نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الخامسة

عنوان المحاضرة: متتاليات التوابع الحقيقة

لقد قمنا سابقاً في مقرر تحليل ١ بدراسة المتتاليات العددية الحقيقة اللانهائية ودرسنا طبيعة تقاربها وتباعدها وسوف نقوم اليوم بدراسة متتالية التوابع الحقيقة وأنواع تقاربها وسندعم هذه الأفكار بالأمثلة الكافية .

متتاليات التوابع

◄**تعريف :** لتكن $n \in \mathbb{N}$ $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حقيقية معرفة على مجال ما $I \subseteq \mathbb{R}$ حدودها :

$$f_1(x)\,,f_2(x),\dots,f_n(x),\dots \quad : x \in \mathbb{S}$$

◄نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ إنها متقاربة $\forall x \in I$ و $n \in \mathbb{N}$

إذا وفقط إذا كانت متقاربة كمتتالية عددية من أجل كل x من المجال $\mathbb{S}$ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}$$

ويقال حينئذٍ أن متتالية متقاربة (نقطياً) من الدالة $f(x)$على $\mathbb{S}$

◄ نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ إنها متباعدة إذا وجدت قيمة واحدة على الأقل ل x تتباعد من أجلها المتتالية

◄نسمي مجموعة قيم x التي تتقارب عندها المتتالية بمنطقة التقارب

◄**تعريف أخر :** نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجموعة الجزئية $I \subseteq \mathbb{R}$ إنها متقاربة من دالة النهاية $f(x)$ إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ ولكل x_0 من المجال I عدد $N_0 \neq 0$ طبيعي

بحيث يكون : $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ لأجل كل من ε, x_0 أي أن : $N_0 = N_0(\varepsilon, x_0)$

للتوضيح : أي أنه لأجل كل عدد حيقي $\varepsilon > 0$ ولكل $x_0 \in I$ فإنه يوجد عدد طبيعي N_0 تابع لكل من ε, x_0 بحيث كل الدوال التي دليلها n تحقق $n \geq N_0$ فهي تقع ضمن الفترة

$$f(x_0) - \varepsilon < f_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

Syria Math Team

أي تحقق المتراجحة : $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

مثال : لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \;;\; 0 \le x < 1 \\ 1 \;;\; \quad x = 1 \end{cases}$$

نجد أن المتتالية متقاربة نقطياً على $[0,1]$ ونجد أن جميع حدود هذه المتتالية

$$x, x^2, x^3 \dots, x^n, \dots$$

هي توابع مستمرة على $I = [0,1]$ أما تابع النهاية هو منقطع أي (غير مستمر عند $x = 1$)

مثال : لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}}$ و $x \in I = [0,\infty[$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = \begin{cases} 0 \;;\; x > 0 \\ 1 \;;\; x = 0 \end{cases}$$

فهي متقاربة نقطياً ، و كما أنه نلاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية $\frac{1}{e^x}, \frac{1}{e^{2x}}, \dots$ توابع مستمرة إلا أن تابع النهاية $f(x) = \begin{cases} 0 \;;\; x > 0 \\ 1 \;;\; x = 0 \end{cases}$ غير مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \ne f(0) = 1$$

مثال : لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & : |x| < 1 \\ 1 & : |x| = 1 \\ \dfrac{n+1}{n} & : |x| > 1 \end{cases}$$

حيث $x \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

نأخذ تابع النهاية $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

وجدنا أن تابع النهاية هو تابع مستمر على $\mathbb{R}$ وحدود المتتالية هي توابع غير مستمرة على $\mathbb{R}$ تعاني انقطاع

$(x = -1 , x = 1)$

◄**توضيح وشرح على المثال السابق :**

إن : $|x| < 1$ تعني أن $-1 < x < 1$

و $|x| = 1$ تعني أن $x = 1$ أو $x = -1$

$|x| > 1$ تعني أن $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

وجدنا أنه في كل فرع نهاية المتتالية هي ١ فالمتتالية متقاربة نقطياً من التابع $f(x) = 1$

واتفقنا على أن متتالية التوابع هي عبارة عن عدد لانهائي من التوابع عند كل قيمة ل n ينتج لدينا تابع وفي المثال السابق كل هذه التوابع غير مستمرة على $\mathbb{R}$ لنأخذ مثلاً عندما $n = 1$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} : |x| < 1 \\ 1 \quad : |x| = 1 \\ 2 \quad : |x| > 1 \end{cases}$$

تابع غير مستمر لأن $\lim_{x\to_{<1}} f_1(x) \neq \lim_{x\to_{>1}} f_1(x) \neq f_1(x)$

$$\frac{1}{2} \neq 2 \neq 1$$

وكذلك من أجل جميع قيم n حيث $n \in \mathbb{N}$

التقارب المنتظم لمتتالية التوابع

◄**تعريف :** نقول عن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ أنها متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على $\mathbb{S}$ إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

لأجل كل $n \geq N_0$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $x \in I$

◄**تنويه :** هنا N_0 هو تابع ل ε فقط حيث $N_0 = N_0(\varepsilon)$ أي أنه عند اختيار N_0 في التقارب المنتظم يجب الا تحتوي علاقتها على x بل فقط على ε وسنوضح ذلك بمثال

◄إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام فهي متقاربة نقطياً لكن العكس غير صحيح بالضرورة

مثال : لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حيث $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ و $x \in [1, \infty[$

ادرس تقاربه المنتظم .

الحل :

نأخذ النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$

وبالتالي المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $0 = f(x)$

ولنثبت أنها متقاربة بانتظام:(أي أن N يتعلق فقط بـ ε)

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 = N_0(\varepsilon)$ اي $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (حسب التعريف) بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{nx} - 0\right| = \left|\frac{1}{nx}\right|$$

$$= \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad ; \quad \forall x \in [1, \infty[\ , \qquad n \geq N_0$$

ومنه المتتالية متقاربة بانتظام على I

إذاً : $\frac{1}{\varepsilon} < N_0 = N_0(\varepsilon)$ حيث $x \in \mathbb{S}$ إذاً وجدنا لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث $\left|\frac{1}{nx} - 0\right|$

لكل $n \geq N_0$ و $x \in [1, \infty[$ ومنه المتتالية متقاربة بانتظام على $[1, \infty[$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب

SyriaMathTeam