22-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة: حزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: نظرية الزمر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمبرهنات وأمثلة.

٢ـ العمليات على المجموعات الجزئية.

مبرهنة: لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية في G فإن الشرط الازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط : $a.b \in H \quad ; \quad \forall\, a,b \in H$

الاثبات :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية فإنها تحقق الشرط:

$\forall\, a,b \in H \,;\, a.b \in H$

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط a,b $\forall\, a,b \in H \,;\, a.b \in H$ ولنبرهن على انه

$\forall\, a \in H ; \quad a^{-1} \in H$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $a = b \Leftarrow a, a^2, a^3, \dots \dots \dots, a^n \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i,j \in N^*$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

نضرب بمقلوب a^j : $a^{i-j} = e$ ولما كان $a \neq e$ فإن $i - j \neq 1$ لأنه بحالة $i - j = 1$ تصبح $a = e$ و هذا يؤدي الى تناقض ..

ومنه فإن ال $i - j > 1$ وبالتالي: $i - j - 1 > 0$ أي $a.a^{i-j-1} = e$

وإن $a^{i-j-1} \in H$ ومنه نجد ان $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$

مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذٍ:

١- لأجل أي عنصر $a \in G$ فإن المجموعة $< a >= \{a^n : n \epsilon Z \}$ تشكل زمرة جزئية في G .

- إن المجموعة $Z(G) = \{a: a \in G \ , xa = ax \ , \forall x \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في G تسمى مركز الزمرة G

البرهان :

١) $\emptyset \neq < a > \subseteq G$ لأن $e = a^0 \epsilon < a >$.

لتكن $x, y \epsilon < a >$ عندئذ $y = a^n$ و $x = a^m$ بحيث $n, m \epsilon Z$ ومنه

$$y^{-1} = (a^n)^{-1} = a^{-n}$$

$$x. y^{-1} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \epsilon < a >$$

ومنه $< a >$ تشكل زمرة جزئية ل G .

٢) $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$ لأن $\forall x \in G; e \in Z(G); ex = xe$

ليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذٍ: $\forall x \in G \ ; \ ax = xa \ , bx = xb$

نضرب بمقلوب b من اليمين : $b.x.b^{-1} = x.b.b^{-1} \Rightarrow b.x.b^{-1} = x$

نضرب بمقلوب b من اليسار : $b^{-1}.b.x.b^{-1} = b^{-1}.x \Rightarrow x.b^{-1} = b^{-1}.x$

وإن: $(a.b^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(x.b^{-1}) = (ax)b^{-1}$

$$= (xa)b^{-1} = x(a.b^{-1})$$

$$\Rightarrow a.b^{-1} \in Z(G)$$

فإن $Z(G)$ زمرة جزئية في G.

تمهيدية : لتكن G زمرة وان تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية في G تشكل زمرة جزئية ايضاً.

البرهان :

لتكن $[A_i]_{i \in I}$ أسرة من الزمر الجزئية في G عندئذٍ $\emptyset \neq A_i \subseteq G$

$$\forall i \in I \ ; \bigcap_{i \subset I} A_i \subseteq G$$

إن $\forall i \in I , e \in \bigcap_{i=I} A_i$ $\quad e \in A_i$

ليكن $x, y \in \bigcap_{i=I} A_i$ عندئذٍ : $\quad x, y \in A_i$ ذلك $\forall i \in I$

ولما كان A_i زمرة جزئية في G فإن :

$$x.y^{-1} \in A_i , \forall i \in I$$

عنصر ينتمي لاسرة اذاً ينتمي للتقاطع $x.y^{-1} \in \bigcap_{i\in I} A_i$

وبالتالي $\bigcap_{i\in I} A_i$ تشكل زمرة جزئية في G

ملاحظة: ان اجتماع مجموعتين جزئيتين ليس بالضرورة ان تكون زمرة جزئية.

مثال: في زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ لنأخذ الزمرتين الجزئيتين $3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$

لنفرض جدلاً ان $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ ومنه $2 + 3 = 5 \in 3\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$

ولما كان 5 ليس مضاعف للعددين 2,3 فإن $5 \notin 3\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$ اذاً هذا غير ممكن ومنه $3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ ليس زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

- **زمرة الجمع بالمقاس n** : ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $Z_n = \{0,1,2, \dots \dots (n-1)\}$

لنعّرف على المجموعة Z_n عملية ثنائية جمعية $\oplus$ بالشكل الآتي:

$$\forall a, b \in Z_n ; a \oplus b = r \in Z_n$$

حيث r (ناتج الجمع) هو باقي قسمة $a \oplus b$ على n.

اذا كان $n = 6$: $\quad Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

إن $5 \oplus 3 = 2$ لان $3 + 5 = 8$ و $8 \div 6 = 1$ والباقي 2(أي أن الجواب هو باقي القسمة فقط)

- ان $(Z_n, \oplus)$ زمرة جمعية تبديلية ، والعنصر المحايد فيها هو الصفر ونظير العنصر $a \in Z_n$ هو $-a = n - a$

مثال: من أجل $n = 6$

$\Leftarrow$ زمرة تبديلية جمعية محايدها الصفر .

$n=6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

ملاحظات:

١- لا يوجد سطر او عمود يحوي العنصر مرتين.
٢- الصفر هو المحايد بالنسبة للجمع ، وفي كل سطر ظهر المحايد إذاً لكل عنصر نظير.
مثال : نظير 4 هو 2 (ننظر للرقم 4 ونتابع لنرى الصفر في أي عمود وننظر للعنصر المثال له فيكون الحيادي).
٣- لو اخذنا القطر نلاحظ ان العناصر متناظرة على طرفيه لذلك فهو زمرة تبديلية .

- **زمرة الضرب بالمقاس n :** ليكن $n > 1$ عدد صحيح لنأخذ المجموعة

$$U(n) = \{a : a \in \mathbb{Z} \ ; 1 \le a < n : \gcd(a,n) = 1\}$$

- من اجل $n = 4 \Leftarrow U(4) = \{1,3\}$
- من اجل $n = 5 \Leftarrow U(5) = \{1,2,3,4\}$

لنعرّف على المجموعة $U(n)$ عملية ضرب $\odot$ معرّفة بالشكل الاتي:

$$\forall a, b \in U(n); a \odot b = r$$

فنجد أن $(U(n),\odot)$ زمرة ضربية تبديلية . العنصر المحايد فيها هو الواحد.

مثال: $n = 5$

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $D = \{1,2,3, \dots \dots \dots, (n-1)\}$

إن الشرط الازم والكافي لتكون D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n هو أن يكون n أولياً .

الاثبات :

لزوم الشرط : لنفرض أن D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n ولنفرض جدلاً أن العدد n ليس أولياً

((أي يوجد قاسم موجب له غير الواحد و n)) عندئذ $\exists t \in Z$ حيث $1 < t < n$. يقسم n وبالتالي $\exists s \in Z$ بحيث $1 < s < n$ يحقق $n = s.t$

نلاحظ ان $t, s \in D$ ومنه $t \odot s = 0$ (حيث الصفر هو باقي القسمة) و هذا غير ممكن ومنه n عدد اولي.

كفاية الشرط : لنفرض أن n عدد أولي ولنبرهن على ان $D = U(n)$ نلاحظ ان كل عنصر من $U(n) \subseteq D$ هو عدد. ليكن $b \in D$ عندئذٍ لما كان العدد n اولي و $1 \leq b < n$ فإن $\gcd(b,n) = 1$ ومنه فإن $b \in U(n)$ وبالتالي $D \subseteq U(n)$ وهكذا فإن $D = U(n)$ أي ان D زمرة .

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح و k قاسم موجب للعدد n عندئذٍ :

$$U_k(n) = \{a : a \epsilon U(n) : a \bmod - k = 1\}$$

تشكل زمرة جزئية في $U(n)$. (ملاحظة: $a \bmod - k$ تعني باقي قسمة a على $mod - k$ وk يعني باقي قسمة)

الاثبات :

واضح أن $\emptyset \neq U_k(n) \subseteq U(n)$ لان: $1 \epsilon U_k(n)$

ليكن $1 \leq a,b < n$, $a,b \epsilon U_k(n)$ و بالتالي $a = q.k + 1$ و $b = q_1.k + 1$ حيث $q_1, q_2 \in Z$

لنبرهن إن $a.b \epsilon U_k(n)$ (يكفي تحقق هذا الشرط لانها زمرة منتهية).

ان $a.b\epsilon U_k(n)$ (طالما a,b عناصر من $U(n)$) فضلاً عن ذلك :

$$a.b = (q.k+1)(q_1.k+1) = (q.q_1.k^2 + qk + q_1k + 1) = (q.q_1.k + q + q_1)k + 1$$

ومنه فإن $a.b \bmod - K = 1$ إذاً $a.b \epsilon U_k(n)$ أي أن $U_k(n)$ زمرة جزئية في $U(n)$.

أمثلة: سنأخذ $\boldsymbol{U}(n)$ ومن ثم سنوجد $U_k(n)$ (k يعطى بنص السؤال) .

- ليكن لدينا $\boldsymbol{U}(10) = \{1,3,7,9\}$ أوجد $U_2(10)$ (نأخذ عناصر $\boldsymbol{U}(10)$ عنصراً تلو الأخر ونطبق عليهم الشرط $a \bmod - k = 1$ أي بمثالنا يجب ان يكون $a \bmod - 2 = 1$)

الأن من أجل 1 (هل باقي قسمة 1 على 2هو 1) صحيح ومنه ال 1 ينتمي ل $U_2(10)$

الأن من أجل 3 (هل باقي قسمة 3 على 2هو 1) صحيح ومنه ال 3 ينتمي ل $U_2(10)$

وهكذا حتى نكمل عناصر **الزمرة** ويمكن أن تكون الزمرة الجزئية تحوي كل عناصر الزمرة كمثالنا هذا (ملاحظة نكتفي امتحانيا بوضع العناصر ولا داعي للشرح) وبالتالي الحل يكون $U_2(10) = \{1,3,7,9\}$

أوجد ايضاً $U_5(10) = \{1\}$

- ليكن لدينا $U(21) = \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$ أوجد $U_3(21), U_7(21)$

$U_3(21) = \{1,4,10,13,16,19\}$ $\qquad$ $U_7(21) = \{1,8\}$

لا تنسى $U_k(n)$ تشكل زمر جزئية

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج