نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة : الثالثة   عنوان المحاضرة : الفضاء l^p

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الفضاء l^p .
2- تعاريف طبلوجية هامة .

سنتابع في محاضرتنا أمثلة عن الفضاءات المترية ومنها الفضاء ℓ^p وسيكون لدينا مجموعة من التعاريف المهمة التي من الضروري فهمها بشكل دقيق ولابد من الإشارة إلى أنه عند التعامل مع أي مجموعة لا بد من تعريف التبولوجيا على هذه المجموعة .

وقد اشار الدكتور على أن:

"فالمجموعة بدون تبولوجيا أشبه بالجسد بلا روح ".

الفضاء l^p

نعرف كل عنصر من عناصر الفضاء ℓ^p بأنه متتالية أي أن :

$$x \in \ell^p \implies x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \dots \dots)$$

حيث p عدد حقيقي أكبر أو يساوي الواحد ، وتحقق هذه المتتالية أن المتسلسلة الناتجة عنها هي متسلسلة متقاربة أي :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$$

حالة خاصة :

عندما $p = 2$ نسمي ℓ^2 فضاء هلبرت .

والآن سوف نعرّف على الفضاء ((ℓ^p)) دالة المسافة التالية :

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i - \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $x = (\xi_i), y = (\eta_i) \in \ell^p$

إن إثبات أن d تابع مسافة غير مطلوب لكن لابد من ذكر المتراجحات المستخدمة في الإثبات وذلك لأهميتها :

1- متباينة هولدر للمجاميع :

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث $p > 1$ وَ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ هنا نسمي q, p أسين مترافقين وفي حالة $p = 2$ فإن $q = 2$ عندها تعطى المتراجحة التالية....وهي:

2- متباينة كوشي شفارتز :

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}\ \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2}$$

3- متباينة مينكوفسكي للمجاميع :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

الآن سوف نتناول مجموعة من التعاريف المهمة

ليكن لدينا (X, d) فضاء متري ولتكن لدينا $\emptyset \neq M \subseteq X$:

تعريف البعد بين مجموعتين

ليكن لدينا $A, B \subseteq X$ فإن البعد بين هاتين المجموعتين يُعطى بالعلاقة التالية :

$$d(x,y) = \inf d(x,y) \quad : x \in A , y \in B$$

((أي أنه أصغر مسافة بين عنصرين العنصر الأول من A والعنصر الثاني من B))

لم نستخدم inf بدلاً من min ؟

الجواب : لأنه لو وضعنا (min) فإنه ليس موجوداً في بعض المجموعات وسيكون جوابنا أن البعد بين هاتين المجموعتين غير موجود وهذا غير صحيح لأن البعد موجود ولكنه لا يوجد في المجموعتين عنصرين يحققان هذا البعد . <u>مثلا</u> المجموعة $]0,1[$ والعنصر 2

إن بعد العنصر 2 (المجموعة وحيدة العنصر) عن المجموعة $]0,1[$ هو 1 ولكن لا يوجد في المجموعة عنصر يحقق هذا البعد .

تعريف قطر المجموعة

لتكن لدينا A مجموعة ما غير خالية إن قطر المجموعة A نرمز له $S(A)$ في الفضاء المتري ويعّرف بأنه:

$$S(A) = \sup d(x,y) \quad : \quad x,y \in A$$

((أي أن قطر المجموعة هو أكبر مسافة بين نقطتين من هذه المجموعة))

تعريف الكرة المفتوحة

ليكن لدينا $x_0 \in X$ وليكن r عدداً حقيقياً عندئذٍ نعرف كل مايلي:

1- تمثل كرة مفتوحة $K(x_0,r) = \{x \in X \,;\, d(x,x_0) < r\}$
2- تمثل كرة مغلقة $B(x_0,r) = \{x \in X \,;\, d(x,x_0) \le r\}$
3- تمثل القشرة الكروية $S(x_0,r) = \{x \in X \,;\, d(x,x_0) = r\}$

ولكن هذا لا يعني أن هذه المجموعات دوماً تمثل كرة ربما شبه منحرف أو معين ولكن في حالة $\mathbb{R}^3$ يكوون لدينا كرة.

تعريف النقطة الداخلية

نقول عن $x_0 \in M$ إنها نقطة داخلية في M إذا استطعنا أن نجد لها كرة مفتوحة نصف قطرها r مناسب ومركزها x_0 بحيث تكون الكرة المفتوحة محتواة في M .

نرمز لمجموعة النقاط الداخلية ب M^0 وإن M^0 هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في M .

ملاحظة : كلمة جوار تكافئ كرة مفتوحة , الجوار ليس بالضرورة ان يكون مركزه x_0 لكن الكرة تكون x_0 هي مركزها .سنستخدم مفهوم الكرة المفتوحة .

تعريف النقطة الحديّة (التراكم أو التجمّع)

نقول عن $x_0 \in X$ إنها نقطة حديّة ل M إذا وفقط إذا كانت كل كرة مفتوحة مركزها x_0 تحوي عدد غير منته من عناصر M وسنرمز لمجموعة النقاط الحدية بِـ M' وندعوها المجموعة المشتقة .

تعريف النقطة المحيطية

نقول عن x_0 إنها نقطة محيطيّة إذا كان أي كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة x_0 فإن هذه الكرة تتقاطع مع M ومع متممتها M^c بغير فارغ .ونرمز لمجموعه النقط المحيطية ب ∂M

تعريف النقطة الملاصقة

نقول عن x_0 إنها نقطة ملاصقة لِـ M إذا كان أي جوار لها مركزه x_0 وإن هذا الجوار يتقاطع مع M بغير فارغ ونسمّي مجموعة النقاط الملاصقة بلصاقة M ونرمز لها بالرمز $\bar{M}$ وهي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M

تعريف المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة

المجموعة المفتوحة هي المجموعة التي جميع نقاطها داخلية والمجموعة المغلقة هي المجموعة التي متممتها مفتوحة .

- إن كلاً من $\emptyset, X$ مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان بنفس الوقت .

>> سؤال دورة >> لماذا كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي ؟

لأنه من خلال دالة المسافة (d) المعرّفة أصبح بالإمكان أن أوّلد سلسلة من الكرات المفتوحة التي تحقق شروط التبولوجيا مثلاً لنأخذ الفضاء $\mathbb{R}$ وتابع المسافة المألوفة $d(x,y) = |x - y|$ وهذا التابع يوّلد سلسلة من الكرات المفتوحة ولتكن (τ) التي هي المجالات المفتوحة وتحقق شروط التبولوجيا :

1- $X \in \tau, \emptyset \in \tau$

2- اجتماع أي عناصر من τ هو عنصر من τ .

3- تقاطع أي عدد منته من عناصر τ هو عنصر من τ .

انتهت المحاضرة

شام كالسيف ما التوى وحين التوى بقلبي طعن

كثير من النوم قد هوى فهل تصبحون على وطن

إعداد: سماح علوان ** عبد الرحمن البحش ** غفران الربابي