نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: الثانية عنوان المحاضرة: الجداءات اللانهائية

درسنا سابقاً في مقرر التحليل ١ المتسلسلات أو السلاسل الحقيقية العددية اللانهائية ودرسنا مفهوم تقاربها سنقوم اليوم بتناول موضوع وهو الجداءات العددية الحقيقة اللانهائية

الجداءات اللانهائية

◄**تعريف :** لتكن لدينا المتتالية العددية الحقيقية $n \in N$ $\{p_n\}$ ترمز بـ :

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1.p.p_3 \dots .p_n \dots .$ بالجداء غير المنتهي لعناصر $\{p_n\}_{n\in N}$

◄**متتالية الجداء الجزئي** هي المتتالية $\{P_n\}_{n\in N}$ و المعرفة بالشكل :

$$P_n = p_1.p_2 \dots .p_n$$

و هذا يعني أن $P_1 = p_1$, $P_2 = p_1.p_2$, ... و هكذا.....

◄**تعريف :** نقول عن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ انه متقارب إذا كانت متتالية الجداءات الجزئية له متقاربة إلى العدد P حيث $(P \neq 0)$ ونكتب قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ حيث $\lim_{n\to\infty} p_n = P$

أي أن نهاية متتالية الجداء الجزئي هي قيمة الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$

◄**ملاحظات :**

١ – إذا كانت نهاية متتالية الجداء الجزئي تساوي $\pm\infty$ أو قيمة غير محددة (غير موجودة) نقول إن الجداء متباعد $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$

٢- إذا كان أحد المضاريب يساوي الصفر نقول إن الجداء متقارب إلى الصفر

٣– إذا كانت $\forall n$: $(p_n \neq 0)$ وكانت نهاية متتالية الجداء الجزئي : $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ أي متتالية الجداء الجزئي متقاربة من الصفر فإن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ متباعد إلى الصفر

◄ **مثال ١ :** ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

الحل : نقوم بتشكيل متتالية الجداء الجزئي :

$P_n = \prod_{k=1}^{n}(-1)^k \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(-1)^k$ غيرموجودة

$\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ متباعدة

◄**تنويه** إن متتالية الجداء الجزئي في المثال السابق هي :

$$\prod_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^1(-1)^2(-1)^3 \dots\dots\dots (-1)^n = (-1)(-1)(-1) \dots\dots\dots$$

و نلاحظ أنه لا يمكن تحديد قيمة هذا الجداء عندما n تسعى إلى اللانهاية ذلك لأننا لا نعلم إذا كان عدد الحدود زوجياً أم فردياً .. و بالتالي لا نعلم إذا كان الناتج سيكون 1 أو -1

◄ **مثال ٢ :** ادرس الجداء التالي وأوجد قيمته في حال تقاربه

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

الحل: بدايةً لنشكل متتالية الجداءات الجزئية و التي حدها العام:

استخدمنا في البسط المطابقة

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

والمقام k^2 =k.k

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

$$= \prod_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+1)}{k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\dots\dots\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}$$

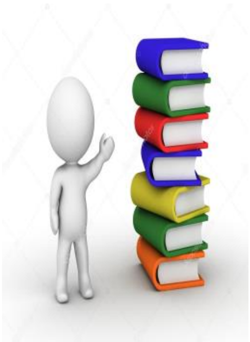
بالاختصار نجد أن :

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{p}_n = \frac{1}{2}$$

وبالتالي هو متقارب و قيمته :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$



◄ **مثال ٣ :** ادرس تقارب الجداء: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

الحل: نشكل متتالية الجداء الجزئي

$$\mathrm{P}_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\ldots\cdots\frac{(n-2)}{n-1}\cdot\frac{(n-1)}{n}$$

بالاختصار نجد أن :

$$\mathrm{p_n}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n=\frac{1}{n}=0$$

فالجداء متباعد إلى الصفر

◄ **تعريف :** نعرف الجداء $\pi_n=\prod_{k=n+1}^{\infty} p_k = p_{k+1}\cdot p_{k+2}\ldots$ **بالجداء الباقي** حيث أن

الجداء الجزئي :

$$p_n = p_1\, p_2\, p_3 \ldots \ldots p_n$$

ونكتب

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_n\ \pi_n$$

مبرهنة (من دون برهان ^^):

إذا كان الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ متقارباً من p فإن جميع الجداءات الباقية متقاربة والعكس صحيح أي إذا كانت الجداءات الباقية متقاربة فالجداء اللانهائي متقارب ونكتب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P\,\pi_n$$

متقارب <=> متقارب

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب