)$ ليكن $a, b \,\epsilon\, H$ عندئذ $b \,\epsilon\, H$ فحسب الفرض لكل عنصر في H هناك مقلوب عندئذٍ $b^{-1} \epsilon\, H$ اصبح لدينا وحسب الفرض $a, b^{-1} \,\epsilon\, H$ وحسب الشرط a نجد: $\forall\, a, b^{-1} \,\epsilon\, H; a.b^{-1} \in H$.

$(3 \leftarrow 1)$ لنبرهن ان H زمرة لدينا فرضاً $H \neq \emptyset$ فهي تحوي عنصر على الأقل:

- ليكن $a \in H$ وحسب الفرض $e = a.a^{-1} \in H$
- ليكن $b \in H$ واصبح لدينا $e, b \in H \Leftarrow b^{-1} = e.b^{-1} \in H$
- التجميعية محققة على عناصر H
- ليكن $a, b \in H$ عندئذٍ $a, b^{-1} \in H$ فأن حسب 3) نأخذ $H \ni a.b = a.(b^{-1})^{-1}$ داخلي على H

ومنه نجد ان $(H,.)$ زمرة وبالتالي هي زمرة جزئية في G.

أمثلة: سنطبق الشرط الثالث في المبرهنة السابقة (لان الشروط متكافئة)

١. في أي زمرة من G إن كلاً من $G, \{e\}$ هي زمرة جزئية في G.
٢. ليكن G زمرة تبديلية فإن المجموعة $\boldsymbol{H = \{x; x \in G, x^2 = e\}}$ تشكل زمرة جزئية في G و أن $\boldsymbol{H \subseteq G}$

الحل:

طالما كل عنصر من H هو من G اذاً: $\emptyset \neq H \subseteq G$

إن $e \in H$ لان $e^2 = e.e = e$

لتكن $x, y \in H$ عندئذٍ : $x^2 = e \quad , \quad y^2 = e$ بضرب الطرفين ب $(y^{-1})^2$ يصبح لدينا $e = (y^{-1})^2$

$$(x.y^{-1})^2 = x.\underbrace{y^{-1}.x}_{\text{لان } G \text{ تبديلية}}.y^{-1} = x.x.y^{-1}.y^{-1}$$

$$\underbrace{x^2}_{=e}.\underbrace{(y^{-1})^2}_{=e} = e \Rightarrow x.y^{-1} \in H$$

ومنه H زمرة جزئية في $\boldsymbol{G}$

٣- لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وليكن $m > 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة

$$m.\mathbb{Z} = \{m.k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

ان المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ لان: $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ وأن $m\mathbb{Z} \neq \emptyset$ لان $\{0\} \subseteq m.\mathbb{Z}$

ليكن $x, y \in m\mathbb{Z}$ ولنبرهن ان $x - y \in m\mathbb{Z}$ (هنا الزمرة جمعية فتصبح طرح $x - y$ بدلاً من قوة $x.y^{-1}$)

بما ان $x, y \in m\mathbb{Z}$ فإن: $x = k_1 m \ , \ \ y = k_2 m$ حيث $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

فإن $x - y = k_1 m - k_2 m = (k_1 - k_2)m \in m.\mathbb{Z}$ ومنه فإن mZ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو - ولاء الأخضر - هلا همج