نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الرابعة   عنوان المحاضرة : تعاريف الاحتمالات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تعاريف في الاحتمالات .
2- الخصائص الرئيسة للاحتمال .

التعريف التقليدي للاحتمالات

بفرض $\Omega = \{w_1, w_2 \dots \dots w_n\}$ فيكون $f = p(\Omega)$ هو جبر الاحداث وإذا كنا لا نملك اي مسوّغ لترجيح وقوع حدث على حدث اخر الابتدائي فإننا نعرف الاحتمال على ان

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

إذا كان $|\Omega| = n$ و $|A| = m$ فإن $p(A) = \frac{m}{n}$

التعريف الاحصائي للاحتمال

بفرض أن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية ، إذا كررنا هذه التجربة n مرة ((حيث n كبيرة)) وليكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة بحيث يكون $n(A)$ عدد مرات تكرار وقوع الحدث A ، فإننا نعرف الاحتمال بالشكل :

$$p(A) \approx \frac{n(A)}{n} = V_n(A)$$

حيث $V_n(A)$ هي التكرار النسبي لـ A ، بشرط n كبيرة كبراً كافياً .

التعريف الرياضي للاحتمال ((تعريف كولموغوروف))

لتكن Ω تمثل مجموعة نتائج تجربة عشوائية و F جبر الاحداث ((جبر تام)) المعرف على Ω ولنعرف الدالة التالية $P : F \to R$

بحيث تحقق الشروط التالية ...

1) $\forall \ A \in F \ : p(A) \geq 0$
2) $p(\Omega) = 1$

3) إذا كانت $A_1, A_2 \dots \dots . A_n$ متتالية معدودة في الاحداث متنافية مثنى مثنى من F بحيث $A_i' \cap A_j = \emptyset$ من أجل $i \neq j$ فإن $p(\cup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} p(A_i)$

عندئذٍ ندعو p دالة الاحتمال أو ((احتمال)) اختصاراً ويكون $p(A)$ احتمال وقوع الحدث A من F

تعاريف

ندعو الثلاثية (Ω, F, P) الفضاء الاحتمالي حيث Ω فضاء العينة و F جبر الاحداث على Ω و p قياس احتمالي حسب كولموغوروف .

ندعو هذا الفضاء فضاءً احتمالي منفصل ((منقطع)) إذا كانت مجموعة الاحداث الابتدائية للتجربة منه منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد .

يكون فضاءً مستمراً ((متصلاً)) إذا كانت مجموعة الاحداث الابتدائية مجموعة غير منهية وغير قابلة للعد .

الخصائص الرئيسية للاحتمال

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي ولنفرض $A, B \in F$ حدثين من F عندئذً يمكن كتابة :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup (B \cap A')$$

نحصل على حدثين متنافيين اي ان $(B \cap A) \cap (B \cap A') = \emptyset$ وبالتالي :

الخاصة الأولى $\boxed{p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap A')}$

الخاصة الثانية $\boxed{p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap B')}$

الخاصة الثالثة بفرض $\Omega = B$ فإن $p(\Omega) = p(\Omega \cap A) + p(\Omega \cap A')$

$$\Longrightarrow \boxed{p(\Omega) = p(A) + p(A') = 1}$$

الخاصة الرابعة بفرض $\Omega = A$ فإن $p(\emptyset) + p(\Omega) = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{p(\emptyset) = 0}$$

الخاصة الخامسة إذا كانت $A \subseteq B$ حدثين من F فإن باستخدام الخاصية (1) نجد ان :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap A') = p(A) + p(B \backslash A)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p(B \backslash A) = p(B) - p(A)}$$

الخاصة السادسة من الخاصة (5) حسب التعريف بما ان $p(B\backslash A) \geq 0$ وبالتالي فإن

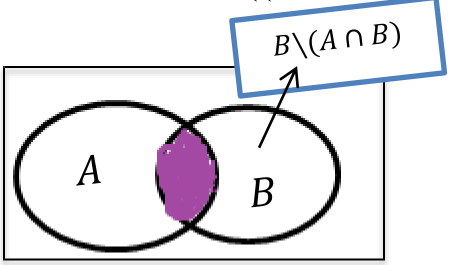
$$\Rightarrow p(B) - p(A) \geq 0 \quad \overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} \quad \boxed{p(A) \leq p(B)}$$

الخاصة السابعة من اجل حدث $A \in F$ لدينا $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ وبالتالي من اجل الخاصة (6) نجد

$$p(\emptyset) \leq p(A) \leq p(\Omega) \quad \Rightarrow \boxed{0 \leq p(A) \leq 1}$$

الخاصة الثامنة من اجل اي حدثين $A, B \in F$ بحيث $A \cap B \neq \emptyset$ ((غير متنافيين)) فإنه يمكننا كتابة ما يلي

$$A \cup B = \underbrace{A \cup (B\backslash A)}_{\text{متنافيان}}$$



$$\boxed{\Rightarrow \; p(A \cup B) = p(A)} + p(B\backslash A) \ldots\ldots (*)$$

وبالتالي $A \cap B \subseteq B$ حسب الخاصية السادسة فإن :

$$p(B\backslash(A \cap B)) = p(B) - p(A \cap B)$$

وبالتالي نعوض في $(*)$ فنجد ان : $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

تعميم

يمكن تعميم احتمال اجتماع عدة أحداث بحيث من أجل ثلاث احداث A_1, A_2, A_3 غير متنافية من F فإن :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1 \cap A_2) - p(A_2 \cap A_3)$$
$$-p(A_1 \cap A_3) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

الخاصة التاسعة من أجل متتالية $A_1, A_2 \ldots \ldots A_n$ معدودة من الاحداث F فإن

$$(\cup_{i\geq 1} A_i)' = (\cap_{i\geq 1} A'_i) \quad \Rightarrow \quad p(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1 - p(\cup_{i\geq 1} A_i)'$$

$$\Rightarrow \boxed{p(\cup_{i\geq 1} A_i) \underbrace{=}_{\text{دومورغان}} 1 - p(\cap_{i\geq 1} A'_i)}$$

في دستور الكبرياء...

الاهتمام بِمن لا يهتم

بك "إهانه"

انتهت المحاضرة

إعداد: نور مهره **منى شغل**إيناس دللي