نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : الثانية عنوان المحاضرة: المودلات الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف التشاكل الحلقي ومثالين على المودولات .

٢ـ مبرهنة تخص خواص المودولات.

٣ـ المودولات الجزئية والعمليات عليها .

ملاحظة : سنعتمد في دراستنا على المودولات اليسارية فقط .

التشاكل الحلقي : لتكن $(A,+,.),(B,+,.)$ حلقتين ما وليكن التطبيق: $f : A \longrightarrow B$ نقول أن f تشاكل حلقي إذا وفقط إذا : $\forall\, x,y \in A$

١) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

٢) $f(x.y) = f(x).f(y)$

٣) $f(1_A) = 1_B$

حيث أن العمليات في الطرف الأيسر هي عمليات الجمع والضرب المعرفة على A وعمليات الجمع والضرب في الطرف الأيمن هي عمليات معرفة على B .

مثال : ليكن $f: A \longrightarrow B$ تشاكل حلقي وليكن M مودول على B أثبت أن M مودول على الحلقة A ؟

الحل :

لنأخذ قانون التشكيل الداخلي وهو نفسه القانون المعرّف على M كونها مودول على B

$$+ \,: M \times M \longrightarrow M$$

$$(m_1, m_2) \longrightarrow m_1 + m_2$$

ولنأخذ القانون التشكيل الخارجي التي مجموعة مؤثراته A:

$$. \,: A \times M \longrightarrow M$$

$$(a,m) \longrightarrow a.m = \underbrace{f(a)}_{\in B}.\underbrace{m}_{\in M} \in M$$

توضيح : حسب قانون التشكيل الخارجي الذي مجموع مؤثراته Bالمعرف على M (كون M مودول على B فرضاً).

١) $(M,+)$ زمرة تبديلية.(لان M مودول على B)

٢) $\forall m, m_1, m_2 \in M \quad , \quad \varphi, \beta \in A$

- $1_A.m = f(1_A).m = \underbrace{1_B.m}_{\text{لان M مودول على B}} = m$

- $\varphi(m_1 + m_2) = f(\varphi).(m_1 + m_2) = f(\varphi)m_1 + f(\varphi)m_2 = \varphi m_1 + \varphi m_2$

- $$(\varphi + \beta).m = f(\varphi + \beta).m = \big(f(\varphi) + f(\beta)\big).m$$
$$= f(\varphi)m + f(\beta)m = \varphi m + \beta m$$

- $$(\varphi.\beta).m = f(\varphi.\beta).m = \underbrace{\big(f(\varphi).f(\beta)\big)}_{\text{لان } f \text{ تشاكل}}.m = \underbrace{f(\varphi).\big(f(\beta).m\big)}_{\text{التجميعية محققة لأن } M \text{ مودول على } B \text{ فرضاً}}$$
$$= f(\varphi).(\beta.m) = \varphi.(\beta m)$$

مثال : $(G,*)$ زمرة تبديلية نعرف عليها قانون التشكيل الخارجي التالي :

$$. : \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$$

$$(n,g) \longrightarrow n.g = \begin{cases} g * \quad \ldots\ldots * g & : n > 0 \\ \quad 0 & \quad n = 0 \\ (-g) * \quad \ldots\ldots * (-g) & \quad n < 0 \end{cases}$$

إن G مودول على الحلقة $\mathbb{Z}$ (التحقق من الشروط وظيفة).

مبرهنة : ليكن M مودول على الحلقة A عندها : $\forall\, m \in M \;, a \in A$

١) $0_A.m = 0_M$

٢) $a\;.0_M = 0_M$

٣) $-(a.m) = (-a)(m) = a(-m)$

البرهان :

-١ $$0_A.m = (0_A + 0_A).m \underbrace{=}_{m \text{ مودول على} A} 0_A.m + 0_A.m$$
$$\Longrightarrow 0_A.m = 0_A.m + 0_A.m$$

$$\Longrightarrow\ 0_A.m - 0_A.m = 0_A.m$$

$$o_M = o_A.m$$

-٢
$$a.0_M = a.(0_M + 0_M) \underbrace{=}_{A\text{ موديول على } m} a.0_M + a.0_M$$

$$\Longrightarrow\ a.0_M - a.0_M = a.0_M$$

$$o_M = a.o_M$$

-٣
$$(-a).m + a.m = (-a+a).m = 0.m \underbrace{=}_{1\text{ حسب}} 0$$

$$\Longrightarrow\ (-a).m + a.m = 0 \ \Longrightarrow\ -a.m = (-a).m$$

المساواة الثانية :

$$a.(-m) + a.m = a.(-m+m) = a.0 = 0$$

$$\Longrightarrow\ a.(-m) + a.m = 0 \ \Longrightarrow\ -a.m = a.(-m)$$

المودولات الجزئية

تعريف : ليكن M مودول على الحلقة A ولتكن $M \supseteq N \neq \emptyset$ نقول عن N إنها مودول جزئي من M إذا تحقق :

a. $\forall\, n_1, n_2 \in N :\ n_1 - n_2 \in N$

b. $\forall\, \alpha \in A\ ,\ n \in N :\ \alpha.n \in N$

ويمكن دمج الشرطين فيصبح لدينا شرط واحد :

$$\forall\, \alpha, \beta \in A\ ,\ \forall\, n_1, n_2 \in N\ :\ \alpha n_1 + \beta n_2 \in N$$

مثال (١) :

إذا كان M مودولا على الحلقة A فإن كل من M و $\{0\}$ مودول جزئي من A ويسمى $\{0_M\}$ المودول الصفري .

مثال (٢) :

إن أي زمرة تبديلية G هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة (حسب المثال الثاني) وبالتالي إن كل زمرة جزئية من الزمرة G هي مودول جزئي من المودول G .

مثال (٣) :

كل مثالي في حلقة A هو مودول جزئي في المودول A حيث الحلقة A هي مودول على نفسها .

الحل :

حسب تعريف المثالي نعلم أن $I \in A$ وأن $(I,+)$ زمرة جزئية .ونعلم أن

$$\forall i \in I \;,\quad a \in A \quad \Longrightarrow a.i \in I$$

ومنه I مودول جزئي من A لان شروط التعريف محققة من شروط تعرف المثالي .

انتهى الحل

العمليات على المودولات الجزئية " التقاطع "

مبرهنة : لتكن M مودول على A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من M ولنعرف :

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \{\, x : x \in m_i \quad ; \ \forall\, i \in I \,\} \ .$$

أثبت أن $\bigcap_{i\in I} M_i$ هو مودول جزئي من M .

البرهان :

١- $0_M \in M_i \qquad (\forall\, i \in I)$

وبما أن M_i مودولات جزئية في M حيث $M_i \subseteq M$

$$\Longrightarrow\ 0_M \in \bigcap_{i\in I} M_i \ \Longrightarrow\ \emptyset \neq \bigcap_{i\in I} M_i$$

٢- $\forall\, n_1, n_2 \in \bigcap_{i\in I} M_i \ ,\ \alpha, \beta \in A$

بما أن M_i مودولات جزئية في M وذلك $\forall i \in I$ فإن :

$$n_1, n_2 \in M_i \ ,\ \alpha, \beta \in A \quad ; \quad \forall\, i \in I$$

$$\alpha n_1 + \beta n_2 \in M_i \quad ; \ \forall\, i \in I$$

ومنه فإن : $\alpha n_1 + \beta n_2 \in \bigcap_{i\in I} M_i$

ومنه $\bigcap_{i\in I} M_i$ مودول جزئي من M .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد حايك البوشي