المحاضرة السادسة 2017/10/23 ن

- استخدام النواة المترديه في إيجاد حل معادلة فريدهولم التكاملية:

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (1)$$

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) \qquad (2)$$

$k(x,t)$ كملة تربعياً

مثلاً: لو أخذنا $k(x,t) = x \cdot \ln t - t \ln x$

$a_1(x) = x \qquad b_1(t) = \ln t$

$a_2(x) = \ln x \qquad b_2(t) = t$

$k(x,t)$ كولة تربعياً

هذه الدوال يجب أن تكون مستقلة فيما بينها

$$k(x,t) = x^2 \cos t + x \sin t$$

$a_1(x) = x^2 \qquad b_1(t) = \cos t$

$a_2(x) = x \qquad b_2(t) = \sin t$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x^2 = -x^2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx \, dt = \frac{2\pi^6}{5} + \frac{2\pi^4}{3} < \infty \qquad b = \pi, \quad a = -\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2 \, dt = \pi x^4 + \pi x^2 < \infty \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2 \, dx = \frac{2\pi^{-5}}{5} \cos^2 t + \frac{2\pi^{-3}}{3} \sin^2 t < \infty$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t)\right] \psi(t) \, dt$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t) \psi(t) \, dt$$

$$c_i = \int_a^b b_i(t) \psi(t) \, dt$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \, a_i(x)$$

$$\psi(t) = f(t) + \lambda \int \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(t)$$

$$c_i = \int_a^b b_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(t) \right] dt$$

$$c_i = \int_a^b b_i(t) f(t) dt + \lambda \int_a^b b_i(t) \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(t) dt$$

$$c_i = \int_a^b b_i(t) f(t) dt + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b b_i(t) a_m(t) dt$$

لندخل المصطلحات التالية :

$$f_i = \int_a^b b_i(t) f(t) dt$$

$$a_{im} = \int_a^b b_i(t) a_m(t) dt$$

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m a_{im} \qquad (i = 1 \dots n, \; m = 1 \dots n)$$

$i \to m$ $\Rightarrow$ $c_m = f_m + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_{mi}$

$m \to i$

$$c_m - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_{mi} = f_m$$

$$(1 - \lambda a_{11}) c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \lambda a_{13} c_3 \dots \lambda a_{1n} c_n = f_1$$

$$-\lambda a_{21} c_1 + (1 - \lambda a_{22}) c_2 + \dots \lambda a_{2n} c_n = f_2$$

$\vdots$

$$-\lambda a_{1n} c_1 - \lambda a_{n2} c_2 - \cdots - (1-\lambda a_{nn}) c_n = h_n$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & & (1-\lambda a_{nn}) \end{vmatrix}$$

- $\Delta(\lambda) \neq 0$ عندئذ يوجد للمعادلة حل وحيد هو $c_1 \dots c_n$ *
يحدد بالصيغة التالية

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$$

وفي هذه الحالة نسمي λ قيمة غير مميزة

- $\Delta(\lambda) = 0$ عندها إما لا يوجد حل أو عدد غير منته من الحلول وعندئذ ندعو λ قيمة مميزة

مثال: $\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x$

$k(x,t)$ متردية لأن جميع الشروط محققة.

إن حل المعادلة يعطى وفق المعادلة *

$a_1(x) = x^2 \qquad a_2(x) = x$

$b_1(t) = \cos t \qquad b_2(t) = \sin t$

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t)\, a_1(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t^2\, dt$$
$$= 4\pi$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t \,.\, t\, dt = 0$$

$$a_{13} = \int_a^b b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \,.\, t^2\, dt = 0$$

$$a_{14} = \int_a^b b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \,.\, t\, dt = 2\pi$$

$$h_1 = \int_a^b b_1(t) \,.\, h(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos t\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= \pi$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t)\, h(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin t \,.\, \cos t}_{\text{فردية}}\, dt = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (1 - \lambda 4\pi)\, c_1 &= \pi \\ (1 - 2\pi\lambda)\, c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{جملة}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - 4\pi & 0 \\ 0 & 1 - 2\pi\lambda \end{vmatrix} = (1 - 2\pi\lambda)(1 - 4\pi\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4\pi} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$$

الحالة ١: $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$

$$c_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda} \quad ; \quad c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x)$$
$$= \cos x + \frac{\lambda\pi}{1-4\pi\lambda} \cdot x^2$$

2- $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\lambda}$ بالتعويض $c_1 - c_2 = 0 \neq \pi$

$$\left(1 - 2\pi \frac{1}{4\pi}\right) c_2 = 0$$
$$\frac{1}{2} c_2 = 0$$
مستحيل
لايوجد حل

3- $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$ نعوض بالجملة $0 . c_2 = 0$

$c_2 = A$ كيفي ; $c_1 = -\pi$

$$\varphi(x) = \cos x - \frac{1}{2} x^2 + A x$$