نظري

◀ دكتور المادة: خليل يحيى

◀المحاضرة : الثانية

عنوان المحاضرة: معادلات تفاضلية غير قابلة للفصل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-حل تمارين عن الأفكار السابقة

2-المعادلات التفاضلية غير قابلة للفصل

3- المعادلات التفاضلية المتجانسة

أمثلة و تمارين

مثال على حذف الثوابت

لدينا الحل العام التالي نريد إيجاد المعادلة ومنه $y = cx$ نلاحظ انه لدينا ثابت واحد إذاً نشتق مرة واحدة

$y' = c$ و منه فإن $y' = \frac{y}{x}$ و هنا نكون اوجدنا المعادلة التفاضلية بحذف الثابت c

تمرين: اوجد الحل العام

1- $x\,(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$

الحل

نقسم طرفي المعادلة على $(1 + y^2)(1 + x^2)$

$$\frac{xdx}{1 + x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}ln(1 + y^2) = ln(c) \quad *$$

ملاحظة: يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية غير قابلة لفصل المتحولات ولكنها ترد الى معادلات قابلة لفصل المتحولات

مثل $y' = \frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ حيث (a,b,c) ثوابت

فمن اجل ردها الى معادلة قابلة للفصل نفرض أن:

$$z = ax + by + c$$

نفاضل $dz = adx + bdy$

نقسم على dx $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

نعوض من $\frac{dy}{dx}$ * $\frac{dz}{dx} = a + b\,f(z)$

و منه $dx = \frac{dz}{a+bf(z)}$

بالمكاملة نجد $x = \int \frac{dz}{a+bf(Z)} + c$

مثال توضيحي:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = x + y + 1$$

الحل

نفرض أن $z = x + y + 1$ نفاضل فنجد $dz = dx + dy$

نقسم على dx $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ نعوض $y' = z$ لتصبح

و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل متحول $\frac{dz}{dx} = 1 + z$

و منه نجد أن $dx = \frac{dz}{1+z}$

نكامل $x = ln(1+z) + ln|c|$

ثم نقوم بتعويض قيمة z ومنه $x = ln|x+y+2| + ln|c|$

$$y = \frac{e^x}{c} - x - 2$$

$$y' = \frac{1}{x + y + 1}$$

نفرض أن $Z = x + y + 1$ نفاضل $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

و منه $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z}$ و منه اصبح لدينا معادلة تفاضلية قابلة للفصل

ومنه $dx = \frac{zdz}{1+z}$ بالمكاملة نجد $x = z - ln|1 + z| + ln|c|$

نعوض Z فيصبح لدينا $x = x + y - ln|x + y| + ln|c|$

من ثمة نعزل y فتكون $y = e^y - e - x + c$

المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف: نقول عن الدالة $f(x, y)$ أنها متجانسة من الدرجة n إذا تحقق ما يلي:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

حيث $\lambda \neq 0$ عدد حقيقي موجب

نقول عنها انها من الدرجة الأولى إذا كان $n = 1$

مثال:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + zxy$$

الحل

نبدل كل (x, y) ب $(\lambda x, \lambda y)$

فتصبح المعادلة بالشكل $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 zxy = \lambda^2 f(x, y)$

فالمعادلة متجانسة من الدرجة الثانية

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ أنها متجانسة اذا كانت الدالة $f(x,y)$ متجانسة و

لإيجاد الحل العام نفرض أن $z = \frac{y}{x}$ أي أن $y = zx$

نفاضل $y' = z + xz'$ و هي معادلة قابلة للفصل

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله و ياسين الحليبي و رهف النقشي

جميع الأشياء و أحلامك لن يحققها لك أحد سواك توقف عن انتظار
أشخاص يبعثرون افكارك

to improve our mathematics