◄دكتور المادة: ريما القمحة

◄المحاضرة: الثالثة عنوان المحاضرة: **Set theory:**

سنكمل في هذه المحاضرة النص الذي بدأنا فيه في المحاضرتين السابقتين

Example 1.1

(a)The set A above can also be written as

A={x : x is a letter in the English alphabet ,x is a vowel}

Observe that $b \notin A$, $e \in A$, $p \notin A$

(b)we could not list all the elements of the above set B although frequently we specify the set by writing B={1,2,3,.....}

Where we assume that everyone knows what we mean . observe that $8 \in B\ but -6 \notin B$

(c)let E={x : $x^2 - 3x + 2 = 0$}. In other words , E consists of those numbers which are solutions of the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sometimes called the solution set of the given equation . since the solutions of the equation are 1 and 2 , we could also write E={1,2}

(d)let E=$\{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}, F = \{2,1\}\ and\ G = \{1,2,2,1,6/3\}$ then E=F=G. observe that a set does not depend on the way in which its elements are displayed .A set remains the same if its elements are repented or rearranged.

Some sets will occur very often in the text and so we use special symbols for them

Unless otherwise specified we will let:

N=the set of positive integers 1,2,3,……

Z=the set of integers ……,-2,-1,0,1,2,3,…….

Q=the set of rational numbers

R=the set of real numbers

C=the set of complex numbers

Even if we can list the elements of a set, it may not be practical to do so . For example we would not list the members of the set of people born in the world during the year 1976 although theoretically it is possible to compile such a list. That is , we describe a set by listing its elements only if the set contains a few elements ; otherwise we describe a set by the property wich characterizes its elements .

The fact that we can , describe a set in terms of a property is formally stated as the principle of abstraction .

Principle of Abstraction : Given any set U and any property P , there is a set A such that the elements of A are exactly those members of U which have the property P.

1.2 UNIVERSAL SET EMPTY SET

In any application of the theory of sets , the members of all sets under investigation usually belong to some fixed large set called the universal set of universe of discourse. For example , in plane geometry , the universal set consists of all the people in the world we will let the symbol U

denote the universal set unless otherwise stated or implied.

For a given set U and a property P , there may not be any elements of U which have property P. For example , the set

$$S=\{x: x \text{ is a positive integer}, x^2=3\}$$

Has no elements since no positive integer has the required property .

The set with no elements is called empty set or null set and is denoted by ∅

From the principle of extension , it follows that there is only one empty set . in other words , if S and T are both empty , then S=T since there have exactly the same elements namely ,none

1.3 SUBSETS

If every elements in a set A is also an element of a set B , the A is called a subset of B .

We also say that A is contained in B or that B contains A. This relationship is written $A \subset B \; or \; B \supset A$

If A is not a subset of B , i.e. if a least one element of A does not belong to B , we write $A \not\subset B \; or \; B \not\supset A$.

EXAMPLE 1.2

(a)Consider the sets

$$A = \{1,2,3,4,5,8,9\} \quad B = \{1,2,3,5,7\} \quad C = \{1,5\}$$

Then $C \subset A \; and \; C \subset B$ since 1 and 5 , the elements of C, are also members of A and B . but B $\not\subset$A since some of its elements a.g. 2 and 7 , do not belong to A . Furthermore , since the elements of A , B and C must also belong to the universal set U , we have that U must at least contain the set {1,2,3,4,5,7,8,9}.

(b) let N,Z,Q and R be defined as in section 1.1 then

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

(c) The set E={2,4,6} is a subsets of the set F={6,2,4} since belonging to E also belongs to F . in fact , E=F . in a similar manner it can be shown that every set is a subset of itself .

Every set A is subset of the universal set U since , by definition , all the members of A belong to U . Also the empty set ∅ is a subset of A .

As noted above , every set A is Subset of itself since , trivially the elements of A belong to A .

If every element of set A belongs to a set B , and every element of B belongs to a set C , then clearly every element of A belongs to C . In other words , if A$\subset B$ and B$\subset$C then A $\subset C$

If A$\subset$B and A$\supset B$ then A and B have the same elements , i.e A=B . Conversely , if A=B then A$\subset$B and B$\subset$A since every set is a subset of itself.

We state these results formally as

Theorem 1.1 :

(i) For any set A , We have $\emptyset \subset A \subset U$
(ii) For any set A , we have A$\subset A$
(iii) If A$\subset$B and B$\subset$C , then A$\subset$C
(iv) A=b if and only if A$\subset$B and B$\subset$A

If A$\subset$B , then it is still possible that A=B . Where A$\subset$B but $A \neq B$ we say A is a proper subset of B . (some authors write $A \subseteq B$ to say that A is subset pf B , and use A$\subset$B men that A is proper subset of B). For example , if

A={1,3} B={1,2,3} C={1,3,2}

Then A and B are both subsets of C ; but A is a proper subset of C whereas B is not a proper subset of C since B=C.

الترجمة :

أمثلة 1.1 :

a) المجموعة A الموجودة في الأعلى تكتب بالشكل :
A هي مجموعة العناصر x بحيث x هو حرف انكليزي صغير و هو حرف صوتي
نلاحظ أن $b \notin A$ و $a \in A$ و $p \notin A$

b) لا نستطيع سرد كل العناصر كما في المجموعة B في الأعلى على الرغم من أننا استطعنا تحديد المجموعة عن طريق كتابة $B = \{1,2,3, \dots\}$ بحيث نفترض أن أي شخص يعرف ماذا نعني , لاحظ أن $8 \in B$ لكن $-6 \notin B$

c) إن E هي مجموعة العناصر x التي تشكل قاعة الربط $x^2 - 3x + 2 = 0$ بعبارة أخرى , تتألف E من هذه الأرقام التي تكون حلاً لهذه المعادلة : $x^2 - 3x + 2 = 0$, ندعوها أحياناً مجموعة حلول المعادلة المعطاة باعتبار أن حلول المعادلة 1,2 , يمكننا أيضاً كتابة $E = \{1,2\}$

d) لتكن E مجموعة عناصر x التي تشكل قاعدة الربط $x^2-3x+2=0$ و $F=\{1,2\}$ و $G=\{1,2,2,1,6/3\}$ عندئذٍ $G=F=E$ نلاحظ أن المجموعة لا تعتمد على طريقة عرض عناصرها . **تبقى المجموعة A كما هي إذا كررنا أو أعدنا ترتيب عناصرها .**

- بعض المجموعات سترد معنا بشكل كبير في النص و سنستخدم رموزاً خاصة من أجلها إلا إذا ذكر خلاف ذلك . سندعو المجموعات التالية :

N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ...,1,2,3

Z مجموعة الأعداد الصحيحة ...,2,-1,0,1,2-

Q مجموعة الأعداد النسبية (العادية)

R مجموعة الأعداد الحقيقية

C مجموعة الأعداد العقدية (المركبة)

حتى لو أمكننا سرد عناصر مجموعة من الأشخاص من الذين ولدوا في العالم خلال سنة 1976 على الرغم من أنه نظرياً من الممكن معالجة مثل هذه القائمة **هذا يعني أننا نصف المجموعة من خلال سرد عناصرها فقط إذا كانت المجموعة تحوي القليل من العناصر. و إلا فإننا نصف المجموعة من خلال الخصائص التي تميز عناصرها .**

- **في الحقيقة يمكننا وصف المجموعة بدلالة خصائصها رسمياً , و هذا يدعى مبدأ التجريد .**

مبدأ التجريد من أجل أي مجموعة U و أي خاصة P فإنه توجد مجموعة A و التي عناصرها هي بالضبط نفس عناصر U و التي تحقق الخاصة P

1.2 المجموعة الشاملة / المجموعة الخالية :

في أي تطبيق من نظرية المجموعات , العناصر لكل المجموعات و التي هي تحت الدراسة عادةً ما تنتمي لمجموعة أكبر و تكون ثابتة , تدعى بالمجموعة الشاملة على سبيل المثال , في الهندسة المستوية تتألف المجموعة الشاملة من كل النقاط في المستوي . و في دراسات التعداد السكاني , المجموعة الشاملة تضم جميع الناس في العالم . سنرمز بـ U للمجموعة الشاملة ما لم يذكر خلاف ذلك . من أجل أي مجموعة معطاة U و أي خاصة P ربما لا يوجد أي عنصر من U يحقق الخاصة P.

على سبيل المثال : المجموعة S : { هي مجموعة العناصر x بحيث x عدد صحيح موجب يحقق أن $x^2=3$ }

لا تحوي أي عنصر لأنه لا يوجد أي عدد صحيح موجب يحقق الخاصة المطلوبة . المجموعة التي لا تحوي أي عنصر تدعى المجموعة الخالية و يرمز لها بـ $\emptyset$.

من مبدأ التوسع , نستنتج أنه يوجد مجموعة خالية واحدة فقط , بعبارة أخرى $S=T$ لأنهما تحويان نفس العناصر بالضبط أي لا شيء.

المجموعة الجزئية :

إذا كان كل عنصر من مجموعة A هو عنصر في المجموعة B عندها نقول أن A هي مجموعة جزئية من B . و نقول أيضاً أن A محتواة في B أو B تحوي A .و هذه العلاقة تكتب بالشكل $A \subset B$ أو $B \supset A$

إذا لم تكن A مجموعة جزئية من B أي أنه إذا كان هناك عنصر واحد على الأقل من A لا ينتمي إلى B نكتب $B \not\supset A$ أو $A \not\subset B$

مثال 1,2

a) لتكن لدينا المجموعات $A = \{1,2,3,4,5,9\}, B = \{1,2,3,5,7\}, C = \{1,5\}$ عندها تكون $C \subset A$ و $C \subset B$ لأن الأعداد 1,5 (التي هي عناصر المجموعة C) هي أيضاً عناصر في Aو B و لكن $A \not\subset B$ لأن بعض عنصرها مثل 2,7 لا تنتمي إلى A . إضافة إلى ذلك , العناصر في A,B,C يجب أن تنتمي إلى المجموعة الشاملة U , لدينا المجموعة الشاملة U يجب أن تحوي على الأقل المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

b) ليكن لدينا المجموعات N,Z,Q,R المعرفة في القسم السابق (القسم 1.1) عندها $N \subset Z \subset Q \subset R$

c) المجموعة $E = \{2,4,6\}$ هي مجموعة جزئية من $F = \{6,2,4\}$ لأن كل رقم من الأرقام 2,4,6 التي تنتمي إلى E هي أيضاً تنتمي إلى F . في الحقيقة نجد أن $E = F$.

بشكل مشابه نستطيع القول أن كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها .

-كل مجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U لأنه من التعريف كل عناصرA تنتمي إلىU و أيضاً المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من A .

كما ذكر في الأعلى كل مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها لأنه بشكل بديهي عناصر A تنتمي إلى A .

إذا كان كل عنصر من المجموعة A ينتمي إلى المجموعةB و كان كل عنصر من المجموعةB ينتمي إلى المجموعةC نجد بوضوح أن A محتواة فيC بعبارة أخرى إذا كانت : $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$

إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$ فإن AوB لهما نفس العناصر و هذا يعني أن $A = B$

و بالعكس إذا كان $A = B$ فإن $\boldsymbol{A \subset B}$ و $\boldsymbol{B \subset A}$ لأن كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها .

سنسرد هذه النتائج رسمياً بالشكل :

النظرية 1.1 :i) من أجل أي مجموعة A لدينا $\emptyset \subset A \subset U$

ii) من أجل أي مجموعة A لدينا $A \subset A$

iii) إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset C$ عندئذٍ $A \subset C$

iv) $A = B$ إذا و فقط إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$

إذا كانت $A \subset B$ عندئذٍ من الممكن أن تكون $A = B$

- حيث $A \subset B$ لكن $A \neq B$ نقول أن A عي مجموعة جزئية فعلية (محتواة تماماً) في B .

(بعض الكتّاب يكتبون $A \subseteq B$ لقول أن A هي مجموعة جزئية في B و يستخدمون $A \subset B$ ليبينوا أن A هي مجموعة جزئية فعلية (محتواة تماماً) في B)

على سبيل المثال إذا كانت $A = \{1,3\}, B = \{1,2,3\}, C = \{1,2,3\}$ عندئذ A و B كلاهما مجموعتان جزئيتان في C لكن A هي مجموعة جزئية في C, B ليس مجموعة جزئية فعلية في C لأن $B = C$

سنورد الآن بعض المفردات الهامة لفهم النص

الترجمة	الكلمة	الترجمة	الكلمة	الترجمة	الكلمة
شاملة	Universal	نظرياً	Theoretically	سترد – ستمر	Will occur
خالية- فارغة	Empty	معالجة	Compile	بشكل كبير	Very often
تحقيق- دراسة	Investigation	وصف	Describe	خلاف ذلك	Otherwise
ثابتة	Fixed	يرمّز	Denote	ذُكِر	Specified
المجموعة الشاملة	Universe of discourse	ذُكِرَ	Implied	عادية – نسبية	Rational
المستوي	Plane	بدلالة-عن طريق	Terms	سرد – قائمة	List
الهندسة	Geometry	التجريد	Abstraction	عملي	Practical
فارغة	Null=empty	مطلوبة	required	يتألف	consist
عرض	Shown	نعتبر	Consider	لا شيء	None
تعريف	Definition	إضافة إلى ذلك	Furthermore	تحوي	Contain
بديهياً	Trivially	فقرة - مقطع	section	محتواة	Contained
تميز	characterize	أسلوب	manner	علاقة	Relationship

Property	صفة – خاصة	Still	ما يزال – يبقى	interior	داخل - ضمن
Clearly	بوضوح	Proper subset	مجموعة جزئية (فعلية)		
Conversely	بالعكس	Diagram	مخطط		
result	نتيجة	Representation	تمثيل		

ملاحظة:

كل الجمل التي تحتها خط في نص في النص

نوهت الدكتورة إلى أهميتها في الامتحان كجمل صح أو خطأ أو كترجمة أو اختر المصطلح *set theory* أو التعريف المناسب .

فائدة :

وردت هذه الاختصارات في النص السابق و هي تعني :

على سبيل المثال $e.g$: *example given*

هذا يعني $i.e$: *in essence*

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي – ياسين الحلبي