التحليل التابعي1

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة الأولى والثانية

عنوان المحاضرة : الفضاء المتري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-مقدمة و مراجعة (أعطيت في جلسة مستقلة)

2-بناء الأعداد الحقيقية

3-الفضاء المتري و المسافات الشهيرة

مقدمة :

سنتعرف خلال هذا الفصل على مقرر التحليل التابعي 1 الذي يدرس الفضاءات و أعمّ الدوال المعرفة على هذه الفضاءات حيث أن كل نقطة من هذه الفضاءات (ربما تكون دالة ، مصفوفة ، .....)

وبذلك نتوصل إلى مفهوم عام ومرن لمفهوم " الفضاء"

وبداية سندرس الفضاء المتري .

$\xi =$ كساي

$\zeta =$ زيتا

$\eta =$ إيتا

و لكن قبل ذلك لنسترجع بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية في علم التحليل...

ليكن لدينا $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ (مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غير خالية) .

تعريف الـ sup : نقول عن $\alpha = \sup(A)$ أصغر حد أعلى للمجموعة A إذا حققت الشرطين التاليين :

1- $\forall x \in A\, ; x \leq \alpha$

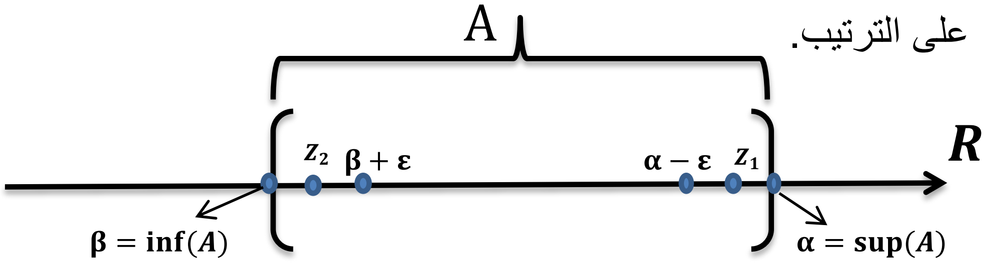
2- $\forall\, \mathcal{E} > 0\, ;\, \exists z_1 \in A\, ; z_1 > \alpha - \mathcal{E}$

تعريف الـ inf : نقول عن $\beta = \inf(A)$ أكبر حد أدنى للمجموعة A إذا حققت الشرطين التاليين :

1- $\forall\, y \in A\, ; y \geq \beta$

2- $\forall\, \varepsilon > 0; \exists Z_2 \in A\, , Z_2 < \beta + \varepsilon$

ملاحظة : ليس بالضرورة أن ينتمي كلاً من α, β إلى المجموعة A وعند الانتماء يكونان نفسيهما الـ max والـ min على الترتيب.



مبرهنة : يوجد حقل مرتب $\mathbb{R}$ (معرف عليه علاقات ترتيب)، تحوي $\mathbb{Q}$ حقل جزئي فيه ،يتمتع بخاصية أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى...

نقول عن مجموعة انها تتمتع بخاصة اصغر حد اعلى إذا كانت اي جزء فارغ ومحدود من الاعلى يوجد له sup .

نقول عن مجموعة انها تتمتع بخاصة اكبر حد ادنى إذا كانت اي جزء فارغ ومحدود من الادنى يوجد له inf .

ملاحظات:

- يوجد تقابل بين نقاط المحور الحقيقي وساحة الاعداد الحقيقية ,,كل عدد حقيقي يقابله فقط نقطة على المحور ، وكل نقطة على المحور يقابلها عدد حقيقي أي أن المحور الحقيقي هو نفسه $\mathbb{R}$.
- نقول عن مجموعة ما أنها عدودة إذا وجد علاقة تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو جزء منها .

والآن , سنبدأ بالفصل الأول من مقررنا :

الفصل الأول : الفضاءات المترية :

- تعريف الفضاء المتري :

لتكن لدينا x مجموعة ما غير خالية وليكن d دالة معرفة بالشكل التالي :

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

وتحقق هذه الدالة الشروط التالية ، بفرض أن $x, y, z \in X$ فإنَّ:

1- $d(x,y) \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3- $d(x,y) = d(y,x)$ خاصة التناظر

4- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ متراجحة المثلث

وبالتالي نسمي هذه الدالة دالة مسافة (مترك) كما أننا نسمي الزوج (X,d) **فضاء متري** .

بعض الأمثلة :

1- في المحور الحقيقي $\mathbb{R}$:

لنعرف على $\mathbb{R}$ الدالة التالية :

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$d(x,y) = |x - y|$ "تابع المسافة المألوفة" .

أثبت أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}$.

الحل

يكون الحل بالاعتماد على خواص القيم المطلقة :

حتى يكون d تابع مسافة يجب أن يحقق الشروط الأربعة :

1- $d(x,y) = |x - y| \ge 0$ لأن القيمة المطلقة دالة موجبة

2- $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$

3- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

4- $d(x,y) = |x - y| = |x - z + z - y| \le |x - z| + |z - y|$

$= d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

تحقق متراجحة المثلث وبالتالي مما سبق نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}$

2- في المستوي الاقليدي $\mathbb{R}^2$:

لنعرف على $\mathbb{R}^2$ الدالة التالية :

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ أثبت أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

الحل :

1- $d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \ge 0$

2- $d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} = \sqrt{(\eta_1 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \xi_2)^2} = d(y,x)$

3- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 = 0$

(مجموع مقدارين موجبين يساوي الصفر هذا يعني أن كلاهما يساوي الصفر)

$$\Leftrightarrow \xi_1 - \eta_1 = 0 \ \wedge \xi_2 - \eta_2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \eta_1 \wedge \xi_2 = \eta_2$$

$$\Leftrightarrow (\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) \Leftrightarrow x = y$$

4- $d(x,z) =\leq^{?} d(x,y) + d(y,z)$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$ $z = (\zeta_1, \zeta_2), y = (\eta_1, \eta_2)$

لنضع :

نعوض $a_1 = \xi_1 - \eta_1 \quad , b_1 = \eta_1 - \zeta_1 \quad , c_1 = \xi_1 - \zeta_1$

$a_2 = \xi_2 - \eta_2 \quad , b_1 = \eta_2 - \zeta_2 \quad , c_2 = \xi_2 - \zeta_2$

نلاحظ أن $c_2 = a_2 + b_2 \quad , c_1 = a_1 + b_1$

$$d(x,z) = \sqrt{(\xi_1 - \zeta_1)^2 + (\xi_2 - \zeta_2)^2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$d^2(x,z) = |c_1^2 + c_2^2| = |(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2|$$

$$= |a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2|$$

$$= |a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)|$$

$$d^2(x,z) \leq d^2(x,y) + d^2(y,z) + |2(a_1b_1 + a_2b_2)|$$

$$|a_1b_1 + a_2b_2|^2 = |a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2|$$

$$\leq a_1^2b_1^2 + 2|a_1b_2.a_2b_1| + a_2^2.b_2^2$$

لدينا المتراجحة التالية $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$

$$2|a_1b_2|.|a_2b_1| \leq |a_1b_2|^2 + |a_2b_1|^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$

$$\Rightarrow |a_1b_1 + a_2b_2|^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)b_1^2 + (a_1^2 + a_2^2)b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2).(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq d^2(x,y).d^2(y,z)$$

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq d(x,y).d(y,z)$$

$$d^2(x,z) \leq d^2(x,y) + d^2(y,z) + 2d(x,y).d(y,z)$$

$$d^2(x,z) \le \big(d(x,y)+d(y,z)\big)^2$$

$$\Rightarrow d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$$

ومنه فإن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$

تعميم : في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$ فإن تابع المسافة يكون معرفاً على النحو التالي :

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}$$

ملاحظات :

- يمكن أن نعرف أكثر من مترك على مجموعة ما .
- الفضاء $\mathbb{R}^2$ المزود بهذه المسافة نسميها الفضاءات الاقليدية ، فإذا أتى بسؤال ذكر فيه فضاء اقليدي فالمتري هو تابع المسافة المألوفة خلاف ذلك يعطينا المترك في السؤال .

مقصور دالة مسافة : ليكن لدينا الفضاء المتري (X,d) و لتكن $\emptyset \ne A \subseteq X$ و لنعرف الدالة:

$$\tilde{d}: A\times A \to \mathbb{R}$$
$$\forall x,y\in A;\ \tilde{d}(x,y)=: d(x,y)$$

و لكن ما المقصود هنا !!!

إن الدالة $\tilde{d}$ ستصور كل x,y من A بعدد موجب هو تحديداً المسافة بين هذين العددين (وفق d)

أي أن $\tilde{d}$ هي نفسها d من ناحية تصوير العناصر (النواتج) و لكن الفرق أن $\tilde{d}$ مسموح له أن يصور مجموعة جزئية من الفضاء و ليس كل الفضاء ندعو $\tilde{d}$ **بمقصور** الدالة d على A

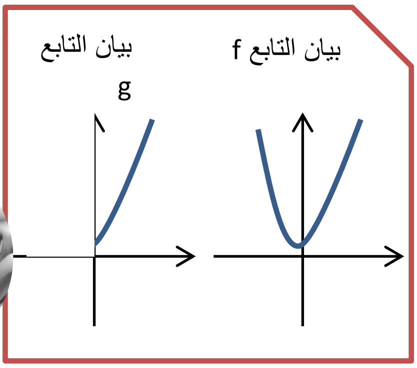
توطئة : ليكن لدينا $f: R\to R\ , f(x)=x^2$

و أيضاً $g: R^+\to R: g(x)=f(x)$

هنا نقول أن g مقصور f على R^+

أي أن التابعين سيكون لهما نفس الصور على المجموعة R^+

و أيضاً سنوضح هذا أكثر (تساوي القيم على المجموعة R^+) بالرسم المجاور



أي أنه لو نظرنا إلى التابع على أنه مجموعة قيم هذا التابع نجد أن مجموعة قيم g جزء من مجموعة قيم f

فضاء المتتاليات اللانهائية l^{∞} :

هي مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية أي أن كل عنصر من l^{∞} هو عبارة عن متتالية عقدية أي :

$$x \in l^{\infty} \Longrightarrow x = (\xi_i)_{i\geq 1}$$

حيث
$$x = (\xi_1, \xi_2, .,.,.,., \xi_i, \dots)$$

وبحيث
$$\exists c_x > 0: |\xi_i| \leq c_x$$

أي انه لكل عنصر $x \in l^{\infty}$ هناك ثابت يحد جميع مكونات العنصر (المتتالية)

لكن ليس بالضرورة أن يوجد c صالح لكل عناصر الفضاء أي أنه ليس لدينا محدودية منتظمة ولكن لدينا محدودية لكل عنصر من عناصر المتتالية

ولنعرف على هذا الفضاء دالة بالشكل التالي :

$$d(x,y) = sup|\xi_i - \eta_i| \quad : i \geq 1$$

اذا كانت عناصر x فضاء المتتاليات الحقيقية تكون هذه القيمة المطلقة المألوفة, واذا كانت مركبات x عقدية تكون طول هذا العدد العقدي..

لأثبات أن d تابع مسافة يجب علينا في البداية إثبات ان الطرف الأيمن الذي هو $sup|\xi_i - \eta_i|$ موجود .

$x = (\xi_1, \xi_2, .,.,., \xi_i.,)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ., \eta_i..)$, $z = (\zeta_1, \zeta_2,,, \zeta_i.)$ فإن $\forall\ x, y, z \in l^{\infty}$

$$|\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i| + |\eta_i| \leq c_x + c_y = c$$

وبالتالي أصبحت هذه المقادير $|\xi_i - \eta_i|$ محدودة بعدد حقيقي c وحسب مبرهنة سابقة (نقول عن مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}$ وتتمع بخاصة اصغر حد اعلى ، يوجد لها sup) وبالتالي فإن الدالة $sup|\xi_i - \eta_i|$ موجودة .

الآن نتحقق من شروط تابع المسافة

$$1)\ \ d(x,y) = sup|\xi_i - \eta_i| \geq 0$$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow sup|\xi_i-\eta_i|=0 \Leftrightarrow sup|\xi_i-\eta_i| \Leftrightarrow \xi_i-\eta_i=0 \Leftrightarrow \xi_i=\eta_i$
$\Leftrightarrow d(x,y)$

3) $d(x,y)=sup|\xi_i-\eta_i|=sup|\eta_i-\ \xi_i|=d(y,x)$

4) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \quad ; \quad z=(\zeta_i)$

لدينا $|\xi_i-\eta_i|=|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i|$

$$|\xi_i-\eta_i|\le|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|$$

$$|\xi_i-\eta_i|\le \sup|\xi_i-\zeta_i| \qquad , \qquad |\zeta_i-\eta_i|\le \sup|\zeta_i-\eta_i|$$

$$\Rightarrow |\xi_i-\eta_i|\le \sup|\xi_i-\zeta_i|+\sup|\zeta_i-\eta_i|$$

وبما أن الطرف الأيمن هو حد أعلى للطرف الايسر وبما ان sup للطرف الايسر هو اصغر حد اعلى

فإن : $|\xi_i-\eta_i|\le \sup|\xi_i-\eta_i|\le \sup|\xi_i-\zeta_i|+\sup|\zeta_i-\eta_i|$

$$\Rightarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

ومنه متراجحة المثلث محققة , مما سبق نجد أن d تابع مسافة .

فضاء الدوال المستمرة $c[a,b]$

سُمّي فضاء الدوال لأن كل نقطة من هذا الفضاء هي عبارة عن دالة ، وليكن $x,y\in c[a,b]$ و ساحة قيمها $\mathbb{R}$ أو جزء منها ولنعرف الدالة

$$d(x,y)=:Max\,|x(t)-y(t)|$$

أثبت أن d تابع مسافة

علينا إثبات أن الدالة موجودة وذلك بإثبات أن الطرف الأيمن موجود إن أي دالتين من الفضاء $c[a,b]$ هما دالتين مستمرتين وبالتالي : إن $x(t)$ هي صورة النقطة t وفق الدالة x فهي مستمرة عند t وكذلك فإن y مستمرة عند t، وبما ان فرق دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة فإن $x-y$ دالة مستمرة وتركيب دالتين والقيمة المطلقة لـدالة مستمرة هي دالة مستمرة ايضاً ومنه $Max\,|x(t)-y(t)|$ دالة مستمرة والاستمرار على مجال مغلق محدود فان استمرارها منتظما حسب نظرية سابقة يوجد نقطتين على الاقل t_1,t_2 من الساحة $[a,b]$ بحيث تبلغ الدالة في احداها Max وفي الأخرى min وبالتالي d موجودة .

الآن نتحقق من شروط تابع المسافة

واضح $d(x,y)=Max|x(t)-y(t)|\geq 0$

واضح $d(x,y)=Max|x(t)-y(t)|=Max|y(t)-x(t)|=d(y,x)$

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow Max|x(t)-y(t)|=0 \Leftrightarrow |x(t)-y(t)|=0 \Leftrightarrow x(t)-y(t)=0 \Leftrightarrow x(t)=y(t) \Leftrightarrow x=y$$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

$$|x(t)-y(t)|=|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|\leq |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$|x(t)-y(t)|\leq \mathrm{Max}|x(t)-z(t)|$$

$$|z(t)-y(t)|\leq Max\ |z(t)-y(t)|$$

فإن $|x(t)-y(t)|\leq \mathrm{Max}|x(t)-z(t)|+Max\ |z(t)-y(t)|$

وبما أن الطرف الأيمن هو الأكبر مهما تكن i فسيبقى الاكبر لو اخذنا لـ Max للطرف الايسر

$$Max|x(t)-y(t)|\leq \mathrm{Max}|x(t)-z(t)|+Max\ |z(t)-y(t)|$$

$$\Longrightarrow d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

ومنه يكون d تابع مسافة ويكون $(c[a,b],d)$ فضاء متري

فضاء المتتاليات s

وهو فضاء كل المتتاليات المحدودة وغير المحدودة حيث عناصرها ((متتاليات)) إما من $\mathbb{R}$ أو من $\mathbb{C}$

تمرين

ليكن لدينا الفضاء s ولنعرف عليه d :

$$d(x,y)=:\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

الحل : كما رأينا سابقاً يجب إثبات وجود الدالة d و ذلك بإثبات وجود الطرف الأيمن

نلاحظ أن $\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \le 1$ و كذلك نلاحظ أيضاً أن $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ هي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ أصغر من 1 فهي متقاربة و كون

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

حسب معيار المقارنة نعلم أن الأصغر من متقاربة تكون متقاربة فإن المتسلسلة المعطاة تكون متقاربة أي أن المجموعة موجودة و بالتالي d موجود

-الآن إثبات شروط المترك: ليكن $x=(\xi_i)\ \ ,y=(\eta_i)\ ,z=(\zeta_i)$

1- واضح أن $d(x,y)\ge 0$

2-أيضاً واضح أن $d(x,y)=d(y,x)$

3- $\boldsymbol{d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}=0 \Leftrightarrow |\xi_i-\eta_i|=0 \Leftrightarrow \xi_i-\eta_i=0 \Leftrightarrow \xi_i=\eta_i \Leftrightarrow x=y}$

4-نريد إثبات أن $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

ليكن لدينا التابع $f(t)=\frac{t}{1+t}$ و منه $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$ و بالتالي التابع السابق متزايد تماماً و منه فإن المتتالية $\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$ متزايدة , و بالاستناد إلى الخاصة $|a+b|\le|a|+|b|$ و لما كان f متزايد تماماً (مطرد) يمكن أن نكتب :

$$f(|a+b|)\le f(|a|+|b|)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

الآن نفرض $a=|\xi_i-\zeta_i|, b=|\zeta_i-\eta_i|$

$$\Rightarrow \frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\le\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|}$$

$$\Rightarrow \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} \leq \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} + \frac{|\zeta_i - \eta_i|}{1 + |\zeta_i - \eta_i|}$$

نضرب طرفي المتراجحة الأخيرة $\frac{1}{2^i}$ ثم نأخذ مجموع الأطراف مجموعاً غير منتهٍ:

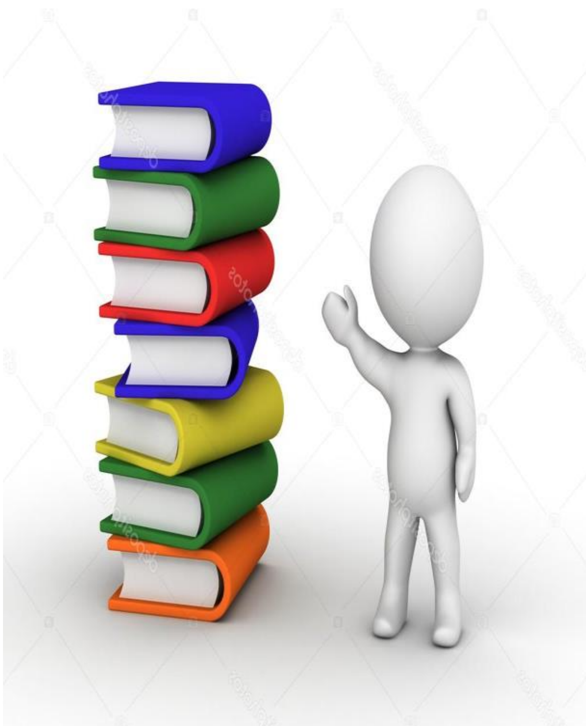
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\zeta_i - \eta_i|}{1 + |\zeta_i - \eta_i|}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

و بالتالي و مما سبق نجد أن d تابع مسافة على S و بالتالي (S,d) فضاء متري .

انتهت المحاضرة

إعداد: سماح علوان – عبد الرحمن البحش – غفران الربابي



ازرع شجرة اليوم

تنم في ظلها غدا