المحاضرة الثانية   الخميس 12/10/2017

توجيه الفضاء الثلاثي

لتكن $\vec{e_3}$ ، $\vec{e_2}$ ، $\vec{e_1}$ ثلاثية مرتبة من المتجهات المستقلة خطياً

$\vec{V_3}$ ، $\vec{V_2}$ ، $\vec{V_1}$ ثلاثية أخرى مرتبة

عندئذٍ توجد أعداد حقيقية d_i^j بحيث :

العمود

$$\vec{V_1} = d_1^1 \vec{e_1} + d_1^2 \vec{e_2} + d_1^3 \vec{e_3}$$

السطر

$$\vec{V_2} = d_2^1 \vec{e_1} + d_2^2 \vec{e_2} + d_2^3 \vec{e_3}$$

$$\vec{V_3} = d_3^1 \vec{e_1} + d_3^2 \vec{e_2} + d_3^3 \vec{e_3}$$

أي $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ تكتب كتركيب خطي بدلالة $\vec{e_1}$ ، $\vec{e_2}$ ، $\vec{e_3}$

لنأخذ المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 \\ d_3^1 & d_3^2 & d_3^3 \end{vmatrix}$$

لنميز الحالات :

1. $\Delta = 0 \iff \vec{V_1}$ ، $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ متجهات مرتبطة خطياً
2. $\Delta > 0$ نقول عن الثلاثيتين $\vec{e_1}$ ، $\vec{e_2}$ ، $\vec{e_3}$ و $\vec{V_1}$ ، $\vec{V_2}$ ، $\vec{V_3}$ لهما نفس التوجيه
3. $\Delta < 0$ نقول عن الثلاثيتين $\vec{e_1}$ ، $\vec{e_2}$ ، $\vec{e_3}$ و $\vec{V_1}$ ، $\vec{V_2}$ ، $\vec{V_3}$ لهما توجيهين متعاكسين

* المبادلة بين موضعي متجهين متتاليين يغير من توجيه الثلاثية $\vec{e_3}$ ، $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ بتوجيه معاكس للثلاثية $\vec{e_3}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}$

* لكن التغيير الدوري لا يغير من توجيه الثلاثة

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \\ \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_1} \\ \vec{e_3}, \vec{e_1}, \vec{e_2} \end{array}\right.$$
لهم نفس التوجيه

الفضاء الموجه : هو عبارة عن فضاء ثلاثي مزوّد بثلاثية مرتبة من المتجهات المستقلة خطياً

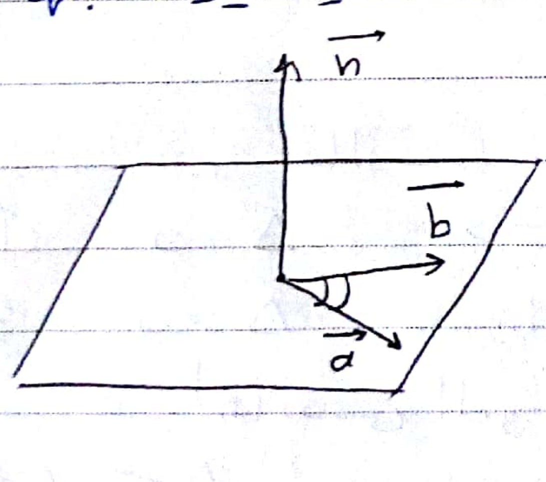
التوجيه الموجب والتوجيه السالب:

$\vec{e_1}$ ، $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$،

نقول عن الثلاثية $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ أنها ذات توجيه موجب إذا كان لها توجيه $\vec{e_3}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}$

وإلا قلنا عنها إنها ذات توجيه سالب (إذا كان لها عكس توجيه $\vec{e_3}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}$)

أي متجه ناظم $\vec{n}$ على مستوي في فضاء ثلاثي يحدد جهة دوران كالآتي:



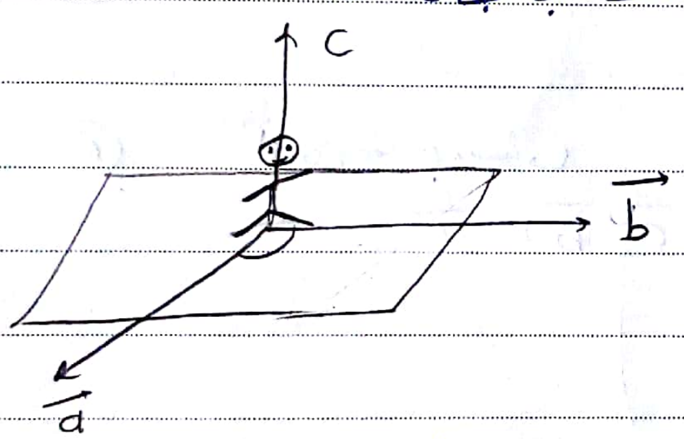
إذا أخذنا $\vec{b}$ و $\vec{a}$ متجهين في المستوي منطلقين من نفس المفصلة، والتمثيل للناظم أيضاً من نفس المفصلة بحيث $\vec{b}$ ينتج من $\vec{a}$ وفق دوران بزاوية محصورة ضمن $]0, \pi[$

فإننا نقول عن جهة الدوران إنها موجبة إذا كانت الثلاثية

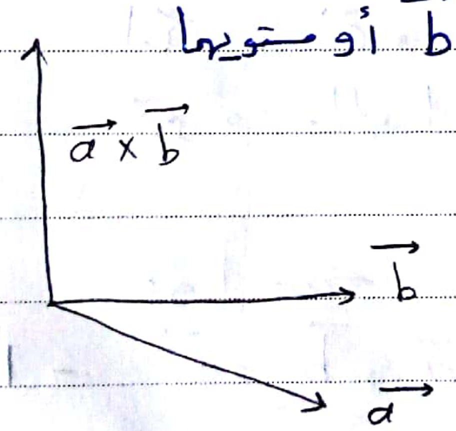
$\vec{n}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ذات توجيه موجب
وإلا جهة الدوران ستكون سالبة أي الثلاثية $\vec{n}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$
ذات توجيه سالب

نقول عن الثلاثية $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ إنها يمينية إذا كانت توافق بالتوجيه لثلاثية أصابع اليد اليمنى (الوسطى، السبابة، الإبهام)
بحيث $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$
↓ ↓ ↓
الإبهام الوسطى السبابة

طريقة أخرى:
شخص يقف على المستوي $\vec{a}\,\vec{b}$، رأسه باتجاه $\vec{c}$
وينظر إلى الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$
عندئذٍ $\vec{a}$ على يمينه و $\vec{b}$ على يساره



الجداء المتجهي أو الشعاعي أو الخارجي:
$\vec{b}$ و $\vec{a}$ يعرف من الجداء المتجهي لهما والذي نرمزه بـ $\vec{a}\times\vec{b}$
أو $\vec{a}\wedge\vec{b}$ بأنه متجه يعامد كلاً من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أو مستويهما (المنحى)
له الطول: (الطول)



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|$$

(الجهة)
وبحيث تكون الثلاثية $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$
يمينية (ذات توجيه موجب)

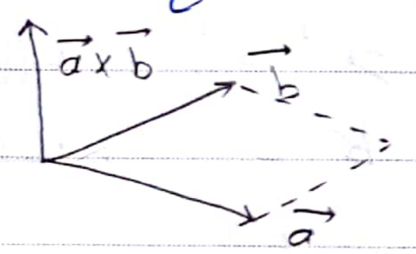
خواصه:
1. ليس تبديلياً: $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$
ولكن $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

(2) $\vec b$ و $\vec a$ مرتبطين خطياً فإن:

$$\vec a \times \vec b = 0$$

أو $\vec a = 0$ أو $\vec b = 0$

(3) $\|\vec a \times \vec b\|$ يساوي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $(\vec a , \vec b)$



(4) $(\lambda \vec a) \times \vec b = \vec a \times (\lambda \vec b) = \lambda (\vec a \times \vec b)$

(5) $\vec a \times (\vec b + \vec c) = \vec a \times \vec b + \vec a \times \vec c$

$(\vec a + \vec b) \times \vec c = \vec a \times \vec c + \vec b \times \vec c$

(6) علاقة جيبس

$$\vec a \times \vec b \times \vec c = \underbrace{(\vec a \cdot \vec c)}_{\text{عدد}} \cdot \vec b = (\vec c \cdot \vec b) \cdot \vec a$$

الجداء المختلط:

لتكن $\vec c$ و $\vec b$ و $\vec a$ ثلاثة متجهات في فضاء ثلاثي منظم
تعرف الجداء المختلط $[\vec a , \vec b , \vec c]$ بأنه العدد

$$[\vec a , \vec b , \vec c] = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec c$$

خواصه:

1- $\vec c$ و $\vec b$ و $\vec a$ مرتبطة خطياً $\iff [\vec a , \vec b , \vec c] = 0$

2- يمثل $[\vec a , \vec b , \vec c]$ ((في حال كانت $\vec c$ و $\vec b$ و $\vec a$ مستقلة خطياً))
بالقيمة المطلقة حجم متوازي السطوح المنشأ عليه.

3- إشارة الجداء المختلط تحدد توجيه الثلاثية $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
(إذا كانت إشارة الجداء المختلط سالبة فالثلاثية ذات توجيه سالب
وإلا فالثلاثية ذات توجيه موجب)

4- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

$= -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$

المركّبات :

لنأخذ فضاء ثلاثي الأبعاد مزوّداً بمحاور متلاقية في نقطة
ولتكن o (ox, oy, oz) متعامدة مثنى مثنى
ولنأخذ على المحور ox متجه الواحدة $\vec{i}$
على المحور oy " " $\vec{j}$
على المحور oz " " $\vec{k}$
أصبحت هذه المتجهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متعامدة مثنى و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
$\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ قاعدة وتحدّد توجيه للفضاء
بما أن $k, j, \vec{i}$ قاعدة للفضاء فكل متجه من الفضاء تكتب
بالشكل:

$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} = v_3 \vec{k}$

(v_1, v_2, v_3) مركبات المتجه $\vec{v}$

خواص $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$:

$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

جمع وطرح متجهين : هو جمع وطرح مركبات المتجهين

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\qquad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

- $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

- $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_2)$$

الجداء المختلط :

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

انتهى

بيان الباشا ^^