نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الثالثة

عنوان المحاضرة : تعاريف ونتائج هامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الجبر التام بالإضافة إلى تعاريف ونتائج هامة

2- جبر الأحداث f

3- بعض الأحداث الشهيرة

الجبر التام : نقول عن f أنه جبر تام على Ω أو $(\sigma$ – جبر على Ω) إذا تحقق ما يلي :

$$A_1, A_2, \dots\dots, A_n \in f$$

متتالية معدودة وغير منتهية فإن : $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in f$

نتائج

1) إذا كان f جبر على Ω فإن :

- $\varphi \in f$
- $\forall\, A, B \in f \;\; \Rightarrow \;\; A \cap B \in f$

البرهان :

$$A, B \in f \Rightarrow A', B' \in f \Rightarrow A' \cup B' \in f \Rightarrow (A \cap B)' \in f \Rightarrow (\,(A \cap B)')' \in f$$

$$\Rightarrow A \cap B \in f$$

- $\forall\, A, B \in f \Rightarrow A/B \;= A \cap B' \in f$ ((مغلقة بالنسبة لعملية الفرق))

البرهان :

$$\forall\, A, B \in f \Rightarrow A \vartriangle B \in f$$

بحيث : $A \vartriangle B = (A/B) \cup (B/A)$ حيث الفرق تناظري

- $\forall A, B \in f \Rightarrow A \vartriangle B \in f$
- f مغلق بالنسبة للاتحاد (الاجتماع) المنتهي :

$A_1, A_2, \dots \dots, A_n \in f \Rightarrow \cup_{i=1}^{i=n} A_i \in f$ البرهان بالاستقراء الرياضي

- f مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي :

$A_1, A_2, \dots \dots, A_n \in f \Rightarrow \cap_{i=1}^{i=n} A_i \in f$ البرهان بالاستقراء الرياضي

2) إذا كان f جبراً تاماً على Ω بالإضافة للنتائج السابقة فإنه يتحقق ما يلي :

- f مغلق بالنسبة للتقاطع العدود $A_1, A_2, \dots \dots, A_n \in f \Rightarrow \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in f$
- كل جبر تام هو جبر لكن العكس ليس صحيح بالضرورة
- كل جبر منته هو جبر تام $f_2 = \{\varphi, \Omega, A, A'\}$, $f_1 = \{\varphi, \Omega\}$ هما جبر وجبر تام
- تقاطع الجبور التامة هو جبر تام

تعريف الجبر المولد بـ f

هو عبارة عن تقاطع جميع الجبور (الجبور التامة) التي تحوي f وهو أصغر جبر (جبر تام) يحوي f ونرمز له بالرمز $\sigma(f)$

تعريف : إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحددة على $\mathbb{R}$ يدعى جبر بوريل ونرمز له بالرمز R_1 أو $B(R)$ وكل مجموعة منتمية لـ R_1 تدعى مجموعة بوريلية .

أمثلة :

1) $P(\Omega)$ مجموعة جميع أجزاء Ω هي جبر وجبر تام على Ω .

2) $F = \{\varphi, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω .

3) المجالات المفتوحة من $\mathbb{R}$ ليست جبراً ولا جبراً تاماً على Ω .

4) إذا كانت $\Omega = \{1,2,3,4\}$ وكانت

$$f = \{\varphi, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

فإن f جبر وجبر تام على Ω

تعريف : إذا كانت Ω مجموعة غير خالية و f جبراً تاماً على Ω فإن الثنائية (Ω, f) تدعى فضاء قيوساً وندعو كل عنصر من عناصر f مجموعة قيوسة.

نتيجة : إن Ω , φ مجموعات قيوسة.

تعريف : ليكن (Ω , f) فضاء قيوساً نقول عن الدالة : $\mu : f \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty[$ أنها تمثل قياساً على f إذا حققت الشرطان :

- $\mu(\varphi) = 0$
- $\forall A_1, A_2, \dots \dots A_n \dots . \in f \; ; \; i \neq j \; ; \; A_i \cap A_j = \varphi \Rightarrow \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

تعريف : نسمي الثلاثية (Ω , f, μ) بفضاء القياس μ

حالة خاصة : أذا كان $p(\Omega) = 1$ فإننا ندعو μ قياساً احتمالياً وندعو الثلاثية (Ω , f, p) فضاء القياس الاحتمالي p (واختصاراً الفضاء الاحتمالي)

جبر الاحداث f

تعريف : إذا كانت Ω مجموعة نتائج تجربة مفروضة وكانت Ω منتهية أو معدودة فإن أي مجموعة جزيئة B من Ω تدعى حدثاً متعلقاً بهذه النتيجة.

نتيجة إن لمجموعة الأحداث المتعلقة بالتجربة تكون $P(\Omega)$ (والتي هي جبر تام) مغلقة بالنسبة للعمليات المنطقية المنتهية أو المعدودة .

حالة عامة : إذا كانت Ω (فضاء العينة) غير منته وغير معدود فإننا نقبل بأن الأحداث المتعلقة بالتجربة تشكل جبراً تاماً على Ω ونرمز له بالرمز f ونسميه جبر الأحداث , ليس من الضروري أن يساوي $p(\Omega)$ التي هي مجموعة جميع أجزاء Ω

مسلمات احتمالية

لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية فإن قولنا عن A حدث متعلق بالتجربة يعني أن : $A \in f$ حيث fجبر الأحداث على Ω وكذلك من أجل $A \in f$ فإن الحدث A يقع إذا كانت نتيجة التجربة $\omega \in \Omega$

أي : إذا كانت $A \ni \omega$ نقول أن الحدث A قد وقع وإذا كانت $\omega \notin A$ نقول عن الحدث A لم يقع

الحدث الابتدائي : كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر من Ω تدعى حدثاً ابتدائياً

بعض الأحداث الشهيرة

1) **الحدث الأكيد :** هو Ω ، 2) **الحدث المستحيل :** هو φ

3) **وقوع اجتماع حدثين :** إذا كان $A, B \in f$ حدثين من f فإن $A \cup B \in f$ هو حدث من f ويقع إذا وقع أحد الحدثين أو كلاهما

4) **اجتماع متتالية منتهية** من الأحداث هو حدث

5) **تقاطع حدثين :** هو حدث يقع إذا وقع الحدثين معاً في آن واحد

6) **تقاطع متتالية منتهية** من الأحداث هو حدث

7) **الأحداث المتنافية :** نقول عن A, B من f أنهما متنافيان (منفصلان) إذا كان $A \cap B = \varphi$ أي (لا يمكن وقوعهما معاً)

◄**نتيجة :** من أجل متتالية معدودة متنافية مثنى مثنى

$$A_1, A_2, \dots \dots, A_n \in f \quad ; \quad i \neq j \quad ; \quad A_i \cap A_j = \varphi$$

عندئذ:

$$|\cup_{i \geq 1} A_i| = |A_1| + |A_2| + \dots \dots + |A_n| + \dots \dots$$

8) **فرق حدثين :** إذا كان $A, B \in f$ فإن $A/B \in f$ هو حدث يقع إذا وقع الحدث A ولم يقع الحدث B

9) **الحدث المعاكس (متمم الحدث) :** إذا كان $A \in f$ فإن $A' \in f$ حدثاً من f يدعى الحدث المتمم (المعاكس) ل A بالنسبة ل Ω ويقع A' إذا لم يقع A :

$$A \cup A' = \Omega \quad ; \quad A \cap A' = \varphi$$

$$A = \Omega / A' \quad ; \quad A' = \Omega / A$$

10) **الاحتواء :** إذا كان $A \subseteq B \; ; \; A, B \in f$ عندئذ وقوع الحدث A يقتضي وقوع الحدث B ولكن العكس غير صحيح

نتائج

- الحدث المستحيل φ يتنافى مع أي حدث آخر
- الأحداث الابتدائية في تجربة هي أحداث تتنافى مع بعضها البعض

إنتهت المحاضرة....

قد لا نصل إلى السحب لكننا نستطيع الاستمتاع بالنظر إليها كذلك الأشياء الجميلة (وتلك هي القناعة)

إعداد: منى شغل–إيناس دليل–نور مهرة